И З В Е С Т И Я   В Ы С Ш И Х   У Ч Е Б Н Ы Х   З А В Е Д Е Н И Й

2006 МАТЕМАТИКА № 5 (528)

УДК 517.987:519.2

А.В. ЧИСТЯКОВ

О КУСОЧНО-ИНЪЕКТИВНЫХ ИЗМЕРИМЫХ ОТОБРАЖЕНИЯХ

Кусочно инъективные отображения пространств с мерой образуют класс необратимых измеримых отображений, которые часто встречаются в различных приложениях теории меры. В качестве простейшего и самого наглядного примера отображений этого класса можно привести кусочно-монотонные отображения отрезка: эндоморфизм Гаусса, β-преобразование, логистическое отображение Дж. Неймана–Улама и др. Подобные отображения порождают необратимые динамические системы с нетривиальными эргодическими свойствами. Вне класса кусочно-инъективных отображений остаются только отображения весьма патологической метрической структуры, отражающей свойство предельно возможной степени необратимости — это отображения с континуальными прообразами точек, раздувающие множества меры нуль до множеств полной меры и потому не сохраняющие измеримость даже локально. Из результатов данной работы следует, что отсутствие любого из перечисленных выше свойств предельной необратимости полностью характеризует класс кусочно-инъективных отображений стандартных вероятностных пространств.

Цель работы состоит в доказательстве следующей характеристики кусочно-инъективных отображений: *среди всех измеримых отображений стандартных вероятностных пространств, сохраняющие множества меры нуль в сторону прообраза, кусочно-инъективные отображения — это в точности все измеримые отображения, обладающие N-свойством на множестве полной меры.*

Напомним, что по Лузину ([1], с. 149) измеримое отображение $\alpha : X \to Y$ вероятностных пространств X и Y соответственно с мерами μ и ν обладает N-свойством (“нуль-свойством”), если каково бы ни было множество $A \subset X$ μ-меры нуль значения $\alpha A = \{\alpha(x) : x \in A\}$ образуют множество ν-нулевой меры. N-свойство (и более сильное свойство нулевого изменения) использовались Лузиным для выделения из множества примитивных (неопределенных интегралов) тех из них, которые позволяли бы наилучшим образом представить функции тригонометрическими рядами. В частности, в [2] было показано, что для суммируемой на $[0,1]$ функции f неопределенный интеграл Лебега — это единственная примитивная, обладающая N-свойством. Более того, если функция f не интегрируема по Лебегу, то в семействе всех ее примитивных нет ни одной, обладающей N-свойством. Поэтому естественно воспользоваться N-свойством для расширения понятий неопределенного и определенного интегралов. Такие расширения актуальны прежде всего в теории рядов Фурье.

В свой диссертации Н.Н. Лузин поставил ряд задач о функциях, обладающих N-свойством. Обзор полученных результатов имеется в ([1], с. 423–432). Отметим только теорему С. Банаха: непрерывная функция, обладающая N-свойством обязательно имеет производную на множестве, мера которого положительна в каждом интервале. В отрицательном плане теорема была дополнена Н.К. Бари, доказавшей возможность построения функции с N-свойством, не имеющей производной во всякой точке заданного совершенного нигде не плотного множества. Из этих фактов весьма естественно следует предположение о том, что отображения, обладающие свойством N, должны быть достаточно близки к обратимым отображениям. Заметим, что свойство

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, гранты №№ 03-01-00255, 04-01-96016.

