ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2004 МАТЕМАТИКА № 9 (508)

УДК 514.756

Д.А. АБРУКОВ

ПОЛНОТА ФУНДАМЕНТАЛЬНОГО ОБЪЕКТА ПОВЕРХНОСТИ, НЕ ПРИНАДЛЕЖАЩЕЙ АБСОЛЮТУ ПРОЕКТИВНО-МЕТРИЧЕСКОГО ПРОСТРАНСТВА

В работе исследуется распределение m-мерных линейных элементов $\Im$ $(m < n-1)$, вложенное в проективно-метрическое пространство K_n с абсолютом Q_{n-1}. Доказано, что в дифференциальной окрестности первого порядка распределение $\Im$ порождает инвариантно присоединенное к нему гиперполосное распределение m-мерных линейных элементов Н [1], для которого данное распределение и является базисным. Изучается m-мерная поверхность V_m $(m < n-1)$, текущая точка которой не принадлежит абсолюту Q_{n-1} проективно-метрического пространства K_n. Показано, что во второй дифференциальной окрестности текущей точки поверхности V_m индуцируется ассоциированная с ней гиперполоса $H(V_m)$. Доказано, что фундаментальный геометрический объект пятого порядка поверхности $V_m \subset K_n$ является полным.

Индексы принимают следующие значения:

$$\overline{I}, \overline{K}, \overline{L} = \overline{0, n}; \quad I, K, L, P, Q = \overline{1, n};$$
$$i, j, k, p, q, s, l, t = \overline{1, m}; \quad u, v, w, z, y = \overline{m+1, n-1}; \quad \alpha, \beta, \gamma = \overline{m+1, m}.$$

Операция внешнего дифференцирования обозначена буквой D, внешнего умножения — символом $\wedge$; $\omega^{\overline{I}}_{\overline{K}}$ и $\Omega^{\overline{I}}_{\overline{K}}$ — дифференциальные формы Пфаффа, характеризующие инфинитезимальные перемещения подвижного репера. Оператор ∇ действует по следующему закону:

$$\nabla K^{\alpha}_{in} = dK^{\alpha}_{in} - K^{\alpha}_{tn}\omega^t_i - K^{\alpha}_{in}\omega^n_n + K^{\beta}_{in}\omega^{\alpha}_{\beta},$$

при фиксированных главных параметрах этот оператор обозначается через ∇_δ, формы $\omega^{\overline{I}}_{\overline{K}}$ — через $\pi^{\overline{I}}_{\overline{K}}$. Оператор $\widetilde{\nabla}$ действует по закону

$$\widetilde{\nabla} T^{\alpha}_{in} = dT^{\alpha}_{in} - T^{\alpha}_{tn}\Omega^t_i - T^{\alpha}_{in}\Omega^n_n + T^{\beta}_{in}\Omega^{\alpha}_{\beta}.$$

По индексам, заключенным в круглые скобки, производится операция циклирования:

$$a_{(ij)} = a_{ij} + a_{ji}.$$

1. Рассмотрим n-мерное проективное пространство P_n, отнесенное к подвижному реперу $R' = \{B_{\overline{K}}\}$; деривационные формулы репера R' и уравнение структуры проективного пространства имеют соответственно вид [2]:

$$dB_{\overline{I}} = \Omega^{\overline{L}}_{\overline{I}} B_{\overline{L}}, \tag{1$_\mathrm{a}$}$$
$$D\Omega^{\overline{I}}_{\overline{K}} = \Omega^{\overline{L}}_{\overline{K}} \wedge \Omega^{\overline{I}}_{\overline{L}}, \quad \Omega^{\overline{L}}_{\overline{L}} = 0. \tag{1$_\mathrm{b}$}$$

Известно [3], [4], что проективно-метрическим пространством K_n называется пространство P_n, в котором задана неподвижная гиперквадрика Q_{n-1} (абсолют):

$$G_{\overline{I}\,\overline{K}} y^{\overline{I}} y^{\overline{K}} = 0, \quad G_{\overline{I}\,\overline{K}} = G_{\overline{K}\,\overline{I}}, \tag{2}$$

где $y^{\overline{I}}$ — координаты точек $M' \in Q_{n-1}$. Согласно работе [5] условием неподвижности гиперквадрики (2) является выполнение дифференциальных уравнений

$$dG_{\overline{I}\,\overline{K}} - G_{\overline{I}\,\overline{L}}\Omega^{\overline{L}}_{\overline{K}} - G_{\overline{L}\,\overline{K}}\Omega^{\overline{L}}_{\overline{I}} = \Omega G_{\overline{I}\,\overline{K}}, \tag{3}$$

где Ω — некоторая форма Пфаффа.

Известно [4], что при $B_0 \notin Q_{n-1}$ за счет определенной нормировки вершин репера R' становятся главными формы

$$\Omega^0_0 = -\frac{G_{0L}}{G_{00}}\Omega^L_0. \tag{4}$$

В силу соотношения (4) и за счет нормировки коэффициентов $G_{\overline{I}\,\overline{K}}$ гиперквадрики можно уравнение (2) абсолюта Q_{n-1} и условие его неподвижности (3) записать соответственно в виде

$$c_{IK}y^I y^K + \frac{1}{G}(G_{I0}y^I + Gy^0)^2 = 0,$$

$$dc_{IK} - c_{IL}\Omega^L_K - c_{LK}\Omega^L_I = -\frac{1}{G}(c_{IL}G_{K0} + c_{KL}G_{I0})\Omega^L_0, \tag{5$_\mathrm{a}$}$$

$$dG_{I0} - G_{L0}\Omega^L_I - G\Omega^0_I = c_{IL}\Omega^L_0, \tag{5$_\mathrm{b}$}$$

