Известия вузов. Математика *http://kpfu.ru/science/nauchnye-izdaniya/ivrm/*
2016, №12, с. 76–81 *e-mail: izvuz.matem@kpfu.ru*

А.П. СОЛДАТОВ, ЧАН К. ВЫОНГ

ЗАДАЧА ЛИНЕЙНОГО СОПРЯЖЕНИЯ ДЛЯ БИАНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Аннотация. Рассмотрена классическая задача линейного сопряжения для бианалитических функций на гладком контуре. Получена явная формула решения задачи и описаны необходимые и достаточные условия ее разрешимости.

Ключевые слова: задача линейного сопряжения, бианалитическая функция, каноническая функция, индекс Коши.

УДК: 517.944

Пусть на комплексной плоскости задан ориентируемый гладкий контур Γ, состоящий из простых контуров $\Gamma_1, \dots, \Gamma_m$. Тогда дополнение к нему $D = \mathbb{C} \setminus \Gamma$ состоит из некоторого числа областей $D_0, D_1, \dots, D_m$, из которых область D_0 бесконечна и содержит окрестность бесконечно удаленной точки ∞, а остальные области конечны. Рассмотрим в этих областях бианалитическую функцию ϕ, т. е. функцию $\phi \in C^2(D)$, удовлетворяющую уравнению

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial \overline{z}^2} = 0.$$

Хорошо известно[1], [2], что она выражается через две аналитические функции ϕ_0, ϕ_1 по формуле Гурса

$$\phi(z) = \phi_0(z) + \overline{z}\phi_1(z), \quad z \in D, \tag{1}$$

где $\phi_1 = \partial\phi/\partial\overline{z}$.

Пусть бианалитическая в D функция ϕ вместе с частной производной $\phi_1 = \partial\phi/\partial\overline{z}$ непрерывна в замкнутых областях $\overline{D}_j$, так что определены односторонние граничные значения $\phi^{\pm}$ и $\phi_1^{\pm}$ на Γ. Тогда можно рассмотреть задачу линейного сопряжения

$$\phi^+ - G_0\phi^- = f_0, \quad \left(\frac{\partial\phi}{\partial\overline{z}}\right)^+ - G_1\left(\frac{\partial\phi}{\partial\overline{z}}\right)^- = f_1, \tag{2}$$

где коэффициенты G_k и правые части f_k заданы, причем $G_k(t) \neq 0$ для всех $t \in \Gamma$.

В дальнейшем предполагается, что функции G_k, f_k принадлежат классу Гёльдера $C^\mu(\Gamma)$, а решение ищется в классе

$$\phi, \phi_1 \in C^\mu(\overline{D}_j), \quad 1 \le j \le m; \quad \phi, \phi_1 \in C^\mu(\overline{D}_0 \cap \{|z| \le R\}), \tag{3}$$

Поступила 25.04.2015

Благодарности. Работа выполнена при поддержке международного проекта (3492.ГФ4) Министерства образования и науки Республики Казахстан.

где $\phi_1 = \partial\phi/\partial\overline{z}$ и $R > 0$ выбрано по условию $\Gamma \subseteq \{|z| < R\}$. Кроме того, для заданного целого k поведение ϕ на бесконечности подчинено оценке

$$|\phi(z)| + |z|\,|\phi_1(z)| \le C|z|^{k-1} \quad \text{при} \quad |z| \ge R. \tag{4}$$

Задачи подобного типа исследовались многими авторами (например, [3], [4]), как правило, в классе функций, ограниченных на бесконечности. Схема ее решения хорошо известна[5]. С помощью представления (1) она последовательно сводится к задачам аналогичного вида для аналитических функций. Однако в общем случае произвольных функций G_0, G_1 явного решения получено не было (например, [5], сс. 318, 319). В данной статье приведем явное решение этой задачи для любого значения k в оценке (4) и опишем точные условия ее разрешимости.