N, так же, как и свойство кусочной инъективности, не является метрически инвариантным. Действительно, пусть отображение $\alpha : X \to Y$ обладает N-свойством. Выберем множество $X_0 \subset X$ нулевой меры мощности континуум и отобразим это множество на всю возможную область значений Y некоторым отображением $\alpha_0 : X_0 \to Y$. Отображение

$$\widetilde{\alpha}(x) = \begin{cases} \alpha_0(x), & \text{если } x \in X_0; \\ \alpha(x), & \text{если } x \in X \setminus X_0, \end{cases}$$

μ-почти всюду совпадает с отображением α, но не обладает N-свойством. Метрически инвариантные определения кусочной инъективности и N-свойства даны в следующих разделах работы. Выраженные в метрически инвариантной форме, эти два совершенно различных свойства на самом деле оказываются эквивалентными. Доказательство эквивалентности в существенном основано на теореме Мазуркевича ([2], с. 235; [3], сс. 491, 500, теоремы 3, 5). По этой теореме каждое непрерывное отображение, определенное на борелевском множестве польского пространства, имеет не уменьшающее область значений взаимно однозначное измеримое сужение на коаналитическое множество. Напомним ([4], с. 34), что *польским* называется пространство, гомеоморфное полному сепарабельному метрическому пространству. Поэтому, если область значений — множество положительной меры, то ввиду N-свойства и область определения для сужения должна иметь положительную меру. Из рассуждения ясен топологический смысл условия Лузина: оно запрещает множествам нулевой меры становиться более массивными.

1. Определения и обозначения. Вспомогательные утверждения. В работе рассматриваются только измеримые отображения стандартных вероятностных пространств, сохраняющие множества меры нуль в сторону прообраза, т. е. индуцирующие σ-гомоморфизмы σ-алгебр измеримых множеств по модулю идеала множеств меры нуль. Такое ограничение согласуется с основным требованием теории меры: изучаемые объекты и свойства должны быть метрическими инвариантами, не зависящими от реализации вероятностного пространства и выбора множеств и отображений из классов метрической эквивалентности.

Для топологического пространства X через $\mathcal{B}(X)$ обозначается σ-алгебра его борелевских подмножеств (т. е. наименьшая σ-алгебра, содержащая все открытые множества пространства X). Если μ — регулярная борелевская мера на X, то пополнение $\mathcal{B}(X)$ по этой мере обозначается через $\mathcal{B}_\mu(X)$. Пространство с мерой $(X, \mathcal{A}, \mu)$ называется *стандартным* [4] (или *пространством Лебега* [5]), если оно метрически изоморфно польскому пространству с конечной борелевской мерой, положительной на непустых открытых подмножествах.

Пусть $(X, \mathcal{A}, \mu)$ — пространство с полной мерой и $A \subset X$ — измеримое множество положительной меры. Ограничение измеримой структуры $(X, \mathcal{A}, \mu)$ на A обозначается через $\mathcal{A}_A = \{\widetilde{A} \cap A : \widetilde{A} \in \mathcal{A}\}$ и $\mu_A = \mu_{|\mathcal{A}_A}$. Для стандартного пространства с мерой при любом измеримом множестве $A \in \mathcal{A}$ положительной меры пространство $(A, \mathcal{A}_A, \mu_A)$ также является стандартным ([5], с. 117; [6], с. 149). Если $\mu(X \setminus \widetilde{X}) = 0$, то измеримое множество $\widetilde{X} \in \mathcal{A}$ называется *множеством полной меры* в X. Семейство $\{A_i \in \mathcal{A}_A : i \in I\}$ называется *μ-исчерпывающим измеримое множество* $A \subset X$, если $\mu\Big(A \setminus \bigcup\limits_{i \in I} A_i\Big) = 0$. Подмножество $\mathcal{E} \subset \mathcal{A}$ называется *минорантным в компоненте* $\mathcal{A}_A = \mathcal{A} \cap A$, если каждое множество $A_1 \in \mathcal{A}_A$ положительной меры содержит множество $\widetilde{A}_1 \in \mathcal{E}$ положительной меры. В доказательствах неоднократно применяется фундаментальный

Принцип исчерпывания ([6], с. 66; [7], с. 111). Пусть $\mathcal{E}$ — подмножество σ-алгебры $\mathcal{A}$, минорантное в компоненте $\mathcal{A}_A$, где $A \in \mathcal{A}$ и $\mu A > 0$. Тогда найдется не более чем счетное дизъюнктное семейство $\{A_i \in \mathcal{E} : i \in I\}$, μ-исчерпывающее множество A.