где

$$c_{IK} = G_{IK} - \frac{G_{I0}G_{K0}}{G}, \quad c_{IK} = c_{KI}, \quad G = G_{00} = \mathrm{const} \neq 0.$$

В силу выражения (4) деривационные уравнения (1_a) в проективно-метрическом пространстве K_n запишутся в виде

$$dB_0 = \Big(-\frac{G_{0L}}{G}B_0 + B_L\Big)\Omega^L_0, \quad dB_I = \Omega^{\overline{L}}_I B_{\overline{L}}.$$

Уравнения структуры (1_b) проективно-метрического пространства K_n примут вид

$$D\Omega^I_0 = -\frac{G_{0L}}{G}\Omega^L_0 \wedge \Omega^I_0 + \Omega^L_0 \wedge \Omega^I_L, \quad D\Omega^0_I = \Omega^L_I \wedge \Omega^0_L - \frac{G_{0L}}{G}\Omega^0_I \wedge \Omega^L_0, \tag{6$_\mathrm{a}$}$$

$$D\Omega^0_0 = \Omega^L_0 \wedge \Omega^0_L, \quad D\Omega^I_K = \Omega^0_K \wedge \Omega^I_0 + \Omega^L_K \wedge \Omega^I_L, \quad \Omega^L_L = \frac{G_{0L}}{G}\Omega^L_0. \tag{6$_\mathrm{b}$}$$

2. Как и в пространстве проективной связности, уравнения распределения m-мерных линейных элементов $\Im$ в проективном-метрическом пространстве K_n в репере нулевого порядка $R' = \{B_{\overline{K}}\}$ (точка $B_0 \notin Q_{n-1}$ совпадает с центром распределения $\Im$, а точки B_i принадлежат текущей плоскости $\Pi_m(B_0)$ распределения $\Im$) записываются в виде [6]:

$$\Omega^\alpha_i = M^\alpha_{iK}\Omega^K_0. \tag{7}$$

Продолжая уравнения (7), с учетом соотношения (4) имеем

$$\widetilde{\nabla} M^\alpha_{ij} = M^\alpha_{ijK}\Omega^K_0, \tag{8}$$

$$\widetilde{\nabla} M^\alpha_{i\beta} - M^\alpha_{ik}\Omega^k_\beta - \delta^\alpha_\beta\Omega^0_i = M^\alpha_{i\beta K}\Omega^K_0,$$

где

$$M^\alpha_{i[jk]} = M^\alpha_{i\beta}M^\beta_{[jk]} + \frac{1}{G}M^\alpha_{i[j}G_{k]0}, \quad M^\alpha_{ik\beta} - M^\alpha_{i\beta k} = M^\alpha_{i\gamma}M^\gamma_{k\beta} + \frac{2}{G}M^\alpha_{i[k}G_{\beta]0}.$$

Совокупность функций $\{M^\alpha_{ij}\}$ образует тензор первого порядка (вообще говоря, несимметричный).

С учетом уравнений (7) условия (5) неподвижности абсолюта Q_{n-1} запишутся в виде

$$dG_{i0} - G_{j0}\Omega_i^j - G\Omega_i^0 = (c_{iK} + G_{\alpha 0} M_{iK}^\alpha)\Omega_0^K, \tag{9$_\mathrm{a}$}$$

$$dG_{\alpha 0} - G_{\beta 0}\Omega_\alpha^\beta - G_{j0}\Omega_\alpha^j - G\Omega_\alpha^0 = c_{\alpha K}\Omega_0^K, \tag{9$_\mathrm{b}$}$$

$$\widetilde{\nabla} c_{ij} = \left(c_{\alpha(i} M_{j)K}^\alpha - \frac{1}{G} c_{K(i} G_{j)0}\right)\Omega_0^K, \tag{9$_\mathrm{c}$}$$

$$\widetilde{\nabla} c_{i\alpha} - c_{is}\Omega_\alpha^s = \left(c_{\alpha\beta} M_{iK}^\beta - \frac{1}{G} c_{K(i} G_{\alpha)0}\right)\Omega_0^K, \tag{9$_\mathrm{d}$}$$

$$\widetilde{\nabla} c_{\alpha\beta} - c_{s(\alpha}\Omega_{\beta)}^s = -\frac{1}{G} c_{K(\alpha} G_{\beta)0}\Omega_0^K. \tag{9$_\mathrm{e}$}$$

Совокупность функций $\{c_{ij}\}$ образует симметричный тензор; предполагая его невырожденным, т. е. $c = |c_{ij}| \neq 0$, имеем поле взаимного тензора c^{ij}:

$$c^{ik} c_{kj} = \delta_j^i, \quad \widetilde{\nabla} c^{ij} = c^{is} c^{tj}\left[\frac{1}{G} G_{0(t} c_{s)K} - c_{\alpha(s} M_{t)K}^\alpha\right]\Omega_0^K. \tag{10}$$

Рассмотрим охваты

$$A_{\alpha\beta} \stackrel{\mathrm{def}}{=} c_{\alpha\beta} - c^{ij} c_{i\alpha} c_{j\beta}, \quad A_{[\alpha\beta]} = 0; \tag{11}$$

$$b^\alpha \stackrel{\mathrm{def}}{=} c^{ij} M_{ij}^\alpha, \quad b_\alpha \stackrel{\mathrm{def}}{=} A_{\alpha\beta} b^\beta; \tag{12}$$

