ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1999 МАТЕМАТИКА № 2 (441)

УДК 517.934

В.А. ЗАЙЦЕВ, Е.Л. ТОНКОВ

ДОСТИЖИМОСТЬ, СОГЛАСОВАННОСТЬ И МЕТОД ПОВОРОТОВ В.М. МИЛЛИОНЩИКОВА

Здесь исследуются условия, при которых существует принципиальная возможность построения управления, создающего "хорошее окружение" тривиальному решению уравнения

$$\dot{x} = v_0(t,x) + u_1 v_1(t,x) + \cdots + u_r v_r(t,x), \quad (t,x) \in \mathbb{R}^{1+n}, \tag{1}$$

где $u \doteq (u_1, \dots, u_r) \in U$, $0 \in U$. Пусть, например, требуется построить такое управление $u(t) \in U$, что уравнение (1) структурно устойчиво (в окрестности нуля). Оказывается, что эта задача разрешима, если линейное уравнение

$$\dot{x} = A_0(t)x + u_1 A_1(t)x + \cdots + u_r A_r(t)x, \quad (t,x) \in \mathbb{R}^{1+n}, \tag{2}$$

где $A_i(t) = \partial v_i(t,0)/\partial x$, равномерно локально достижимо или равномерно согласованно (см. ниже теорему 1 и следствие 1). Показано также, что свойства равномерной достижимости и согласованности тесно связаны с так называемым "методом поворотов" В.М. Миллионщикова, применявшимся при исследовании поведения показателей Ляпунова при малых возмущениях параметров уравнения.

1. Обозначения и определения

Пусть $\mathbb{R}^n$ — евклидово пространство размерности n, $|x| = \sqrt{x^* x}$ — норма в $\mathbb{R}^n$ ($*$ — операция транспонирования). Если не оговорено другое, векторы-столбцы обозначаются латинскими буквами, векторы-строки — греческими (таким образом, запись ξx означает скалярное произведение векторов ξ и x); $\mathcal{O}^n_\varepsilon(x) = \{y \in \mathbb{R}^n : |y - x| \le \varepsilon\}$, $\mathcal{O}^n_\varepsilon = \mathcal{O}^n_\varepsilon(0)$, $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1\}$. Для произвольного множества $D \subset \mathbb{R}^n$ через $\overline{D}$ обозначим замыкание, $\operatorname{int} D$ — внутренность, $\mathcal{O}^n_\varepsilon(D)$ — ε-окрестность, $\xi \to c(\xi, D)$ — опорную функцию ([1], гл. 2, § 12) множества D.

Пространство $M_{n,m}$ линейных операторов из $\mathbb{R}^m$ в $\mathbb{R}^n$ будем отождествлять с пространством матриц размерности $n \times m$ (если $n = m$, то пишем M_n); $|A| = \max\{|Ax| : |x| = 1\}$ — норма в $M_{n,m}$. Для $Q \in M_{n,m}$ обозначим $\mathcal{B}_\varepsilon(Q) = \{H \in M_{n,m} : |H - Q| \le \varepsilon\}$, $\mathcal{B}_\varepsilon = \mathcal{B}_\varepsilon(0)$ (индексы m и n в обозначении $\mathcal{B}_\varepsilon(Q)$ опускаем, если ясно, о каком пространстве идет речь).

Введем топологическую динамическую систему (Ω, f^t) (Ω — полное метрическое сепарабельное пространство, f^t — поток на Ω, т. е. однопараметрическая группа преобразований Ω в себя, непрерывная по $(t,\omega) \in \mathbb{R} \times \Omega$). Обозначим через $\gamma(\omega)$ траекторию движения $t \to f^t\omega$, $\gamma_+(\omega)$ — положительную полутраекторию, $\overline{\gamma}(\omega)$ — замыкание $\gamma(\omega)$ в метрике пространства Ω. Напомним, что множество $E \subset \Omega$ называется инвариантным, если $f^t E \subset E$ при всех $t \in \mathbb{R}$, и E называется минимальным, если оно инвариантно, компактно и $\overline{\gamma}(\omega) = E$ для каждого $\omega \in E$. Если E минимально, то для каждого $\omega \in E$ имеет место равенство $\overline{\gamma}(\omega) = \overline{\gamma}_+(\omega)$. Отметим, что всякое компактное инвариантное множество E в Ω содержит по крайней мере одно минимальное подмножество; далее, если $\overline{\gamma}_+(\omega)$ компактно, то омега-предельное множество $L^+(\omega)$ точки ω

Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (грант 97–01–00413) и конкурсным центром Удмуртского госуниверситета (грант 97–04).

непусто (при этом $L^+(\omega)$ инвариантно и компактно), и для всякого компактного E определена зона притяжения $W^s(E) \doteq \{\omega \in \Omega : L^+(\omega) \subset E\}$ множества E.

Каждой паре $(\mathbb{A}, \omega)$, где $\mathbb{A} \doteq (A_0, A_1, \ldots, A_r) : \Omega \to M_{n,m}$, $m = n(r+1)$, и вектору $u = (u_1, \ldots, u_r)$ поставим в соответствие уравнение

$$\dot{x} = A_0(f^t\omega)x + u_1 A_1(f^t\omega)x + \cdots + u_r A_r(f^t\omega)x, \quad x \in \mathbb{R}^n. \tag{3}$$

Будем предполагать, что для каждого $\omega_0 \in \Omega$ функция $t \to |\mathbb{A}(f^t\omega_0)|$ измерима по Лебегу, ограничена на $\mathbb{R}$ и для любых $\varepsilon > 0$ и $N > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что выполнено неравенство $\max\limits_{|t|\leq N} \int\limits_t^{t+1} |\mathbb{A}(f^s\omega) - \mathbb{A}(f^s\omega_0)| ds < \varepsilon$, как только $\rho(\omega, \omega_0) < \delta$ (ρ — метрика в Ω). Уравнение (3) будем отождествлять с парой $(\mathbb{A}, \omega)$.

Пусть задано произвольное множество $U \subset \mathbb{R}^r$ такое, что $0 \in U$; множество $\mathcal{U}$, состоящее из всех измеримых функций $u : \mathbb{R} \to U$, будем называть множеством допустимых управлений. Зафиксируем уравнение $(\mathbb{A}, \omega)$. Пусть $X_u(t, s, \omega)$ — функция Коши уравнения (3) при фиксированном управлении $u = u(t, \omega)$. Отметим, что функция $\omega \to X_u(t, s, \omega)$ непрерывна в каждой точке $\omega_0 \in \Omega$ равномерно относительно (t, s) на любом компакте в $\mathbb{R}^2$ и, если управление стационарно относительно потока, т. е. $u(t, \omega) = u(f^t\omega)$, то $X_u(t + \tau, s + \tau, \omega) = X_u(t, s, f^\tau\omega)$.