Пусть $\varkappa_k = \operatorname{Ind} G_k$, $k = 0, 1,$ — индекс Коши функции G_k, т. е. если выбраны точки $\tau_j \in \Gamma_j$ и непрерывные на $\Gamma_j \setminus \tau_j$ ветви $\arg G_k$, то

$$\varkappa_k = \frac{1}{2\pi}\sum_{j=1}^{m}[(\arg G_k)(\tau_j - 0) - (\arg G_k)(\tau_j + 0)], \tag{5}$$

где односторонние предельные значения в точках τ_j понимаются по отношению к ориентациям на контурах Γ_j. Пусть X_k — каноническая функция задачи линейного сопряжения для аналитических функций, отвечающая коэффициенту G_k. Напомним [6], что эта функция всюду отлична от нуля, включая предельные значения $X_k^{\pm}$, удовлетворяет краевому условию

$$X_k^+ = G_k X_k^- \tag{6}$$

и подчинена поведению

$$\lim_{z\to\infty} z^{\varkappa_k} X_k(z) = 1 \tag{7}$$

на бесконечности. Хорошо известно [6], что функция X_k с этими свойствами определяется единственным образом, причем $X_k^{\pm} \in C^{\mu}(\Gamma)$.

Положим

$$A(t) = \frac{\overline{t}[G_1(t) + G_0(t)]}{2G_1(t)}, \quad B(t) = \frac{\overline{t}[G_1(t) - G_0(t)]}{2G_1(t)}, \quad C(t) = \frac{B(t)X_1^+(t)}{X_0^+(t)}, \tag{8}$$

и введем сингулярный оператор

$$(N\varphi)(t_0) = A(t_0) + \varphi(t_0) + \frac{B(t_0)}{\pi i}\int_{\Gamma}\frac{X_1^+(t_0)}{X_1^+(t)}\frac{\varphi(t)dt}{t - t_0}, \quad t_0 \in \Gamma. \tag{9}$$

Для целого n обозначим через $P(n)$ класс многочленов $p(t)$ степени $\deg p \le n-1$, полагая $P(n) = 0$ для $n \le 0$. Таким образом, $\dim P(n) = \max(0, n)$. Удобно для целого m ввести подпространство $P(n, m)$ всех многочленов $p \in P(n)$, для которых

$$\langle q, Cp\rangle = 0, \quad q \in P(m), \tag{10}$$

где $\langle\varphi, \psi\rangle = \int\limits_{\Gamma} \varphi(t)\psi(t)dt$.

Это подпространство возникает в следующей ситуации.

Лемма. *Пусть функция $f \in C(\Gamma)$ удовлетворяет условию*

$$\langle f, p\rangle = \langle q, Cp\rangle, \quad p \in P(n), \tag{11}$$

для некоторого многочлена $q \in P(m)$. Тогда это условие равносильно

$$\langle f, p\rangle = 0, \quad p \in P(n, m).$$

Доказательство. Не ограничивая общности, считаем, что числа m, n положительны. Разложим многочлены p и q по базисным функциям $e_i(t) = t^{i-1}$, $i = 1, 2, \dots$, в явном виде

$$p = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i, \quad q = \sum_{j=1}^{m} y_j e_j,$$

с некоторыми $x_i, y_j \in \mathbb{C}$. Тогда (11) можем записать в виде тождества

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \langle f, e_i \rangle = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} x_i y_j \langle e_j, Ce_i \rangle$$

по $x \in \mathbb{C}^n$, что равносильно разрешимости системы линейных уравнений

$$\sum_{j=1}^{m} \langle e_j, Ce_i \rangle y_j = \langle f, e_i \rangle, \quad 1 \le i \le n.$$

Очевидно, эта система разрешима тогда и только тогда, когда ее правая часть удовлетворяет условию ортогональности

$$\sum_{i=1}^{n} \langle f, e_i \rangle \xi_i = 0 \tag{12}$$

всем решениям $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ союзной однородной системы

$$\sum_{i=1}^{n} \langle e_j, Ce_i \rangle \xi_i = 0, \quad 1 \le j \le m. \tag{13}$$

Полагая $p = \sum\limits_{1}^{n} \xi_i e_i$, равенство (12) запишем в форме $\langle f, p \rangle = 0$ для всех многочленов $p \in P(n)$, удовлетворяющих условию $\langle e_j, Cp \rangle = 0$, $1 \le j \le m$, или, что равносильно, условию (10).