их компоненты в силу (8), ($9_{\mathrm{d,e}}$), (10) удовлетворяют дифференциальным уравнениям

$$\begin{gathered}\widetilde{\nabla} A_{\alpha\beta} = A_{\alpha\beta K}\Omega_0^K; \quad \widetilde{\nabla} b^\alpha = b_K^\alpha \Omega_0^K; \quad \widetilde{\nabla} b_\alpha = b_{\alpha K}\Omega_0^K, \\ \widetilde{\nabla} b_{\alpha K} - \delta_K^\beta b_\beta \Omega_\alpha^0 - b_\beta M_{iK}^\beta \Omega_\alpha^i = b_{\alpha KL}\Omega_0^L.\end{gathered} \tag{13}$$

Следовательно, все три охвата (11), (12) образуют тензор; в частности b_α и b^α суть тензоры первого порядка.

Предположим, что $m < n-1$, т. е. распределение m-мерных линейных элементов $\Im$ не является распределением гиперплоскостных элементов. Инвариантная гиперплоскость ξ_0, уравнение которой в репере нулевого порядка имеет вид $b_\alpha y^\alpha = 0$, содержит текущий m-мерный линейный элемент Π_m распределения $\Im$. Следовательно, распределение m-мерных линейных элементов $\Im$ в первой дифференциальной окрестности внутренним образом порождает инвариантно присоединенное к нему гиперполосное распределение m-мерных линейных элементов H [7], для которого данное распределение является базисным.

Предположим, $B_n \notin \xi_0$, что равносильно условию $b_n \neq 0$. Очевидно, точки $A_u = B_u - \frac{b_u}{b_n} B_n$ находятся в общем положении и лежат в гиперплоскости ξ_0, т. е. $\xi_0 = [B_0, B_i, A_u]$.

Инфинитезимальные перемещения репера $R = \{A_{\overline{K}}\}$ первого порядка ($A_0 = B_0$, $A_i = B_i$, $A_u = B_u - \frac{b_u}{b_n} B_n$, $A_n = B_n$) определяются уравнениями

$$dA_{\overline{I}} = \omega_{\overline{I}}^{\overline{L}} A_{\overline{L}}. \tag{14}$$

Сравнивая (1_{a}) и (14), с использованием уравнений (7), (13) находим

$$\begin{gathered}\omega_0^0 = \Omega_0^0, \quad \omega_0^i = \Omega_0^i, \quad \omega_0^u = \Omega_0^u, \quad \omega_0^n = \Omega_0^n - \frac{b_u}{b_n}\Omega_0^u, \\ \omega_j^0 = \Omega_j^0, \quad \omega_j^i = \Omega_j^i, \quad \omega_j^u = \Omega_j^u, \quad \omega_j^n = \frac{1}{b_n} b_\alpha \Omega_j^\alpha, \\ \omega_u^0 = \Omega_u^0 - \frac{b_u}{b_n}\Omega_n^0, \quad \omega_u^i = \Omega_u^i - \frac{b_u}{b_n}\Omega_n^i, \quad \omega_u^v = \Omega_u^v - \frac{b_u}{b_n}\Omega_n^v,\end{gathered} \tag{15}$$

$$\omega_u^n = \frac{1}{(b_n)^2}(b_u b_{nK} - b_n b_{uK})\Omega_0^K,$$

$$\omega_n^0 = \Omega_n^0, \quad \omega_n^i = \Omega_n^i, \quad \omega_n^u = \Omega_n^u, \quad \omega_n^n = \Omega_n^n + \frac{b_u}{b_n}\Omega_n^u.$$

Уравнения структуры проективно-метрического пространства K_n в репере $R = \{A_{\overline{K}}\}$ первого порядка имеют вид

$$D\omega_{\overline{K}}^{\overline{I}} = \omega_{\overline{K}}^{\overline{L}} \wedge \omega_{\overline{L}}^{\overline{I}}, \quad \omega_{\overline{L}}^{\overline{L}} = 0.$$

Известно [7], что относительно репера $R = \{A_{\overline{K}}\}$ уравнения гиперполосного распределения m-мерных линейных элементов Н, ассоциированного с распределением $\Im$, запишутся в виде

$$\begin{gathered} \omega_i^n = \Lambda_{iK}^n \omega_0^K, \quad \omega_i^v = \Lambda_{iK}^v \omega_0^K, \\ \omega_u^n = A_{uK}^n \omega_0^K. \end{gathered} \tag{16}$$

Из соотношений (7), (15), (16) находим

$$\Lambda_{iK}^n = \frac{1}{b_n} b_\alpha M_{iK}^\alpha, \quad \Lambda_{iK}^u = M_{iK}^u, \quad A_{uK}^n = \frac{1}{(b_n)^2}(b_u b_{nK} - b_n b_{uK}). \tag{17}$$

Продолжая уравнения (16), в частности, имеем

$$\nabla A_{uj}^n + A_{uj}^n \omega_0^0 - \Lambda_{sj}^n \omega_u^s = A_{ujK}^n \omega_0^K, \tag{18_a}$$

$$\nabla \Lambda_{ij}^n + \Lambda_{ij}^n \omega_0^0 = \Lambda_{ijK}^n \omega_0^K. \tag{18_b}$$

Отметим, что в силу соотношений (17) функции Λ_{iK}^n, Λ_{iK}^v относятся к первой дифференциальной окрестности, а функции A_{uK}^n — ко второй дифференциальной окрестности текущего элемента распределения $\Im$.