Для любого $\vartheta > 0$ построим множество достижимости

$$\mathfrak{D}_\vartheta(\omega) = \{X \in M_n : X = X_u(\vartheta, 0, \omega),\ u(\cdot) \in \mathcal{U}\}$$

уравнения (3) в пространстве матриц M_n из единичной матрицы и множество

$$\mathcal{B}_\varepsilon(I) X_0(\vartheta, 0, \omega) = \{X \in M_n : X = H X_0(\vartheta, 0, \omega),\ H \in \mathcal{B}_\varepsilon(I)\},$$

где I — единичная матрица.

Лемма 1. *Имеют место включения*

$$\mathcal{B}_{\nu_1}(X_0(\vartheta, 0, \omega)) \subset \mathcal{B}_\varepsilon(I) X_0(\vartheta, 0, \omega) \subset \mathcal{B}_{\nu_2}(X_0(\vartheta, 0, \omega)), \tag{4}$$

где $\nu_1 = \varepsilon / |X_0(0, \vartheta, \omega)|$, $\nu_2 = \varepsilon |X_0(\vartheta, 0, \omega)|$.

Доказательство. Пусть $H = I + G$, тогда

$$\mathcal{B}_\varepsilon(I) X_0(\vartheta, 0, \omega) = X_0(\vartheta, 0, \omega) + \mathcal{B}_\varepsilon X_0(\vartheta, 0, \omega),$$

где $\mathcal{B}_\varepsilon X_0(\vartheta, 0, \omega) = \{X \in M_n : X = G X_0(\vartheta, 0, \omega),\ |G| \leq \varepsilon\}$. Поэтому включения (4) эквивалентны включениям $\mathcal{B}_{\nu_1} \subset \mathcal{B}_\varepsilon X_0(\vartheta, 0, \omega) \subset \mathcal{B}_{\nu_2}$. Если $A \in \mathcal{B}_\varepsilon$, то $|A X_0(\vartheta, 0, \omega)| \leq \varepsilon |X_0(\vartheta, 0, \omega)| = \nu_2$, откуда следует второе включение. Если $|A| \leq \nu_1$, то $|A X_0(0, \vartheta, \omega)| \leq \varepsilon$, поэтому

$$A = A X_0(0, \vartheta, \omega) X_0(\vartheta, 0, \omega) \in \mathcal{B}_\varepsilon(I) X_0(\vartheta, 0, \omega),$$

откуда следует первое включение. $\square$

Определение 1. Уравнение (3) называется

а) локально достижимым, если найдутся $\vartheta > 0$ и $\varepsilon > 0$ такие, что выполнено включение

$$\mathcal{B}_\varepsilon(I) X_0(\vartheta, 0, \omega) \subset \mathfrak{D}_\vartheta(\omega);$$

б) равномерно локально достижимым, если найдутся $\vartheta > 0$ и $\varepsilon > 0$ такие, что для всех $\omega_0 \in \overline{\gamma}(\omega)$ имеет место включение

$$\mathcal{B}_\varepsilon(I) X_0(\vartheta, 0, \omega_0) \subset \mathfrak{D}_\vartheta(\omega_0).$$

Лемма 2. *Уравнение* (3) *локально достижимо в том и только том случае, если существуют такие* $\vartheta > 0$ *и* $\varepsilon > 0$, *что найдется управление* $(t, H) \to u(t, H)$, *определенное на* $[0, \vartheta] \times \mathcal{B}_\varepsilon(I)$ *и обеспечивающее равенство*

$$X_u(\vartheta, 0, \omega) = HX_0(\vartheta, 0, \omega). \tag{5}$$

Уравнение (3) *равномерно локально достижимо в том и только том случае, если существуют такие* $\vartheta > 0$ *и* $\varepsilon > 0$, *что для любой непрерывной функции* $H : \overline{\gamma}(\omega) \to \mathcal{B}_\varepsilon(I)$ *найдется управление* $(t, \omega_0) \to u(t, \omega_0)$, *определенное на* $[0, \vartheta] \times \overline{\gamma}(\omega)$ *и обеспечивающее равенство*

$$X_u(\vartheta, 0, \omega_0) = H(\omega_0)X_0(\vartheta, 0, \omega_0). \tag{6}$$

Доказательство. Пусть при $u = u(t, H)$ выполнено равенство (5); тогда для всех $H \in \mathcal{B}_\varepsilon(I)$ имеем $HX_0(\vartheta, 0, \omega) \in \mathfrak{D}_\vartheta(\omega)$, следовательно, уравнение (3) локально достижимо.

Очевидно, что из равномерной локальной достижимости следует (6). Пусть для всякой непрерывной $H(\omega_0)$ выполнено равенство (6). Если найдется $H_0 \in \mathcal{B}_\varepsilon(I)$ такая, что матрица $H_0X_0(\vartheta, 0, \omega_0)$ не содержится в $\mathfrak{D}_\vartheta(\omega_0)$, то для функции $H(\omega_0) \equiv H_0$ и любого допустимого управления равенство (6) не выполнено. □

Замечание 1. Наличие свойства локальной или равномерной локальной достижимости предоставляет возможность (в силу (5) или (6)) "немного поворачивать" функцию Коши уравнения (3) с помощью подходящего управления (и тем самым влиять на поведение решений). Не всякое уравнение обладает этим свойством, но очевидно, что уравнение $\dot{x} = A(t)x + U(t)x$, где матрица $A(t)$ ограничена, а элементы матрицы $U(t)$ интерпретируются как управляющие функции ($|U(t)| \leq \varepsilon$), равномерно локально достижимо. Таким образом, выполнено (6) и это обстоятельство позволило В.М. Миллионщикову [2], [3], а вслед за ним и другим исследователям [4], построить современную теорию показателей Ляпунова. Сам же метод "поворотов" получил название метода поворотов Миллионщикова.

По уравнению $(\mathbb{A}, \omega)$ построим матричное дифференциальное уравнение

$$\dot{Z} = A_0(f^t\omega)Z + \big(u_1A_1(f^t\omega) + \dots + u_rA_r(f^t\omega)\big)X_0(t, 0, \omega) \tag{7}$$

относительно $Z \in M_n$. Обозначим через $\mathfrak{L}_\vartheta(\omega)$ множество достижимости уравнения (7) из нуля за время ϑ под действием управлений $u : [0, \vartheta] \to \mathbb{R}^r$. Таким образом, $G \in \mathfrak{L}_\vartheta(\omega)$ в том и только том случае, если найдется $u_G : [0, \vartheta] \to \mathbb{R}^r$, что уравнение (7) при $u = u_G(t)$ имеет решение $Z(t)$, удовлетворяющее условиям $Z(0) = 0$, $Z(\vartheta) = G$. В силу линейности уравнения (7) множество $\mathfrak{L}_\vartheta(\omega)$ является линейным подпространством в M_n.