Для свед́ения задач о свойствах измеримых отображений к аналогичным задачам для непрерывных отображений в работе используется теорема Лузина ([1], с. 65) в следующей форме.

Предложение 1. *Пусть $\alpha : X \to Y$ — $(\mathcal{B}_\mu(X), \mathcal{B}(Y))$-измеримое отображение польского пространства X с конечной борелевской мерой μ в польское пространство Y. Тогда для любого множества $\widetilde{X} \in \mathcal{A}$ положительной меры найдется μ-исчерпывающий множество $\widetilde{X}$ не более чем счетный дизъюнктный набор $\{\widetilde{X}_i \subset \widetilde{X} : i \in I\}$ замкнутых в X множеств положительной меры такой, что при всех $i \in I$ сужение $\alpha_{|\tilde{X}_i} : \widetilde{X} \to Y$ непрерывно.*

Доказательство. Обозначим через $\mathcal{A}$ σ-алгебру $\mathcal{B}_\mu(X)$. Пусть $\widetilde{X} \in \mathcal{A}$ и $\mu\widetilde{X} > 0$. Согласно принципу исчерпывания достаточно проверить, что множество

$$\mathcal{E} = \{\widetilde{A} \subset \widetilde{X} : \widetilde{A} \text{ замкнуто в } X \text{ и } \alpha_{|\tilde{A}} \text{ непрерывно}\}$$

является минорантным в компоненте $\mathcal{A}_{\tilde{X}} = \mathcal{A} \cap \widetilde{X}$.

Пусть $A \in \mathcal{A}_{\tilde{X}}$ и $\mu A > 0$. Так как борелевская мера μ регулярна, то найдется замкнутое в X подмножество $A_1 \subset A$ с $\mu A_1 > 0$. По теореме Лузина для измеримого отображения $\alpha_1 = \alpha_{|A_1} : A_1 \to Y$ при любом $\varepsilon > 0$ множество A_1 содержит замкнутое в A_1 (и, следовательно, в X) подмножество $\widetilde{A}_\varepsilon$ такое, что $\mu(A \setminus \widetilde{A}_\varepsilon) < \varepsilon$, и сужение $\alpha_{\tilde{A}_\varepsilon} : \widetilde{A}_\varepsilon \to Y$ непрерывно. Для определенности положим $\widetilde{A} = \widetilde{A}_\varepsilon$, где $\varepsilon = \frac{\mu A}{2}$.

Следствие 1 ([8], theorem 2.3, p. 335). Пусть $\alpha : X \to Y$ — $(\mathcal{B}_\mu(X), \mathcal{B}(Y))$-измеримое отображение польского пространства X с борелевской мерой μ в польское пространство Y. Тогда существует борелевское отображение $\widetilde{\alpha} : X \to Y$ такое, что $\widetilde{\alpha}(x) = \alpha(x)$ μ-почти всюду.

Действительно, пусть $\{\widetilde{X}_i \in \mathcal{A}_{\tilde{X}} : i \in I\}$ — дизъюнктный набор замкнутых подмножеств, существование которого утверждается в предложении 1. Множество $\widetilde{X} = \bigcup\limits_{i \in I} \widetilde{X}_i$ является множеством полной меры типа F_σ, а сужение $\alpha_{|\tilde{X}} : \widetilde{X} \to Y$ есть отображение первого класса Бэра ([3], с. 403). Выбрав произвольно точку $y_0 \in Y$, положим $\widetilde{\alpha}(x) = \alpha(x)$, если $x \in \widetilde{X}$; $\widetilde{\alpha}(x) = y_0$, если $x \notin \widetilde{X}$.