Из доказательства леммы видно, что размерность пространства $P(n, m)$ совпадает с числом линейно независимых решений однородной системы (13). Таким образом,

$$\dim P(n, m) = n - \operatorname{rang} C(n, m), \tag{14}$$

где матрица $C(n, m) \in \mathbb{C}^{m \times n}$ определяется элементами $C_{ij} = \langle e_j, Ce_i \rangle$ и имеет следующую структуру

$$C(n, m) = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & \cdots & c_n \\ c_2 & c_3 & \cdots & c_{n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_m & c_{m+1} & \cdots & c_{m+n-1} \end{pmatrix}, \quad c_k = \int_\Gamma C(t) t^{k-1} dt.$$

Сформулируем основной результат о характере разрешимости рассматриваемой задачи (2)–(4).

Теорема. *В классе* (3), (4) *задача* (2) *разрешима тогда и только тогда, когда ее правые части* f_0, f_1 *удовлетворяют условиям ортогональности*

$$\begin{gathered} \langle f_1, (X_1^+)^{-1} q_1 \rangle = 0, \quad q_1 \in P(-\varkappa_1 - k + 1), \\ \langle f_0 - N f_1, (X_0^+)^{-1} q_0 \rangle = 0, \quad q_0 \in P(-\varkappa_0 - k, \varkappa_1 + k - 1). \end{gathered} \tag{15}$$

При выполнении этих условий все решения задачи описываются формулой

$$\phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \left[\frac{X_0(z)}{X_0^+(t)}\frac{f_0(t)-(Nf_1)(t)}{t-z} + \frac{\overline{z}X_1(z)}{X_1^+(t)}\frac{f_1(t)}{t-z}\right]dt - \\ - \frac{1}{\pi i}\int_\Gamma \left[\frac{X_0(z)}{X_0^+(t)}\frac{B(t)X_1^+(t)p_1(t)}{t-z}\right]dt + X_0(z)p_0(z) + \overline{z}X_1(z)p_1(z) \quad (16)$$

с произвольными $p_0 \in P(\varkappa_0 + k)$ *и* $p_1 \in P(\varkappa_1 + k - 1)$.

Доказательство. Согласно (1) задачу (2) можно свести к эквивалентной системе из двух задач для двух аналитических функций:

$$\phi_1^+ - G_1\phi_1^- = f_1, \quad \phi_0^+ - G_0\phi_0^- = f_2, \tag{17}$$

где положено $f_2(t) = f_0(t) - \overline{t}[\phi_1^+(t) - G_0(t)\phi_1(t)]$. Эти задачи рассматриваются в классе функций (3) с соответствующими оценками

$$|\phi_1(z)| \le C|z|^{k-2}, \tag{18_1}$$

$$|\phi_0(z)| \le C|z|^{k-1}, \tag{18_0}$$

в окрестности бесконечности, вытекающими из (4).

В силу (6), (7) из общих результатов [6], [7] о задаче линейного сопряжения следует, что первая задача для ϕ_1 разрешима в классе (3), (18_1) тогда и только тогда, когда

$$\langle f_1, (X_1^+)^{-1}q_1\rangle = 0, \quad q_1 \in P(-\varkappa_1 - k + 1), \tag{18}$$

и при выполнении этих условий все решения задачи даются формулой

$$\phi_1(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{X_1(z)}{X_1^+(t)}\frac{f_1(t)dt}{t-z} + X_1(z)p_1(z), \quad p_1 \in P(\varkappa_1 + k - 1). \tag{19}$$

Пользуясь этой формулой, вычислим функцию f_2, которую можно записать в виде

$$f_2(t) = f_0(t) - \overline{t}f_1(t) - \overline{t}[G_1(t) - G_0(t)]\phi_1^-(t). \tag{20}$$

Согласно (6) и формуле Сохоцкого–Племеля, примененной к интегралу типа Коши в (20), имеем

$$2G_1(t_0)\phi_1^-(t_0) = -f_1(t_0) + \frac{1}{\pi i}\int_\Gamma \frac{X_1^+(t_0)}{X_1^+(t)}\frac{f_1(t)dt}{t-t_0} + 2X_1^+(t_0)p_1(t_0).$$

Подставляя это выражение в (21), в обозначениях (8), (9) получим

$$f_2(t) = f_0(t) - (Nf_1)(t) - 2B(t)X_1^+(t)p_1(t). \tag{21}$$

Как и выше, вторая задача в (17) разрешима в классе (3), (18_0) тогда и только тогда, когда

$$\langle f_2, (X_0^+)^{-1}q_0\rangle = 0, \quad q_0 \in P(-\varkappa_0 - k), \tag{22}$$