Определение 2. Уравнение $(\mathbb{A}, \omega)$ называется согласованным, если найдется $\vartheta > 0$ такое, что $\mathfrak{L}_\vartheta(\omega) = M_n$, и равномерно согласованным, если найдутся $\vartheta > 0$ и $\beta > 0$ такие, что для всех $\omega_0 \in \overline{\gamma}(\omega)$ множество $\mathfrak{L}_\vartheta(\omega_0)$ совпадает с M_n, и выполнено неравенство $|u_G(t, \omega_0)| \leq \beta|G|$, $0 \leq t \leq \vartheta$ (здесь $u_G(t, \omega_0)$ — управление, переводящее решение уравнения (7) при $\omega = \omega_0$ из нуля в точку G в момент $t = \vartheta$).

Замечание 2. Непосредственно из определения следует, что если уравнение $(\mathbb{A}, \omega)$ согласованно (равномерно согласованно), то для любого $\tau \in \mathbb{R}_+$ ($\tau \in \mathbb{R}$) уравнение $(\mathbb{A}, f^{-\tau}\omega)$ согласованно (равномерно согласованно).

Замечание 3. Определения согласованности и равномерной согласованности введены в [5] для системы $\dot{x} = (A(f^t\omega) + B(f^t\omega)UC^*(f^t\omega))x$ (элементы матрицы U интерпретируются как управляющие функции) в связи с задачами управления показателями Ляпунова и изучались в [6]–[8] (см. библиографию в [8]).

2. Равномерная локальная достижимость

Основное свойство равномерно локально достижимых уравнений содержится в формулируемой ниже теореме 1. Эта теорема утверждает, что при надлежащем выборе допустимого управления все решения уравнения (3) ведут себя подобно решениям заранее заданного модельного уравнения с дискретным временем. Таким образом, появляется возможность влиять на асимптотические свойства решений уравнения (3), например, управлять показателями Ляпунова или аналогичными характеристиками, отвечающими за асимптотическое поведение решений. В прикладных задачах это бывает важно, потому что позволяет разделять движения (добиваясь структурной устойчивости) и улучшать асимптотику движений за счет перемещения показателей влево. Если же модельное уравнение стационарно: $y_{k+1} = Qy_k$ (см. (10) в формулируемой ниже теореме 1), то уравнение (3) "почти стационарно", т. е. приводимо ляпуновским преобразованием к стационарному уравнению (следствие 1).

Предварительно докажем две простые леммы.

Лемма 3. *Пусть E — инвариантное компактное множество в Ω и для каждого $\omega \in E$ уравнение* (3) *равномерно локально достижимо. Тогда оно равномерно локально достижимо на множестве E, т. е. найдутся общие для всех $\omega \in E$ константы $\vartheta > 0$ и $\varepsilon > 0$, участвующие в определении равномерной локальной достижимости.*

Доказательство. Пусть $\vartheta(\omega)$ и $\varepsilon(\omega)$ — константы, участвующие в определении равномерной локальной достижимости уравнения $(\mathbb{A}, \omega)$. Надо показать, что $\sup_E \theta(\omega) < \infty$, где $\theta(\omega) = \max\{\vartheta(\omega), \varepsilon^{-1}(\omega)\}$. Если $\sup_E \theta(\omega) = \infty$, то найдется такая сходящаяся (в силу компактности E) последовательность $\{\omega_i\}$, что $\theta(\omega_i) \to \infty$. Это означает, что уравнение $(\mathbb{A}, \widehat{\omega})$, где $\widehat{\omega} = \lim \omega_i$, не является равномерно локально достижимым. $\square$

Лемма 4. *Пусть E — инвариантное компактное множество в Ω, $u : \mathbb{R} \times E \to U$ — произвольное допустимое управление. Если для некоторого $\tau > 0$ и всех $t \in \mathbb{R}_+$ имеет место равенство*

$$u(t, \omega) = u(t - \tau, f^\tau \omega), \tag{8}$$

то $X_u(t + \tau, s + \tau, \omega) = X_u(t, s, f^\tau \omega)$, $(t, s) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$. Если равенство (8) *выполнено для любого $\tau \in \mathbb{R}$ и всех $t \in \mathbb{R}$, то управление $u(t, \omega)$ стационарно относительно потока f^t, т. е. $u(t, \omega) = \widehat{u}(f^t \omega)$ для некоторой функции $\widehat{u} : E \to U$.*

Доказательство. Введем в рассмотрение матричное уравнение

$$\dot{X} = A_0(f^t\omega)X + u_1 A_1(f^t\omega)X + \cdots + u_r A_r(f^t\omega)X, \quad X \in M_n, \tag{9}$$

отвечающее уравнению (3). Для доказательства первого утверждения леммы достаточно подставить управление, удовлетворяющее равенству (8), в уравнение (9) и провести замену времени $t \to t + \tau$. Тогда в силу определения $u(t, \omega)$ получим равенство $u(t + \tau, \omega) = u(t, f^\tau \omega)$, которое эквивалентно (8).

Второе утверждение следует из (8) при $\tau = t$. $\square$

Теорема 1. *Пусть E — инвариантное компактное множество в Ω и для каждого $\omega \in E$ уравнение* (3) *равномерно локально достижимо. Тогда существуют $\vartheta > 0$ и $\varepsilon > 0$ такие, что для любой функции $Q : E \to M_n$, удовлетворяющей при всех $\omega \in E$ неравенству $|Q(\omega)X_0(0, \vartheta, \omega) - I| \leq \varepsilon$, найдется управление $u : \mathbb{R} \times E \to U$, обеспечивающее для решения $x_u(t, x_0, \omega)$ уравнения* (3) *при $u = u(t, \omega)$, всех $x_0 \in \mathbb{R}^n$ и всех $k = 0, 1, \ldots$ равенства $x_u(t_k, x_0, \omega) = y_k(x_0, \omega)$, где $t_k = k\vartheta$, $\{y_k(x_0, \omega)\}_{k=0}^{\infty}$ — решение задачи*

$$y_{k+1} = Q(f^{t_k}\omega)y_k, \quad y_0 = x_0, \quad k = 0, 1, \ldots \tag{10}$$

Доказательство. Пусть ϑ и ε как в лемме 3, и $Q(\omega)$ удовлетворяет условию теоремы. Для каждого $\omega \in E$ построим управление $u^0(\cdot,\omega) : [0,\vartheta] \to U$, определенное на отрезке $[0,\vartheta]$ и такое, что (см. лемму 2) при $u = u^0(t,\omega)$ для уравнения (3) выполнено равенство $X_{u^0}(\vartheta,0,\omega) = H(\omega)X_0(\vartheta,0,\omega)$, где $H(\omega) = Q(\omega)X_0(0,\vartheta,\omega)$. Следовательно, для любого $x_0 \in \mathbb{R}^n$ имеет место равенство $x_{u^0}(\vartheta,x_0,\omega) = Q(\omega)x_0$ или в силу (10) $x_{u^0}(\vartheta,x_0,\omega) = y_1(x_0,\omega)$.