Определение 1. $(\mathcal{B}_\mu(X), \mathcal{B}(Y))$-измеримое отображение $\alpha : X \to Y$ будем называть *почти кусочно-инъективным*, если найдется не более чем счетный μ-исчерпывающий пространство X дизъюнктный набор $\{X_i \in \mathcal{B}_\mu(X) : i \in I\}$ измеримых множеств положительной меры такой, что при каждом $i \in I$ сужение $\alpha_{|X_i} : X_i \to Y$ инъективно.

Свойство почти кусочной инъективности является метрическим инвариантом: оно наследуется μ-эквивалентными отображениями и при метрически изоморфной замене области определения. Очевидным следствием кусочной инъективности является почти счетнократность отображения: существует множество полной меры, пересекающее прообраз каждой точки из области значений по (не более чем) счетному множеству. Согласно теореме Лузина ([2], с. 201; [3], с. 509) счетнократность непрерывного отображения польских пространств эквивалентна кусочной инъективности. Версией этого является

Теорема 1. *Отображение $\alpha : X \to Y$ почти кусочно-инъективно тогда и только тогда, когда существует множество $\widetilde{X} \subset X$ полной меры такое, что для всех $y \in Y$ множество $\alpha^{-1}\{y\} \cap \widetilde{X}$ конечно или счетно.*

Доказательство. 1) Пусть отображение $\alpha : X \to Y$ почти кусочно-инъективно и $\{\widetilde{X}_i \in \mathcal{A} : i \in I\}$ — исчерпывающий X дизъюнктный набор измеримых множеств с инъективными сужениями $\alpha_{|\tilde{X}_i}$. Положим $\widetilde{X} = \bigcup\limits_{i \in I} \widetilde{X}_i$. Ясно, что для каждого $y \in Y$ при $i \in I$ множество $(\alpha^{-1}y) \cap \widetilde{X}$ содержит не более одной точки. Поэтому из равенства

$$(\alpha^{-1}y) \cap \widetilde{X} = \bigcup_{i \in I} ((\alpha^{-1}y) \cap \widetilde{X}_i)$$

следует, что при всех $y \in Y$ пересечение $(\alpha^{-1}y) \cap \widetilde{X}$ не более чем счетно.

2) Обратно, пусть существует множество $\widetilde{X} \subset X$ полной меры такое, что для любого $y \in Y$ пересечение $(\alpha^{-1}y) \cap \widetilde{X} \subset X$ не более чем счетно. Почти кусочная инъективность измеримого отображения является метрически инвариантным свойством. Поэтому без ограничения общности полагаем, что X и Y — это польские пространства с борелевскими мерами. По предложению 1 существует исчерпывающий $\widetilde{X}$ и, следовательно, X — дизъюнктный набор $\{\widetilde{X}_i \in \mathcal{A} : i \in I\}$ замкнутых в X подмножеств $\widetilde{X}_i$ с непрерывными сужениями $\alpha_{|\tilde{X}_i}\widetilde{X}_i \to Y$. При каждом $i \in I$ ограничение $\alpha_{|\tilde{X}} : \widetilde{X}_i \to \widetilde{Y}_i = \alpha\widetilde{X}_i$ удовлетворяет условию цитированной выше теоремы Лузина: оно непрерывно, для всех $y \in \widetilde{Y}_i$ прообраз $\widetilde{\alpha}^{-1}y$ непуст и как подмножество счетного множества $\widetilde{X} \subset X$ более чем счетен. Согласно теореме найдется не более чем счетное семейство $\widetilde{X}_{ij} \subset \widetilde{X}_i : j \in J_i$ борелевских множеств такое, что $\widetilde{X}_i = \bigcup\limits_{j \in J_i} \widetilde{X}_{ij}$ и при всех $j \in J_i$ сужение $\alpha_{|\tilde{X}_{ij}}$ инъективно. Стандартным образом построим из этого семейства полный набор дизъюнктных компонент. Можно считать, что индексное множество J_i — отрезок натурального ряда (возможно, $J_i = \mathbb{N}$). Определяем последовательно попарно дизъюнктные компоненты разбиения X_{ij} множества $\widetilde{X}_i$ с инъективными сужениями $\alpha_{X_{ij}} : X_{i1} = \widetilde{X}_{i1}$, $X_{ij} = \widetilde{X}_{ij} \setminus \Big(\bigcup\limits_{k<j} \widetilde{X}_{ik}\Big)$ при $j > 1$. Собирая все построенные таким способом компоненты в одно множество, получаем исчерпывающий пространство X дизъюнктный набор измеримых множеств, на которых отображение α инъективно.