При условии невырожденности тензора Λ_{ij}^n (см. (18_b)) $\Lambda = |\Lambda_{ij}^n| \neq 0$, в силу уравнений ($18_a$) согласно лемме Н.М. Остиану [8] возможна частичная канонизация репера $R = \{A_{\overline{K}}\}$, при которой функции A_{uj}^n можно привести к нулю, при этом становятся главными формы $\omega_u^i = N_{uK}^i \omega_0^K$. В полученном репере второго порядка уравнения гиперполосного распределения m-мерных линейных элементов Н, ассоциированного с распределением $\Im$, запишутся в виде

$$\omega_i^n = \Lambda_{iK}^n \omega_0^K, \quad \omega_i^v = \Lambda_{iK}^v \omega_0^K, \quad \omega_u^n = A_{u\alpha}^n \omega_0^\alpha, \quad \omega_u^i = N_{uK}^i \omega_0^K. \tag{19}$$

Здесь функции Λ_{iK}^n, Λ_{iK}^v относятся к дифференциальной окрестности первого порядка, функции $A_{u\alpha}^n$ — к окрестности второго порядка, а функции N_{vj}^i — к дифференциальной окрестности третьего порядка текущего элемента распределения m-мерных линейных элементов $\Im$.

Проведенная специализация репера $R = \{A_{\overline{K}}\}$ имеет следующую геометрическую характеристику [7]:

$$\Lambda = |\Lambda_{ij}^n| \neq 0 \;\Leftrightarrow\; \Pi_m \cap \Pi_\rho \equiv A_0,$$

где Π_ρ — характеристика гиперплоскости $\xi_0 \equiv \Pi_{n-1}$ при смещениях центра A_0 вдоль кривых l, принадлежащих [6] базисному распределению, причем $A_u \in \Pi_\rho$, т. е. $\rho = n - m - 1$.

Итак, справедлива

Теорема 1. *Распределение m-мерных линейных элементов $\Im$ ($m < n - 1$) в дифференциальной окрестности первого порядка порождает инвариантно присоединенное к нему гиперполосное распределение m-мерных линейных элементов* Н, *для которого данное распределение $\Im$ является базисным. Распределение* Н *регулярно тогда и только тогда, когда невырожден тензор $b_\alpha M_{ij}^\alpha$ первого порядка. Уравнения регулярного гиперполосного распределения* Н *в репере второго порядка $R = \{A_{\overline{K}}\}$ имеют вид* (19).

3. Вернемся к подвижному реперу $R' = \{B_{\overline{K}}\}$. Деривационные формулы репера R' и уравнения структуры проективно-метрического пространства K_n в репере R' имеют соответственно вид (6).

Рассмотрим m-мерную поверхность V_m проективно-метрического пространства K_n, текущая точка B_0 которой не принадлежит абсолюту Q_{n-1} (см. (5)). Как и в проективном пространстве P_n, в репере $R' = \{B_{\overline{K}}\}$ первого порядка ($B_0 \in V_m$, $B_i \in T_m(B_0)$) уравнения поверхности V_m в K_n записываются в виде [9]

$$\Omega_0^\alpha = 0. \tag{20}$$

Трехкратное продолжение уравнений (20) с учетом соотношения (4) приводит к следующим дифференциальным уравнениям компонент полей фундаментальных объектов второго $\{M_{ij}^\alpha\}$ и третьего $\{M_{ij}^\alpha, M_{ijk}^\alpha\}$ порядков $V_m \subset K_n$:

$$\begin{gathered}\Omega_i^\alpha = M_{ij}^\alpha \Omega_0^j, \quad M_{[ij]}^\alpha = 0,\\ \widetilde{\nabla} M_{ij}^\alpha = M_{ijk}^\alpha \Omega_0^k, \quad M_{i[jk]}^\alpha = \frac{1}{G} M_{i[j}^\alpha G_{k]0}, \quad M_{[ij]k}^\alpha = 0,\\ \widetilde{\nabla} M_{ijk}^\alpha + M_{k(i}^\alpha \Omega_{j)}^0 - M_{(ij}^\beta M_{k)s}^\alpha \Omega_\beta^s = M_{ijkl}^\alpha \Omega_0^l, \quad M_{ij[kl]}^\alpha = \frac{1}{G} M_{ij[k}^\alpha G_{l]0}.\end{gathered} \tag{21}$$

Совокупность функций $\{M_{ij}^\alpha\}$ образует симметричный тензор второго порядка, $\{M_{ij}^\alpha, M_{ijk}^\alpha\}$ — фундаментальный геометрический объект третьего порядка поверхности V_m.

Из уравнений (21) следует, что в дифференциальной окрестности точки $B_0 \in V_m$ ниже третьего порядка невозможно построить внутреннюю инвариантную нормализацию поверхности $V_m \subset K_n$. Ниже будет показано, что такую нормализацию возможно построить в третьей дифференциальной окрестности.

Отметим, что согласно работе Остиану [10] имеет место аналогия между геометрией m-мерной поверхности проективно-метрического пространства K_n и геометрией распределения m-мерных линейных элементов (см. п. 2) пространства K_n в той части, которая определяется последовательностью полей фундаментальных подобъектов $\{M_{ij}^\alpha\}, \{M_{ij}^\alpha, M_{ijk_1}^\alpha\}, \ldots, \{M_{ij}^\alpha, M_{ijk_1}^\alpha, \ldots, M_{ijk_1\ldots k_s}^\alpha\}$ распределения $\Im$.