Тем самым для каждого $k = 0,1,\dots$ построено управление $u^k = u^0(t,f^{t_k}\omega)$, определенное на $[0,\vartheta]$ и обеспечивающее для решений уравнения $(\mathbb{A},f^{t_k}\omega)$ равенство $x_{u^k}(\vartheta,x_0,f^{t_k}\omega) = y_1(x_0,f^{t_k}\omega)$.

"Растянем" последовательность $\{u^k(t)\}_{k=0}^{\infty}$, $t \in [0,\vartheta]$, на $\mathbb{R}_+$, определив управление $u : \mathbb{R}_+ \times E$ на каждом полуинтервале $\Delta_k = [t_k,t_{k+1})$ равенством $u(t,\omega) = u^0(t-t_k,f^{t_k}\omega)$ при $t \in \Delta_k$. Непосредственной проверкой можно убедиться, что для каждого целого $m \geq 0$ при $\tau = t_m$ и всех $t \in \mathbb{R}_+$ выполнено равенство (8). Поэтому в силу леммы 4 имеют место равенства $X_u(t_{k+1},t_k,\omega) = X_u(\vartheta,0,f^{t_k}\omega)$.

Пусть $x_u(t,x_0,\omega)$ — решение уравнения $(\mathbb{A},\omega)$, отвечающее управлению $u(t,\omega)$. Покажем тогда, что последовательность $\{x_u(t_k,x_0,\omega)\}_{k=1}^{\infty}$ является решением задачи (10). Действительно,

$$x_u(t_{k+1},x_0,\omega) = X_u(t_{k+1},0,\omega)x_0 = X_u(t_{k+1},t_k,\omega)X_u(t_k,0,\omega)x_0.$$

С учетом равенства $X_u(t_{k+1},t_k,\omega) = X_u(\vartheta,0,f^{t_k}\omega)$ имеем далее

$$x_u(t_{k+1},x_0,\omega) = X_u(\vartheta,0,f^{t_k}\omega)x_u(t_k,x_0,\omega) = Q(f^{t_k}\omega)x_u(t_k,x_0,\omega). \quad \square$$

Следствие 1. Пусть множество $\overline{\gamma}(\omega)$ компактно и уравнение (3) равномерно локально достижимо. Тогда существуют такие $\vartheta > 0$ и $\varepsilon > 0$, что для любой вещественной матрицы $\varLambda \in M_n$, удовлетворяющей неравенству $|\exp(\vartheta\varLambda)X_0(0,\vartheta,\omega) - I| \leq \varepsilon$, найдется управление $t \to u(t,\omega) \in U$, при котором уравнение (3) приводимо ляпуновским преобразованием к уравнению $\dot{y} = \varLambda y$ с постоянной матрицей $\varLambda$.

Управление $t \to u(t,\omega)$ обладает следующим свойством: если ω — периодическая точка (т.е. найдется $T > 0$, для которого $f^{t+T}\omega \equiv f^t\omega$), то при некотором целом $m \geq 1$ управление периодично с периодом mT: $u(t+mT,\omega) \equiv u(t,\omega)$.

Доказательство. Пусть $Q(\omega) \equiv \exp(\vartheta\varLambda)$, тогда матрица Q удовлетворяет условиям теоремы 1. По матрице Q построим управление $t \to u(t,\omega)$ (как это было сделано в доказательстве теоремы 1) и матрицу $\varPhi(t) = X_u(t,0,\omega)\exp(-t\varLambda)$. В силу известной теоремы Н.П. Еругина ([9], § 19, с. 119) достаточно показать, что матрица $\varPhi(t)$ является ляпуновской матрицей.

Функция $t \to \varPhi(t)$ непрерывна и ограничена на $\mathbb{R}_+$. Действительно, из (10) для всех $x_0 \in \mathbb{R}^n$ имеем равенство $x_u(t_k,x_0,\omega) = \exp(t_k\varLambda)x_0$, поэтому $X_u(t_k,0,\omega) = \exp(t_k\varLambda)$. В силу компактности $\overline{\gamma}(\omega)$, ограниченности $\mathbb{A}(f^t\omega)$ и управления $u(t,\omega)$ на $\mathbb{R}_+$ найдется такая константа a, что $|X_u(t,s,f^\tau\omega)| \leq a$ для всех $(t,s) \in \Delta_k \times \Delta_k$, всех $k = 0,1,\dots$ и всех $\tau \in \mathbb{R}_+$. Пусть $t \in \Delta_k$, тогда $\varPhi(t) = X_u(t,t_k,\omega)X_u(t_k,0,\omega)\exp(-t\varLambda) = X_u(t,t_k,\omega)\exp(t_k - t)\varLambda$, поэтому $|\varPhi(t)| \leq c$ для всех $t \in \mathbb{R}_+$, причем c не зависит от k. Аналогично доказывается ограниченность $\varPhi^{-1}(t)$.

Ограниченность производной $\dot{\varPhi}(t)$ следует из равенства

$$\dot{\varPhi}(t) = (A_0(f^t\omega) + u_1(t,\omega)A_1(f^t\omega) + \dots + u_r(t,\omega)A_r(f^t\omega))\varPhi(t) - \varPhi(t)\Lambda$$

и ограниченности $\varPhi(t)$.

Докажем второе утверждение следствия. Отметим, во-первых, что непосредственно из определения равномерной локальной достижимости и условия $0 \in U$ следует, что если это свойство имеет место при некоторых ϑ и ε, то оно имеет место при всех $\vartheta_1 \geq \vartheta$. Поэтому найдется такое целое $m \geq 1$, что уравнение (3) равномерно локально достижимо при $\vartheta = mT$. В силу (8) имеем $u(t+mT,\omega) = u(t,f^{mT}\omega) = u(t,\omega)$. $\square$

3. Равномерная согласованность и достижимость

В этом параграфе показано, что в некритическом случае ($0 \in \operatorname{int} U$) равномерная согласованность — это равномерная локальная достижимость по первому приближению.