Переформулируем критерий в несколько иной форме. Для множества $\widetilde{X} \subset X$ и отображения $\alpha : X \to Y$ формулой

$$F_{\tilde{X}}(A) = \alpha^{-1}(\alpha A) \cap \widetilde{X} \quad (A \subset X)$$

определим многозначное отображение $F_{\tilde{X}} : 2^X \to 2^X$. По теореме 1 отображение $\alpha : X \to Y$ кусочно-инъективно в том и только том случае, если для некоторого множества $\widetilde{X} \subset X$ полной меры множество $F_{\tilde{X}}(A)$ счетно при каждом счетном множестве $A \subset X$. Иначе говоря, отображение α сохраняет малость множеств, если под словом “малость” понимается счетность. Оказывается, что если под малостью множества будем понимать его пренебрежимость (нулевую меру), то соответствующее утверждение окажется верным.

2. Кусочная инъективность и N-свойство Лузина. По своему смыслу определяемое ниже свойство N в точности соответствует классическому свойству N Лузина.

Определение 2. Будем говорить, что $(\mathcal{B}_\mu(X), \mathcal{B}(Y))$-измеримое отображение $\alpha : X \to Y$ обладает N-*свойством* (“нуль-свойством”), если для любого множества $A \subset X$ меры нуль мера множества $\alpha^{-1}(\alpha A)$ равна нулю.

Сформулируем основной результат статьи.

Теорема 2. *$(\mathcal{B}_\mu(X), \mathcal{B}(Y))$-измеримое отображение $\alpha : X \to Y$ почти кусочно-инъективно тогда и только тогда, когда существует множество $\widetilde{X} \subset X$ полной меры такое, что сужение $\alpha_{|\tilde{X}}$ обладает N-свойством.*

Иными словами, отображение α почти кусочно-инъективно в том и только том случае, если при некотором множестве $\widetilde{X} \subset X$ полной меры определенное выше многозначное отображение $F_{\tilde{X}} : 2^X \to 2^X$ переводит множества меры нуль в множества нулевой меры (т. е. сохраняет идеал μ-пренебрежимых множеств).

Формулой

$$\alpha^*\mu : B \longmapsto \mu(\alpha^{-1}B) \quad (B \in \mathcal{B}(Y))$$

на Y определяется вероятностная борелевская мера $\nu = \alpha^*\mu$. Эта мера стандартно продолжается на лебеговскую алгебру $\mathcal{B} = \mathcal{B}_\nu(Y)$. По определению меры ν отображение $\alpha : X \to Y$ сохраняет идеал множеств нулевой меры в сторону прообраза:

$$\textit{если } B \in Y \textit{ и } \nu(B) = 0, \textit{ то } \mu(\alpha^{-1}B) = 0. \qquad (N^{-1})$$

Несложно убедиться в эквивалентности теоремы 2 следующему (на первый взгляд, более общему) утверждению.

Теорема 2′. *Измеримое отображение $\alpha : X \to Y$, удовлетворяющее условию (N^{-1}), почти кусочно-инъективно в том и только том случае, если существует множество $\widetilde{X} \subset X$ полной меры такое, что сужение $\alpha_{|\tilde{X}} : \widetilde{X} \to Y$ обладает N-свойством.*

Смысл условия (N^{-1}) вполне прозрачен: индуцированная отображением α мера $\alpha^*\mu$ абсолютно непрерывна относительно меры ν. Поэтому в эргодической теории это условие принято называть несингулярностью меры ν относительно отображения α^{-1}. Только при условии (N^{-1}) происходит согласование классов эквивалентности: прообразы ν-эквивалентных измеримых множеств μ-эквивалентны ([9], с. 706). Условие (N^{-1}) инвариантно относительно изменений значений отображения α на множествах нулевой меры и при замене пространств X и Y метрически изоморфными ([5], с. 113).