В силу последнего утверждения уравнения неподвижности абсолюта Q_{n-1} (см. (5)) и уравнения тензоров c^{ij}, $A_{\alpha\beta}$, b^α, b_α в репере $R' = \{B_{\overline{K}}\}$ первого порядка будут иметь вид (9), (10), (13) соответственно, с той лишь разницей, что для поверхности $V_m \subset K_n$ дополнительно выполняются еще и уравнения (20). Отметим, что на поверхности $V_m \subset K_n$ ($m < n-1$) b_α и b^α являются тензорами второго порядка.

Пусть $m < n-1$, т. е. поверхность V_m в K_n отлична от гиперповерхности. Инвариантная гиперплоскость ξ_0, уравнение которой в репере $R' = \{B_{\overline{K}}\}$ первого порядка имеет вид $b_\alpha y^\alpha = 0$, в каждой точке $B_0 \in V_m$ содержит касательную плоскость $T_m(B_0)$ поверхности V_m. Следовательно, m-мерная поверхность $V_m \subset K_n$ во второй дифференциальной окрестности внутренним образом порождает инвариантно присоединенную к ней гиперполосу $H(V_m)$, для которой данная поверхность является базисной [11].

Аналогично п. 2 предположим, что $B_n \notin \xi_0$; последнее равносильно тому, что $b_n \neq 0$. Очевидно, точки $A_u = B_u - \frac{b_u}{b_n} B_n$ находятся в общем положении и лежат в гиперплоскости ξ_0, где $\xi_0 = [B_0, B_i, A_u]$.

Инфинитезимальные перемещения репера $R = \{A_{\overline{K}}\}$ (см. п. 2) второго порядка ($A_0 = B_0$, $A_i = B_i$, $A_u = B_u - \frac{b_u}{b_n} B_n$, $A_n = B_n$) определяются уравнениями (14).

Связь между формами $\Omega_{\overline{I}}^{\overline{K}}$ и $\omega_{\overline{I}}^{\overline{K}}$ имеет вид (15). Здесь следует учесть, что для поверхности $V_m \subset K_n$ справедливы уравнения (20).

Известно [1], [12], что относительно репера $R = \{A_{\overline{K}}\}$ второго порядка уравнения гиперполосы $H(V_m)$, ассоциированной с поверхностью V_m, запишутся в виде

$$\omega_0^\alpha = 0, \quad \omega_i^n = \Lambda_{ij}^n \omega_0^j, \quad \omega_i^v = \Lambda_{ij}^v \omega_0^j, \quad \omega_u^n = \Lambda_{uj}^n \omega_0^j.$$

Аналогично п. 2 в предположении $\Lambda = |\Lambda_{ij}^n| \neq 0$ возможна частичная канонизация репера $R = \{A_{\overline{K}}\}$, имеющая следующую геометрическую характеристику [1]: вершины A_α выбраны таким образом, чтобы $(n-m)$-мерная плоскость $[A_0, A_\alpha]$ пересекала гиперплоскость ξ_0 по ее характеристике $\Pi_{n-m-1}(A_0)$, т. е. $A_v \in \Pi_{n-m-1}(A_0)$. В полученном репере третьего порядка $R = \{A_{\overline{K}}\}$ уравнения гиперполосы $H(V_M)$, ассоциированной с поверхностью V_m, примут вид [1], [13]

$$\begin{gathered}\omega_0^\alpha = \omega_v^n = 0, \quad \omega_i^n = \Lambda_{ij}^n \omega_0^j, \quad \omega_i^v = \Lambda_{ij}^v \omega_0^j, \\ \omega_u^i = N_{uj}^i \omega_0^j, \quad \Lambda_{[ij]}^n = \Lambda_{[ij]}^u = 0, \quad \Lambda_{s[i}^n N_{|v|j]}^s = 0,\end{gathered} \tag{22}$$

где

$$\Lambda_{ij}^n = \frac{1}{b_n} b_\alpha M_{ij}^\alpha, \quad \Lambda_{ij}^u = M_{ij}^u, \quad \Lambda_{us}^n = \frac{1}{(b_n)^2}(b_u b_{ns} - b_n b_{us}).$$

Здесь функции Λ_{ij}^n, Λ_{ij}^v относятся к дифференциальной окрестности второго порядка, а функции N_{vj}^i — к дифференциальной окрестности четвертого порядка текущей точки поверхности V_m.

Теорема 2. *Поверхность $V_m \subset K_n$ $(m < n-1)$ в дифференциальной окрестности второго порядка порождает инвариантно присоединенную к ней гиперполосу $H(V_m)$, для которой данная поверхность является базисной. Гиперполоса $H(V_m)$ регулярна тогда и только тогда, когда невырожден тензор $b_\alpha M_{ij}^\alpha$ второго порядка. Уравнения регулярной гиперполосы $H(V_m)$ в репере третьего порядка $R = \{A_{\overline{K}}\}$ имеют вид* (22).