В силу леммы 2 локальная достижимость уравнения (3) эквивалентна разрешимости уравнения (9) с условием (5), а равномерная локальная достижимость — с условием (6). Произведем в (9) замену $Y(t,\omega) = X_u(t,0,\omega) - X_0(t,0,\omega)$, тогда уравнение относительно Y запишется в виде

$$\dot{Y} = A_0(f^t\omega)Y + \Big(u_1A_1(f^t\omega) + \cdots + u_rA_r(f^t\omega)\Big)Y + \\ + \Big(u_1A_1(f^t\omega) + \cdots + u_rA_r(f^t\omega)\Big)X_0(t,0,\omega), \quad Y \in M_n, \quad (11)$$

а условие (5) разбивается на два условия: $Y(0,\omega) = 0$, $Y(\vartheta,\omega) = GX_0(\vartheta,0,\omega)$, где $G = H - I$. Обозначим через $\mathbb{D}_\vartheta(\omega)$ множество достижимости за время $\vartheta > 0$ уравнения (11) из точки $Y = 0$ под действием управлений $u \in \mathcal{U}$ (отметим, что $0 \in \mathbb{D}_\vartheta(\omega) \subset M_n$). Тогда включение $0 \in \operatorname{int}\mathbb{D}_\vartheta(\omega)$ при некотором $\vartheta > 0$ эквивалентно локальной достижимости уравнения (3), а включение $\mathcal{B}_\varepsilon \subset \mathbb{D}_\vartheta(\omega_0)$, выполненное при некоторых $\vartheta > 0$, $\varepsilon > 0$ и всех $\omega_0 \in \overline{\gamma}(\omega)$, эквивалентно равномерной локальной достижимости.

Теорема 2. *Пусть* $0 \in \operatorname{int} U$ *и уравнение* (3) *согласованно* (*равномерно согласованно*), *тогда оно локально достижимо* (*равномерно локально достижимо*).

Доказательство. Уравнение (7) служит линейным приближением (в окрестности точки $u = 0$, $Y = 0$) для уравнения (11), а свойство согласованности, сформулированное в терминах уравнения (7), эквивалентно свойству полной достижимости уравнения (7) (т. е. множество достижимости $\mathfrak{L}_\vartheta(\omega)$ уравнения (7) совпадает с пространством M_n). Воспользуемся теоремой 3 работы [10]. С этой целью матрицы Y и Z в уравнениях (11) и (7) "развернем в вектор", а в теореме 3 из [10] проведем замену времени $t \to \vartheta - t$ и слова "локальная управляемость в малом" заменим на слова "локальная достижимость в малом" (локальная достижимость в малом означает локальную достижимость "развернутого уравнения" (11), дополненную следующим свойством: для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что если $|G| < \delta$, то решение $Y(t,\omega)$, переходящее в точку $Y(\vartheta,\omega) = G$ при надлежащем управлении, удовлетворяет для всех $t \in [0,\vartheta]$ неравенству $|Y(t,\omega)| < \varepsilon$). В силу условия $0 \in \operatorname{int} U$ и цитируемой теоремы 3 из [10] первое утверждение доказано.

Второе утверждение теоремы после аналогичных рассуждений следует из теоремы 1 из [11] (в этой работе требуется минимальность множества $\overline{\gamma}(\omega)$, но это предположение излишне: достаточно предполагать, что $\overline{\gamma}(\omega)$ компактно). $\square$

4. Критерии согласованности

В этом параграфе результаты работ [5], [8] о согласованности уравнения

$$\dot{x} = (A(f^t\omega) + B(f^t\omega)UC^*(f^t\omega))x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (12)$$

где U — $(m \times k)$-матрица управляющих параметров, переносятся на уравнение (3). Для каждых $i, j, p, s \in \{1, \ldots, n\}$ введем обозначения

$$\gamma_{ijps}(\vartheta,\omega) = \int_0^\vartheta \sum_{l=1}^r e_i^*\widehat{A}_l(t,\omega)e_pe_s^*\widehat{A}_l^*(t,\omega)e_j\,dt,$$

где $e_k \in \mathbb{R}^n$ — k-й столбец единичной матрицы, $\widehat{A}_l(t,\omega) = X_0(0,t,\omega)A_l(f^t\omega)X_0(t,0,\omega)$, $l = 1, \ldots, r$. Построим далее $(n \times n)$-матрицы $\Gamma_{ij}(\vartheta,\omega) = \{\gamma_{ijps}(\vartheta,\omega)\}_{p,s=1}^n$, $i, j = 1, \ldots, n$, и $(n^2 \times n^2)$-матрицу $\Gamma(\vartheta,\omega) = \{\Gamma_{ij}(\vartheta,\omega)\}_{i,j=1}^n$, которую в дальнейшем будем называть матрицей согласования (уравнения (3) на $[0,\vartheta]$).

Лемма 5. *Матрица согласования обладает следующими свойствами:*
а) $\Gamma(\vartheta,\omega)=\Gamma^*(\vartheta,\omega)$;
б) $\lambda(\vartheta,\omega)\ge 0$, ($\lambda$ — *наименьшее собственное значение матрицы* Γ);
в) $\lambda(\vartheta_1,\omega)\ge\lambda(\vartheta,\omega)$ *при* $\vartheta_1\ge\vartheta$.

Доказательство. Утверждение а) следует из равенства $\gamma_{ijps}=\gamma_{jisp}$. Докажем утверждение б). Достаточно доказать, что для любого $h=\mathrm{col}(h_{11},\ldots,h_{1n},\ldots,h_{n1},\ldots,h_{nn})$ справедливо неравенство $h^*\Gamma h\ge 0$. Имеем

$$h^*\Gamma h=\sum_{i,j,p,s=1}^{n}h_{ip}h_{js}\gamma_{ijps}=\int_0^{\vartheta}\sum_{l=1}^{r}\sum_{i,j,p,s=1}^{n}h_{ip}h_{js}e_i^*\widehat{A}_l(t,\omega)e_pe_s^*\widehat{A}_l^*(t,\omega)e_j\,dt=$$
$$=\int_0^{\vartheta}\sum_{l=1}^{r}\Bigg(\sum_{i,p=1}^{n}h_{ip}e_i^*\widehat{A}_l(t,\omega)e_p\Bigg)\Bigg(\sum_{j,s=1}^{n}h_{js}e_s^*\widehat{A}_l^*(t,\omega)e_j\Bigg)\,dt=$$
$$=\int_0^{\vartheta}\sum_{l=1}^{r}\Bigg(\sum_{i,p=1}^{n}h_{ip}e_i^*\widehat{A}_l(t,\omega)e_p\Bigg)^2dt\ge 0.\qquad(13)$$