Доказательство теоремы 2′. Через $\mathcal{A}$ обозначим σ-алгебру $\mathcal{B}_\mu(X)$.

1) Пусть отображение $\alpha : X \to Y$, удовлетворяющее условию (N^{-1}), почти кусочно-инъективно. Зафиксируем не более чем счетный μ-исчерпывающий X дизъюнктный набор множеств $A_i \in \mathcal{A}$ с $\mu A_i > 0$ $(i \in I)$ такой, что при всех i отображение $\alpha_i = \alpha_{|X_i} : X_i \to Y$ инъективно.

Без ограничения общности индекс i можно опустить. В силу следствия 1 существует множество $X_1 \subset X$ типа F_σ полной меры такое, что сужение $\alpha_{|X_1} : X_1 \to Y$ является отображением первого класса Бэра ([3], с. 403). Инъективный образ $Y_1 := \alpha X_1$ борелевского множества X_1 есть борелевское подмножество пространства Y ([3], с. 499). Согласно теореме Лебега–Суслина–Лузина ([3], с. 500, теорема 3) отображение $\alpha_1^{-1} : Y_1 \to X_1$, обратное к ограничению $\alpha_1 = \alpha_{|X_1} : X_1 \to Y_1$, является борелевским.

Положим $\widetilde{Y}_1 = Y_1$ и $\widetilde{X}_1 = X_1$. Образуем семейство

$$\mathcal{B}_s(\widetilde{Y}_1) = \{B \in \mathcal{B}_{\tilde{Y}_1} : \nu B > 0 \text{ и } \mu(\alpha^{-1}B) = 0\}.$$

Предположим, что $\mathcal{B}_s(\widetilde{Y}_1) \neq \emptyset$. Объединение $B_I = \cup\{B_i \in \mathcal{B}_s(\widetilde{Y}_1) : i \in I\}$ множеств любого не более чем счетного подмножества семейства $\mathcal{B}_s(\widetilde{Y}_1)$ является элементом этого семейства. Отсюда следует, что в семействе $\mathcal{B}_s(\widetilde{Y}_1)$ найдется множество B_1 максимальной меры. Положим $\widetilde{Y}_2 = Y_1 \setminus B_1$ и $\widetilde{X}_2 = X_1 \setminus (\alpha^{-1}B_1)$.

Если $\mathcal{B}_s(\widetilde{Y}_2) \neq \emptyset$, то, следуя описанной выше схеме, найдем множество $B_2 \in \mathcal{B}_s(\widetilde{Y}_2)$ максимальной меры, определим множества $\widetilde{Y}_3 = Y_2 \setminus B_2$ и $\widetilde{X}_3 = X_2 \setminus (\alpha^{-1}B_2)$ и продолжим процесс. Так как $\nu B_1 \geq \nu B_2 \geq 0$ и $\nu B_n > 0$, то семейства $\mathcal{B}_s(\widetilde{Y}_n)$ $(n = 1, 2, \dots)$ образуют не более чем счетную убывающую последовательность с пустым пересечением. Положим $\widetilde{Y} = \bigcap\limits_n \widetilde{Y}_n$ и $\widetilde{X} = \bigcap\limits_n \widetilde{X}_n$. По построению $\mu(X \setminus \widetilde{X}) = 0$ и $\mathcal{B}_s(\widetilde{Y}) = \emptyset$. Множество A с $\mu A = 0$ содержится в некотором множестве $\widetilde{A}$ типа G_δ нулевой меры: $A \subset \widetilde{A}$ и $\mu\widetilde{A} = 0$. Так как $\mathcal{B}_s(\widetilde{Y}) = \emptyset$, то мера борелевского множества $\widetilde{B} = \alpha\widetilde{A}$ равна нулю. Из включения $\alpha A \subset \alpha\widetilde{A}$ следует $\nu(\alpha A) = 0$. Таким образом, отображение $\widetilde{\alpha} : \alpha_{|\tilde{X}} \to \widetilde{Y}$ обладает N-свойством.