Уравнения (9) неподвижности абсолюта Q_{n-1} проективно-метрического пространства K_n с учетом соотношений (15) и уравнений (20), (22) перепишутся, в частности, в виде

$$\begin{gathered} dG_{i0} - G_{j0}\omega_i^j - G\omega_i^0 = (\dots)_{is}\omega_0^s, \\ \nabla c_{iu} - c_{iw}\left(\frac{b_u}{b_n}\right)\omega_n^w - c_{is}\left(\frac{b_u}{b_n}\right)\omega_n^s - c_{in}\Omega_u^n = (\dots)_{ius}\omega_0^s, \\ \nabla c_{in} - \left\{c_{iw} - c_{in}\left(\frac{b_w}{b_n}\right)\right\}\omega_n^w - c_{is}\omega_n^s = (\dots)_{ins}\omega_0^s. \end{gathered} \tag{23}$$

Отметим, что выражение (4) с использованием (15), (20) запишется в виде

$$\omega_0^0 = -\frac{G_{0s}}{G}\omega_0^s. \tag{24}$$

Продолжая уравнения (22), с учетом выражений (24) имеем

$$\nabla\Lambda_{ij}^n = \Lambda_{ijk}^n\omega_0^k, \quad \Lambda_{i[jk]}^n = \frac{1}{G}\Lambda_{i[j}^n G_{k]0}, \tag{25}$$

$$\nabla\Lambda_{ij}^u + \Lambda_{ij}^n\omega_n^u = \Lambda_{ijk}^u\omega_0^k, \quad \Lambda_{i[jk]}^u = \frac{1}{G}\Lambda_{i[j}^u G_{k]0}, \tag{26}$$

$$\nabla N_{uj}^i - \delta_j^i\omega_u^0 = N_{ujk}^i\omega_0^k, \quad N_{u[jk]}^i = \frac{1}{G}N_{u[j}^i G_{k]0}, \tag{27}$$

$$\begin{gathered}\nabla\Lambda_{ijk}^n + \Lambda_{k(i}^n\omega_{j)}^0 - \Lambda_{(ij}^n\Lambda_{k)s}^n\omega_n^s = \Lambda_{ijks}^n\omega_0^s, \\ \Lambda_{ij[ks]}^n = \Lambda_{il}^n\Lambda_{j[k}^w N_{|w|s]}^l + \Lambda_{jl}^n\Lambda_{i[k}^w N_{|w|s]}^l - \frac{2}{G}\Lambda_{ij[k}^n G_{s]0}.\end{gathered} \tag{28}$$

В силу невырожденности тензора $\Lambda_{ij}^n : \Lambda = |\Lambda_{ij}^n| \neq 0$ можно ввести обращенный тензор Λ_n^{ij} второго порядка:

$$\Lambda_n^{ik}\Lambda_{kj}^n = \delta_j^i, \quad \nabla\Lambda_n^{ij} = -\Lambda_n^{is}\Lambda_n^{tj}\Lambda_{stl}^n\omega_0^l. \tag{29}$$

Функция Λ есть относительный инвариант второго порядка гиперполосы $H(V_m)$:

$$d\ln\Lambda - 2\omega_k^k + m\omega_n^n = \Lambda_l\omega_0^l, \quad \Lambda_l = \Lambda_n^{ji}\Lambda_{ijl}^n.$$

Продолжая последнее уравнение, имеем

$$\nabla\Lambda_i + 2\omega_i^0 - (m+2)\Lambda_{ij}^n\omega_n^j = \Lambda_{ij}\omega_0^j, \quad \Lambda_{[ij]} = 2\Lambda_{s[i}^u N_{|u|j]}^s + \frac{1}{G}\Lambda_{[i}G_{j]0}. \tag{30}$$

В дифференциальных окрестностях второго и четвертого порядков строим поля квазитензоров a_n^u и a_u:

$$a_n^u = \frac{1}{m}\Lambda_{ij}^u\Lambda_n^{ij}, \quad a_u = \frac{1}{m}N_{ui}^i,$$

компоненты которых в силу (25)–(27), (29) удовлетворяют дифференциальным уравнениям

$$\nabla a_n^u + \omega_n^u = a_{ns}^u\omega_0^s, \quad \nabla a_u - \omega_u^0 = \widetilde{a}_{us}\omega_0^s. \tag{31}$$

Уравнения (10) в силу (15), (20), (22) перепишутся в виде

$$\nabla c^{ij} = (\dots)_s^{ij}\omega_0^s. \tag{32}$$

Используя уравнения (13), с учетом (15), (20), (22) имеем

$$d\left(\frac{b_u}{b_n}\right) - \left(\frac{b_w}{b_n}\right)\omega_u^w + \left(\frac{b_u}{b_n}\right)\omega_n^n - \left(\frac{b_u b_w}{(b_n)^2}\right)\omega_n^w - \Omega_u^n = (\dots)_{us}^n\omega_0^s. \tag{33}$$

4. Регулярная гиперполоса $H(V_m)$ называется оснащенной в смысле Нордена–Чакмазяна [3], [14], если заданы два поля квазитензоров [7]:

$$\nabla\nu_n^i + \omega_n^i = \nu_{nj}^i\omega_0^j, \quad \nabla\nu_i + \omega_i^0 = \nu_{ij}\omega_0^j, \tag{34}$$

определяющих соответственно поля нормалей первого и второго родов на данном подмногообразии.

Согласно уравнениям (23), (25), (29)–(33) в третьей дифференциальной окрестности внутренним образом определяются поля нормалей первого и второго родов гиперполосы $H(V_m)$:

$$P_n^i \stackrel{\text{def}}{=} -\frac{1}{m+2}\Lambda_n^{ik}\left(\Lambda_k + \frac{2G_{k0}}{G}\right), \tag{35_a}$$

$$P_i \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2}\left(\Lambda_i - (m+2)\Lambda_{ij}^n c^{jk}\left[c_{kn} + \left\{c_{kw} - c_{kn}\left(\frac{b_w}{b_n}\right)\right\}a_n^w\right]\right). \tag{35_b}$$

Итак, справедлива

Теорема 3. *Внутренним образом определенная инвариантная нормализация гиперполосы $H(V_m)$, а значит, и внутренняя инвариантная нормализация ее базисной поверхности $V_m \subset K_n$ $(m < n-1)$ определяются в третьей дифференциальной окрестности текущей точки $A_0 \in V_m$ полями квазитензоров* (35).