Утверждение в) следует из неравенства (13). □

Определим функции $u_{ip}^l:[0,\vartheta]\times\Omega\to\mathbb{R}$ и вектор-функции u_{ip} равенствами

$$u_{ip}^l(t,\omega)=e_i^*\widehat{A}_l(t,\omega)e_p,\quad i,p=1,\ldots,n,\quad l=1,\ldots,r,\qquad(14)$$
$$u_{ip}(t,\omega)=\mathrm{col}(u_{ip}^1(t,\omega),\ldots,u_{ip}^r(t,\omega)),\quad i,p=1,\ldots,n.\qquad(15)$$

Лемма 6. *Совокупность вектор-функций* (15) *линейно независима на* $[0,\vartheta]$ *в том и только том случае, если* $\lambda(\vartheta,\omega)>0$.

Доказательство. Пусть функции (15) линейно независимы на $[0,\vartheta]$, но $\lambda(\vartheta,\omega)=0$. Тогда существует такой ненулевой вектор h, что $\Gamma(\vartheta,\omega)h=0$. Следовательно, $h^*\Gamma(\vartheta,\omega)h=0$ и в силу (13) для всех $l=1,\ldots,r$ выполнены равенства

$$\sum_{i,p=1}^{n}h_{ip}e_i^*\widehat{A}_l(t,\omega)e_p=0,\quad t\in[0,\vartheta].\qquad(16)$$

Это эквивалентно равенству $\sum\limits_{i,p=1}^{n}h_{ip}u_{ip}(t,\omega)=0$, $t\in[0,\vartheta]$, что противоречит линейной независимости функций (15).

Докажем теперь достаточность условий леммы. Если функции (15) линейно зависимы, то найдется такой ненулевой вектор $h\in\mathbb{R}^{n^2}$, что $\sum\limits_{i,p=1}^{n}h_{ip}u_{ip}(t,\omega)=0$, $t\in[0,\vartheta]$. Следовательно, для всех $t\in[0,\vartheta]$ и $l=1,\ldots,r$ выполнено равенство (16), поэтому в силу (13) имеем $h^*\Gamma(\vartheta,\omega)h=0$, т. е. $\lambda(\vartheta,\omega)=0$. □

Замечание 4. Матрица $\Gamma(\vartheta,\omega)$ представляет собой матрицу Грама для совокупности вектор-функций $\{u_{ip}(\cdot,\omega)\}_{i,p=1}^n$ на отрезке $[0,\vartheta]$.

Теорема 3. *Следующие утверждения эквивалентны:*
а) *уравнение* (3) *согласованно;*
б) *найдется* $\vartheta>0$, *при котором матрица* $\Gamma(\vartheta,\omega)$ *положительно определена* ($\lambda(\vartheta,\omega)>0$);
в) *совокупность вектор-функций* $\{u_{ip}(\cdot,\omega)\}_{i,p=1}^n$, *определенных равенствами* (14), (15), *линейно независима на* $[0,\vartheta]$ *для некоторого* $\vartheta>0$.

Доказательство. Условия б) и в) эквивалентны в силу леммы 6. Покажем, что из б) следует а). Пусть $\lambda(\vartheta,\omega)>0$ при некотором $\vartheta>0$. Для любой $G\in M_n$ требуется найти управление $u=\operatorname{col}(u_1,\ldots,u_r):[0,\vartheta]\to\mathbb{R}^r$, при котором уравнение (7) имеет решение, удовлетворяющее условиям $Z(0)=0$, $Z(\vartheta)=G$. Таким образом, задача о построении $u(\cdot)$ сводится к задаче о разрешимости уравнения

$$\int_0^{\vartheta}\sum_{l=1}^{r}\widehat{A}_l(t,\omega)u_l(t)\,dt=Q(\vartheta,\omega), \tag{17}$$

где $Q(\vartheta,\omega)=X_0(0,\vartheta,\omega)G$. Решение $\widehat{u}=\operatorname{col}(\widehat{u}_1,\ldots,\widehat{u}_r)$ уравнения (17) будем искать в виде $\widehat{u}(t)=\sum\limits_{j,s=1}^{n}h_{js}u_{js}(t)$, где $u_{js}(t)$ определены равенствами (14), (15). Подставляя $\widehat{u}(t)$ в (17) и умножая (17) слева на e_i^*, а справа на e_p, получим систему n^2 алгебраических уравнений

$$\sum_{j,s=1}^{n}\gamma_{ijps}h_{js}=q_{ip},\quad i,p=1,\ldots,n, \tag{18}$$

относительно h_{js}. Здесь $q_{ip}=e_i^*Q(\vartheta,\omega)e_p$. Поскольку $\lambda(\vartheta,\omega)>0$, то система (18) разрешима: $h=\Gamma^{-1}q$, где $h=\operatorname{col}(h_{11},\ldots,h_{1n},\ldots,h_{n1},\ldots,h_{nn})$, $q=\operatorname{col}(q_{11},\ldots,q_{1n},\ldots,q_{n1},\ldots,q_{nn})$. Поэтому уравнение (3) согласованно. Заметим, что для решения $\widehat{u}(t)$ уравнения (17) имеется оценка

$$|\widehat{u}(t)|\le\sum_{j,s=1}^{n}|h_{js}|\,|u_{js}(t)|\le|\Gamma^{-1}(\vartheta,\omega)|\sum_{j,s=1}^{n}|u_{js}(t)|\,|q(\vartheta,\omega)|.$$

Далее, из ограниченности $A_l(f^t\omega)$ и $X_0(t,s,\omega)$ при $(t,s)\in[0,\vartheta]\times[0,\vartheta]$ следует ограниченность на $[0,\vartheta]$ функций $u_{js}(t)$. Поэтому найдется такая константа β (не зависящая от G, но зависящая от ϑ), что $|\widehat{u}(t)|\le\beta|G|$, $0\le t\le\vartheta$.