и при выполнении этих условий все ее решения даются формулой

$$\phi_0(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{X_0(z)}{X_0^+(t)}\frac{f_2(t)dt}{t-z} + X_0(z)p_0(z), \quad p_0 \in P(\varkappa_0 + k). \tag{23}$$

Рассмотрим подробнее условие (23), которое согласно (8), (18) можно переписать в форме тождества

$$\langle f_0 - Nf_1, (X_0^+)^{-1}q_0\rangle = 2\langle p_1, Cq_0\rangle, \quad q_0 \in P(-\varkappa_0 - k), \tag{24}$$

для некоторого многочлена $p_1 \in P(\varkappa_1 + k - 1)$. На основании леммы, где роль f играет функция $(2X_0^+)^{-1}(f_0 - Nf_1)$ и буквы p, q следует переменить местами, условие (25) равносильно второму условию ортогональности в (15) и, следовательно, условия (19), (25) можно заменить на (15). Поскольку подстановка (20) и (22), (24) в (1) приводит к формуле (16), тем самым доказательство теоремы завершено.

Из теоремы следует, что число линейно независимых решений однородной задачи равно $\dim P(\varkappa_0 + k) + \dim P(\varkappa_1 + k - 1)$, а число линейно независимых условий ее разрешимости равно $\dim P(-\varkappa_0 - k, \varkappa_1 + k - 1) + \dim P(-\varkappa_1 - k + 1)$. Поэтому индекс $\varkappa$ задачи дается формулой

$$\varkappa = \dim P(\varkappa_0 + k) + \dim P(\varkappa_1 + k - 1) - \dim P(-\varkappa_0 - k, \varkappa_1 + k - 1) - \dim P(-\varkappa_1 - k + 1).$$

С учетом (14) отсюда

$$\varkappa = \varkappa_0 + \varkappa_1 + 2k - 1 + s, \quad s = \mathrm{rang} C(-\varkappa_0 - k, \varkappa_1 + k - 1).$$

Конечно, в этом равенстве следует положить $s = 0$, если одно из чисел $-\varkappa_0 - k, \varkappa_1 + k - 1$ отрицательно.

Литература

[1] Векуа И.Н. *Новые методы решения эллиптических уравнений* (Гостехиздат, М.–Л., 1948).

[2] Балк М.Б. *Полианалитические функции и их обобщения*, Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. матем. Фундам. направления **85**, 187–246 (1991).

[3] Соколов И.А. *О краевой задаче типа Римана для бианалитических функций в случае произвольного контура*, Изв АН БССР, сер. физ.-матем. наук **6**, 29–38 (1969).

[4] Расулов К.М. *О решении некоторых краевых задач типа Римана для полианалитических функций*, ДАН СССР **252** (5), 1059–1063 (1980).

[5] Гахов Ф.Д. *Краевые задачи.* 3 изд. (Наука, М., 1977).

[6] Мусхелишвили Н.И. *Сингулярные интегральные уравнения* (Наука, М., 1968).

[7] Аверьянов Г.Н., Солдатов А.П. *Задача линейного сопряжения для аналитических функций в семействе весовых пространств Гёльдера*, Изв. вузов. Матем., №9, 56–61 (2015).

А.П. Солдатов

Белгородский государственный университет,
ул. Студенческая, д. 14, г. Белгород, 308007, Россия,

`e-mail:` soldatov48@gmail.com

Чан Куанг Выонг

Белгородский государственный университет,
ул. Студенческая, д. 14, г. Белгород, 308007, Россия,

`e-mail:` vuongtq@dlu.edu.vn

A.P. Soldatov and Tran Quang Vuong

The linear conjugation problem for bianalytic functions

Abstract. We consider a classical problem of linear conjugation for bianalytic functions on smooth contour. We obtain explicit formula of a solution to a problem and describe necessary and sufficient conditions of its solvability.

Keywords: problem of linear conjugation, bianalytic function, canonical function, Cauchy index.

A.P. Soldatov

Belgorod State University,
14 Studencheskaya str., Belgorod, 308007 Russia,

`e-mail:` soldatov48@gmail.com

Tran Quang Vuong

Belgorod State University,
14 Studencheskaya str., Belgorod, 308007 Russia,

`e-mail:` vuongtq@dlu.edu.vn