5. Говорят, что гиперполоса $H(V_m)$ оснащена в смысле Э. Картана [15], если в каждой точке A_0, принадлежащей ее базисной поверхности V_m, поставлена в соответствие плоскость $N_{n-m-1}(A_0)$ размерности $(n-m-1)$, не имеющая общих точек с касательной плоскостью $T_m(A_0)$ к поверхности V_m. Плоскость $N_{n-m-1}(A_0)$ в каждой точке $A_0 \in V_m$ можно задать точками

$$M_u = \nu_u A_0 + A_u; \quad M_n = \nu_n A_0 + \nu_n^i A_i + \nu_n^u A_u.$$

Функции, входящие в последние соотношения, удовлетворяют уравнениям [1], [7]

$$\nabla\nu_u + \omega_u^0 = \nu_{uj}\omega_0^j, \quad \nabla\nu_n + \nu_n^i\omega_i^0 + \nu_n^u\omega_u^0 + \omega_n^0 = \nu_{nj}\omega_0^j,$$
$$\nabla\nu_n^u + \omega_n^u = \nu_{nj}^u\omega_0^j, \quad \nabla\nu_n^i + \omega_n^i = \nu_{nj}^i\omega_0^j.$$

Итак, оснащение в смысле Э. Картана гиперполосы $H(V_m)$ равносильно заданию полей геометрических объектов $\{\nu_n^i\}$, $\{\nu_n^i, \nu_n^u, \nu_n\}$, $\{\nu_u\}$, $\{\nu_n^u\}$.

Из уравнений (25)–(28) следует, что внутреннее инвариантное оснащение в смысле Э. Картана гиперполосы $H(V_M)$ в K_n $(m < n-1)$, а следовательно, и ее базисной поверхности V_m невозможно построить в дифференциальной окрестности порядка ниже четвертого. Покажем, что такое оснащение внутренним образом возможно построить в четвертой дифференциальной окрестности точки $A_0 \in V_m$.

Продолжая уравнения (34), с учетом (24) имеем

$$\nabla_\delta \nu^i_{nj} + \Lambda^n_{kj}\nu^{(k}_n\pi^{i)}_n - \delta^i_j(\nu^k_n\pi^0_k + \pi^0_n) - N^i_{uj}\pi^u_n = 0.$$

В качестве оснащающих полей геометрических объектов $\{\nu^i_n\}$, $\{\nu^u_n\}$, $\{\nu^i_n, \nu^u_n, \nu_n\}$, $\{\nu_u\}$ по аналогии с [1], [7] берем

$$\nu^u_n \overset{\text{def}}{=} a^u_n, \quad \nu_u \overset{\text{def}}{=} -a_u, \quad \nu_n \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{m}(\nu^j_{nj} - \Lambda^n_{kj}\nu^k_n\nu^j_n) - a^u_n a_u, \tag{36}$$

а в качестве функций $\{\nu^i_n\}$ — квазитензор P^i_n третьего порядка (35_a).

Таким образом, имеет место

Теорема 4. *Внутреннее инвариантное оснащение в смысле Э. Картана гиперполосы $H(V_m)$ в K_n (а значит, и ее базисной поверхности $V_m \subset K_n$ $(m > n-1)$) строится в четвертой дифференциальной окрестности текущей точки A_0 поверхности V_m полями объектов* (36)*, где $\nu^i_n = P^i_n$.*

Из теорем 3 и 4 непосредственно следует

Теорема 5. *Фундаментальный геометрический объект не ниже пятого порядка поверхности V_m, не принадлежащей абсолюту проективно-метрического пространства K_n $(n < m-1)$, является полным.*

6. Известно [1], [12], что порядок полного внутреннего фундаментального объекта поверхности V_m проективного пространства P_n $(2 < m < n-1)$ не превосходит шести. В [1], [12] при доказательстве данного утверждения имеется в виду, что главный фундаментальный тензор Λ^n_{ij} гиперполосы $H(V_m)$, ассоциированной с поверхностью $V_m \subset P_n$ $(2 < m < n-1)$, определяется в третьей дифференциальной окрестности текущей точки $A_0 \in V_m$; из [16] следует, что порядок этого геометрического объекта не ниже пяти.

Отметим, что в случае поверхности частного класса, а именно, поверхности Картана $V_m \subset P_{2m}$, $m > 2$, доказано [17], что ее фундаментальный геометрический объект пятого порядка является полным.

Так как для гиперполосы $H(V_m)$, ассоциированной с поверхностью $V_m \subset K_n$ $(m < n-1)$, ее главный фундаментальный тензор Λ^n_{ij} относится ко второй дифференциальной окрестности точки $A_0 \in V_m$ (см. (28)), то, следуя схеме доказательства полноты фундаментального геометрического объекта регулярной гиперполосы (доказательство приведено, напр., в [1]), заключаем, что справедлива

Теорема 6. *Порядок полного внутреннего фундаментального объекта поверхности V_m, не принадлежащей абсолюту проективно-метрического пространства K_n $(n < m-1)$, не превосходит пяти.*

В силу теорем 5 и 6 справедлива

Теорема 7. *Порядок полного внутреннего фундаментального объекта поверхности V_m, не принадлежащей абсолюту проективно-метрического пространства K_n $(n < m-1)$, равен пяти.*

В случае регулярности гиперполосы $H(V_m)$ в K_n, ассоциированной с поверхностью $V_m \subset K_n$ $(m < n-1)$, справедливы результаты, полученные в [1] для гиперполосы, погруженной в проективное пространство P_n. Перечислим основные из них (применительно к поверхности $V_m \subset K_n$).