Докажем, что из а) следует в). Выберем $\vartheta>0$ из определения согласованности. Достаточно показать, что если уравнение (17) разрешимо относительно $u(t)$ для любой Q, то совокупность вектор-функций (15) линейно независима на $[0,\vartheta]$. Предположим противное, пусть существует ненулевой вектор $h=\operatorname{col}(h_{11},\ldots,h_{1n},\ldots,h_{n1},\ldots,h_{nn})$ такой, что $\sum\limits_{i,p=1}^{n}h_{ip}u_{ip}(t,\omega)=0$, $t\in[0,\vartheta]$. Тогда $\sum\limits_{i,p=1}^{n}h_{ip}e_i^*\widehat{A}_l(t,\omega)e_p=0$ при всех $l=1,\ldots,r$ и $t\in[0,\vartheta]$. Для матрицы $H=\{h_{ip}\}_{i,p=1}^{n}$ существует такая функция $\widehat{u}=\operatorname{col}(\widehat{u}_1,\ldots,\widehat{u}_r):[0,\vartheta]\to\mathbb{R}^r$, что

$$\int_0^{\vartheta}X_0(0,t,\omega)\big(\widehat{u}_1(t)A_1(f^t\omega)+\cdots+\widehat{u}_r(t)A_r(f^t\omega)\big)X_0(t,0,\omega)\,dt=H,$$

поэтому для всех $i,p=1,\ldots,n$

$$\int_0^{\vartheta}e_i^*X_0(0,t,\omega)\big(\widehat{u}_1(t)A_1(f^t\omega)+\cdots+\widehat{u}_r(t)A_r(f^t\omega)\big)X_0(t,0,\omega)e_p\,dt=h_{ip}.$$

Умножая каждое из этих равенств на h_{ip} и суммируя по $i,p=1,\ldots,n$, получим

$$\sum_{i,p=1}^{n}h_{ip}^2=\sum_{i,p=1}^{n}h_{ip}\int_0^{\vartheta}e_i^*X_0(0,t,\omega)\big(\widehat{u}_1(t)A_1(f^t\omega)+\cdots+\widehat{u}_r(t)A_r(f^t\omega)\big)X_0(t,0,\omega)e_p\,dt=$$

$$=\int_0^{\vartheta}\sum_{l=1}^{r}\widehat{u}_l(t)\bigg(\sum_{i,p=1}^{n}h_{ip}e_i^*\widehat{A}_l(t,\omega)e_p\bigg)\,dt=0,$$

что противоречит условию $h\ne0$. $\square$

Замечание 5. Пусть задана тройка $(A_0(\omega), B(\omega), C(\omega))$, где $B = (b_1, \dots, b_m)$, $b_i \in \mathbb{R}^n$, $C = (c_1, \dots, c_k)$, $c_j \in \mathbb{R}^n$. Положим $r = mk$ и построим матрицы $A_1 = b_1 c_1^*$, $A_2 = b_1 c_2^*, \dots, A_k = b_1 c_k^*$, $A_{k+1} = b_2 c_1^*, \dots, A_{2k} = b_2 c_k^*, \dots, A_{r-k+1} = b_m c_1^*, \dots, A_r = b_m c_k^*$. Тогда определение согласованности для уравнения $\dot{x} = A_0(f^t\omega)x + u_1 A_1(f^t\omega)x + \dots + u_r A_r(f^t\omega)x$ с построенными таким образом матрицами A_l совпадает с определением согласованности, введенным в [5] для уравнения (12).

Теорема 4. *Пусть множество $\overline{\gamma}(\omega)$ компактно. Тогда уравнение $(\mathbb{A}, \omega)$ равномерно согласованно в том и только том случае, если найдутся $\vartheta > 0$ и $\varepsilon > 0$ такие, что для всех $\omega_0 \in \overline{\gamma}(\omega)$ наименьшее собственное значение $\lambda(\vartheta, \omega_0)$ матрицы согласования $\Gamma(\vartheta, \omega_0)$ удовлетворяет неравенству $\lambda(\vartheta, \omega_0) \geq \varepsilon$.*

Доказательство. Пусть уравнение $(\mathbb{A}, \omega)$ равномерно согласованно. Поскольку множество $\overline{\gamma}(\omega)$ компактно, а функция $\omega_0 \to \lambda(\vartheta, \omega_0)$ непрерывна, то существует $\omega_1 \in \overline{\gamma}(\omega)$ такое, что $\lambda(\vartheta, \omega_1) = \min\{\lambda(\vartheta, \omega_0) : \omega_0 \in \overline{\gamma}(\omega)\}$. Если $\lambda(\vartheta, \omega_1) = 0$, то уравнение $(\mathbb{A}, \omega_1)$ не является согласованным, что противоречит определению 2.

Пусть $\lambda(\vartheta, \omega_0) \geq \varepsilon$ при некоторых $\vartheta > 0$, $\varepsilon > 0$ и всех $\omega_0 \in \overline{\gamma}(\omega)$. Тогда для каждого $\omega_0 \in \overline{\gamma}(\omega)$ уравнение $(\mathbb{A}, \omega_0)$ согласованно (теорема 3), поэтому уравнение (7) имеет решение $Z(\cdot)$, удовлетворяющее условиям $Z(0) = 0$, $Z(\vartheta) = G$, при $u_G(t, \omega_0) = \sum\limits_{i,p=1}^{n} h_{ip} u_{ip}(t, \omega_0)$, где $u_{ip}(t, \omega_0)$ определены равенствами (14), (15), а h_{ip} находятся из уравнений (18). Поскольку имеет место оценка $|h| \leq |\Gamma^{-1}(\vartheta, \omega_0)|\,|q(\vartheta, \omega_0)|$, а $|\Gamma^{-1}(\vartheta, \omega_0)| \leq \varepsilon^{-1}$ для всех $\omega_0 \in \overline{\gamma}(\omega)$, то $|h| \leq \varepsilon^{-1}|q(\vartheta, \omega_0)|$. Далее, найдется константа η такая, что $|u_{ip}(t, \omega_0)| \leq \eta$ при всех $(t, \omega_0) \in [0, \vartheta] \times \overline{\gamma}(\omega)$ и всех $i, p = 1, \dots, n$ (это следует из ограниченности $\mathbb{A}$ на $\overline{\gamma}(\omega)$ и инвариантности $\overline{\gamma}(\omega)$ относительно f^t), поэтому найдется такое $\beta > 0$, что $|u_G(t, \omega_0)| \leq \beta |G(\omega_0)|$, $(t, \omega_0) \in [0, \vartheta] \times \overline{\gamma}(\omega)$. $\square$

Теорема 5. *Пусть $\overline{\gamma}(\omega)$ минимально. Тогда уравнение $(\mathbb{A}, \omega)$ равномерно согласованно в том и только том случае, если оно согласованно.*

Доказательство основано на рассуждениях работы [5].