2) Пусть на множестве $\widetilde{X} \subset X$ полной меры отображение $\alpha : X \to Y$ обладает свойством N. Покажем, что множество $\mathcal{E} = \{\mathcal{A} \in \mathcal{A}_{\tilde{X}} : \alpha_{\tilde{A}} : \widetilde{A} \to Y \text{ инъективно}\}$ является минорантным в σ-алгебре $\mathcal{A}$.

Пусть $A \in \mathcal{A}$ и $\mu A > 0$. В силу предложения 1 найдется замкнутое в X множество $A_1 \subset A \cap \widetilde{X}$ такое, что $\mu A_1 > 0$ и сужение $\alpha_{|A_1} : A_1 \to Y$ непрерывно. Множество $\widetilde{B} = \alpha A_1$ как непрерывный образ польского пространства A_1 является аналитическим подмножеством пространства Y и потому множество $\widetilde{B}$ ν-измеримо ([3], с. 493).

Так как $\mu A_1 > 0$, то из свойства N следует $\nu\widetilde{B} > 0$. Ограничение $\alpha_1 = \alpha_{A_1} : A_1 \to \widetilde{B}$ отображения α удовлетворяет условию теоремы Мазуркевича ([2], с. 235; [3], сс. 491, 500, теоремы 3, 5). По этой теореме существует множество $\widetilde{A} \subset A_1$, дополнение к которому является аналитическим множеством, и такое, что $\alpha_1\widetilde{A} = \alpha\widetilde{A} = \widetilde{B}$ и сужение $\alpha_{1|\tilde{A}} : \widetilde{A} \to \widetilde{B}$ взаимно однозначно. По построению на множестве $\widetilde{X}$ отображение $\alpha : X \to Y$ обладает свойством N. Следовательно, $\mu\widetilde{A} > 0$.

Согласно принципу исчерпывания существует исчерпывающий пространство X не более чем счетный дизъюнктный набор $\{X_i \in \mathcal{A} : i \in I\}$ такой, что каждое сужение $\alpha_{|X_i}$ — инъективное отображение.

Тема статьи возникла в беседах с А.В. Поносовым и Ю.В. Непомнящих. Автор искренне благодарит их, а также И.В. Шрагина за проявленный интерес и чрезвычайно содержательные обсуждения.

Литература

1. Лузин Н.Н. *Интеграл и тригонометрический ряд.* – М.: Изд-во АН СССР, 1958.
2. Лузин Н.Н. *Лекции об аналитических множествах и их приложениях.* Собр. соч. Т. 2. *Дескриптивная теория множеств.* – М.: Изд-во АН СССР, 1958. – С. 9–617.
3. Куратовский К. *Топология.* Т. 1. – М.: Мир, 1966. – 595 с.
4. Мартин Н., Ингленд Дж. *Математическая теория энтропии.* – М.: Мир, 1988. – 350 с.
5. Рохлин В.А. *Об основных понятиях теории меры* // Матем. сб. – 1949. – Т. 25. – С. 107–150.
6. Самородницкий А.А. *Теория меры.* – Л.: Изд-во ЛГУ, 1990. – 267 с.
7. Владимиров Д.А. *Булевы алгебры.* – М.: Наука, 1969. – 318 с.
8. Kalton N.J. *The endomorphisms of* L^p $(0 \le p \le 1)$ // Indiana Univ. Math. J. – 1978. – V. 27. – P. 353–380.
9. Данфорд Н., Шварц Дж. *Линейные операторы. Общая теория.* – М.: Ин. лит., 1962. – 897 с.

Удмуртский государственный университет

Поступила
17.06.2004