1. Инвариантное присоединение регулярной гиперполосы $H(V_m)$ к поверхности $V_m \subset K_n$ позволяет построить двойственную теорию [1] многообразия V_m.

2. В дифференциальной окрестности четвертого порядка в каждой точке A_0 поверхности $V_m \subset K_n$ имеем канонический пучок инвариантных нормалей первого рода. Из этого пучка выделяются, в частности, нормаль Фубини, директриса Вильчинского и т. д.

Используя двойственную теорию гиперполосы, нетрудно получить поле пучка нормалей второго рода поверхности $V_m \subset K_n$.

3. В дифференциальной окрестности четвертого порядка точки $A_0 \in V_m$ имеем поле инвариантных соприкасающихся гиперквадрик Q^2_{n-1} гиперполосы $H(V_m)$ (а следовательно, и ее базисной поверхности V_m), относительно которых касательная плоскость $T_m(A_0)$ и характеристика $\Pi_{n-m-1}(A_0)$ полярно сопряжены.

Используя инвариантное условие квадратичности гиперполосы $H(V_m)$ в P_n $(m < n-1)$ (см. [1], [18]), нетрудно найти критерий принадлежности поверхности V_m неподвижной гиперквадрике Q^2_{n-1}.

4. Инвариантное присоединение регулярной гиперполосы $H(V_m)$ к $V_m \subset K_n$ позволяет изучать на поверхности V_m:

а) две двойственные аффинные связности без кручения, индуцируемые нормализацией H_m в смысле Нордена–Чакмазяна, а также индуцируемые при этом двойственные нормальные связности $\overset{1}{D}$ и $\overset{2}{D}$ и их подсвязности, также двойственные между собой (см. [1]);

б) две двойственные проективные связности без кручения, индуцируемые [1] оснащением поверхности в смысле Картана.

Литература

1. Столяров А.В. *Двойственная теория оснащенных многообразий.* – Чебоксары, 1994. – 290 с.
2. Фиников С.П. *Метод внешних форм Картана в дифференциальной геометрии.* – М.-Л.: ГИТТЛ, 1948. – 432 с.
3. Норден А.П. *Пространства аффинной связности.* – М.: Наука, 1976. – 432 с.
4. Столяров А.В. *Внутренняя геометрия проективно-метрического пространства* // Дифференц. геометрия многообразий фигур. – Изд-во Калинингр. ун-та. – 2001. – Вып. 32. – С. 94–101.
5. Лаптев Г.Ф. *Дифференциальная геометрия погруженных многообразий* // Тр. Матем. о-ва. – М., 1953. – Т. 2. – С. 275–382.
6. Лаптев Г.Ф., Остиану Н.М. *Распределения m-мерных линейных элементов в пространстве проективной связности.* I // Тр. Геометрич. семин. ВИНИТИ, – 1971. – Т. 3. – С. 49–94.
7. Столяров А.В. *Проективно-дифференциальная геометрия регулярного гиперполосного распределения m-мерных линейных элементов* // Итоги науки техники. Пробл. геометрии. – М.: ВИНИТИ, 1975. – Т. 7. – С. 117–151.
8. Остиану Н.М. *О канонизации подвижного репера погруженного многообразия* // Rev. math. pures et appl. – 1962. – V. 7. – № 2. – P. 231–240.
9. Лаптев Г.Ф. *Дифференциальная геометрия многомерных поверхностей* // Итоги науки и техн. Геометрия. – М.: ВИНИТИ, 1965. – С. 5–64.
10. Остиану Н.М. *Распределения m-мерных линейных элементов в пространстве проективной связности.* II // Тр. Геометрич. семин. ВИНИТИ. – 1971. – Т. 3. – С. 95–114.
11. Вагнер В.В. *Теория поля локальных гиперполос* // Тр. семин. по векторн. и тензорн. анализу. – М: Изд-во МГУ. – 1950. – Вып. 8. – С. 197–272.
12. Столяров А.В. *Приложение теории регулярных гиперполос к изучению геометрии многомерных поверхностей проективного пространства* // Изв. вузов. Математика. – 1976. – № 2. – С. 111–113.
13. Столяров А.В. *О фундаментальных объектах регулярной гиперполосы* // Изв. вузов. Математика. – 1975. – № 10. – С. 97-99.

14. Чакмазян А.В. *Двойственная нормализация* // Докл. АН АрмССР. – 1959. – Т. 28. – № 4. – С. 151–157.
15. Cartan E. *Les espaces á connexion projective* // Тр. семин. по векторн. и тензорн. анализу. – М.: Изд-во МГУ. – 1937. – Вып. 4. – С. 147–159.
16. Остиану Н.М. *О геометрии многомерной поверхности проективного пространства* // Тр. Геометрич. семин. ВИНИТИ. – 1966. – Т. 1. – С. 239–263.
17. Столяров А.В. *О внутренней геометрии поверхности Картана* // Дифференц. геометрия многообразий фигур. – Изд-во Калинингр. ун-та. – 1976. – Вып. 7. – С. 111–118.
18. Столяров А.В. *Условие квадратичности регулярной гиперполосы* // Изв. вузов. Математика. – 1975. - № 11. – С. 106–108.

Чувашский государственный
педагогический университет

Поступила
22.04.2002