Пример 1. Система уравнений

$$\dot{x}_1 = u(a_{11}(t)x_1 + a_{12}(t)x_2), \quad \dot{x}_2 = u(a_{21}(t)x_1 + a_{22}(t)x_2), \quad |u| \leq 1,$$

с почти периодическими в смысле Бора коэффициентами равномерно согласованна (и, следовательно, равномерно локально достижима), если функции $a_{ij}(t)$ линейно независимы на $\mathbb{R}$ (тогда в силу почти периодичности они будут линейно независимы на $[\tau, \tau + \vartheta]$ при некотором $\vartheta > 0$ и всех τ). Для доказательства этого факта достаточно по матрице $A(t) = \{a_{ij}(t)\}$ построить замыкание (в топологии равномерной сходимости на прямой) множества сдвигов $\mathcal{H}(A)$ матрицы $A(t)$ и на $\mathcal{H}(A)$ задать динамическую систему сдвигов ([12], гл. VI, § 5). Так как $\mathcal{H}(A)$ минимально, то, воспользовавшись утверждением в) теоремы 3 и теоремой 5, получаем требуемое.

Введем в рассмотрение отображение $\operatorname{vec} : M_n \to \mathbb{R}^{n^2}$, которое “разворачивает” матрицу $H = \{h_{ij}\}_{i,j=1}^n$ по строкам в вектор-столбец $\operatorname{vec} H \doteq \operatorname{col}(h_{11}, \dots, h_{1n}, \dots, h_{n1}, \dots, h_{nn})$. Нетрудно проверить, что для любых $C, L, A, M \in M_n$ из $C = LA$ следует $\operatorname{vec} C = (L \otimes I_n) \operatorname{vec} A$ и из $C = AM$ следует $\operatorname{vec} C = (I_n \otimes M^*) \operatorname{vec} A$ ($\otimes$ — кронекерово (прямое) произведение матриц ([13], с. 235)). Построим по уравнению $(\mathbb{A}, \omega)$ так называемое “большое уравнение” [6]

$$\dot{z} = F(f^t\omega)z + G(f^t\omega)v, \quad z \in \mathbb{R}^{n^2}, \quad v \in \mathbb{R}^r, \tag{19}$$

где $F(\omega) = A_0(\omega) \otimes I - I \otimes A_0^*(\omega) \in M_{n^2}$, $G(\omega) = (\operatorname{vec} A_1(\omega), \dots, \operatorname{vec} A_r(\omega)) \in M_{n^2 \times r}$. Через $Z_0(t, s, \omega)$ обозначим функцию Коши уравнения $\dot{z} = F(f^t\omega)z$. Уравнение (19) будем отождествлять с тройкой (F, G, ω).

Напомним, что уравнение (F, G, ω) называется вполне управляемым ([14], гл. 6, § 20), если при некотором $\vartheta > 0$ матрица управляемости

$$W(\vartheta, \omega) = \int_0^{\vartheta} Z_0(0, t, \omega) G(f^t\omega) G^*(f^t\omega) Z_0^*(0, t, \omega)\, dt \tag{20}$$

определенно положительна, и равномерно вполне управляемым [15], если найдется такое $\vartheta > 0$, что $W(\vartheta, \omega_0)$ определенно положительна равномерно относительно $\omega_0 \in \overline{\gamma}(\omega)$.

Теорема 6. *Уравнение* $(\mathbb{A}, \omega)$ *согласованно (равномерно согласованно) в том и только том случае, если уравнение* (F, G, ω) *вполне управляемо (равномерно вполне управляемо).*

Доказательство. Пусть $\Gamma(\vartheta, \omega)$ — матрица согласования уравнения $(\mathbb{A}, \omega)$. Поскольку $\widehat{A}_l(t, \omega) = X_0(0, t, \omega) A_l(f^t\omega) X_0(t, 0, \omega)$, то $\operatorname{vec} \widehat{A}_l(t, \omega) = (X_0(0, t, \omega) \otimes X_0^*(t, 0, \omega)) \operatorname{vec} A_l(f^t\omega)$, поэтому $\Gamma(\vartheta, \omega) = \int\limits_0^{\vartheta} \sum\limits_{l=1}^{r} \operatorname{vec} \widehat{A}_l(t, \omega) \cdot (\operatorname{vec} \widehat{A}_l(t, \omega))^*\, dt$. Далее нетрудно проверить, что $Z_0(0, t, \omega) = X_0(0, t, \omega) \otimes X_0^*(t, 0, \omega)$, поэтому $Z_0(0, t, \omega) G(f^t\omega) = (\operatorname{vec} \widehat{A}_1(t, \omega), \ldots, \operatorname{vec} \widehat{A}_r(t, \omega))$. Следовательно, $W(\vartheta, \omega) = \int\limits_0^{\vartheta} \sum\limits_{l=1}^{r} \operatorname{vec} \widehat{A}_l(t, \omega) \cdot (\operatorname{vec} \widehat{A}_l(t, \omega))^*\, dt$. Таким образом, $\Gamma(\vartheta, \omega) = W(\vartheta, \omega)$. $\square$

5. Согласованность стационарного уравнения

Рассмотрим уравнение (3) с постоянной матрицей $\mathbb{A}(\omega) \equiv \mathbb{A}$ и соответствующее ему уравнение $(F, G, \omega) \equiv (F, G)$. Для каждого $\nu = 1, \ldots, r$ введем матрицы $L_0^{\nu} = A_{\nu}$, $L_k^{\nu} = A_0 L_{k-1}^{\nu} - L_{k-1}^{\nu} A_0$, $k = 1, \ldots, n^2 - 1$.

Теорема 7. *Уравнение* $\mathbb{A}$ *согласованно в том и только том случае, если среди матриц* L_k^{ν}, $k = 0, \ldots, n^2 - 1$, $\nu = 1, \ldots, r$, *существуют* n^2 *линейно независимых.*

Доказательство. Уравнение $\mathbb{A}$ согласованно тогда и только тогда, когда уравнение (F, G) вполне управляемо, а это эквивалентно равенству $\operatorname{rank}[G, FG, \ldots, F^{n^2-1}G] = n^2$. Применив к векторам-столбцам матрицы G отображение vec^{-1}, получим r матриц $L_0^1, \ldots, L_0^r$. Проделаем ту же процедуру с матрицами $F^k G$, $k = 1, \ldots, n^2 - 1$. Тогда на каждом шаге получим r матриц $L_k^1, \ldots, L_k^r$. Поэтому равенство $\operatorname{rank}[G, FG, \ldots, F^{n^2-1}G] = n^2$ имеет место только в том случае, если линейная оболочка матриц L_k^{ν}, $k = 0, \ldots, n^2 - 1$, $\nu = 1, \ldots, r$, совпадает с M_n. $\square$

Следствие 2. Пусть A_0 коммутирует с матрицами $A_1, \ldots, A_r$. Тогда уравнение $\mathbb{A}$ согласованно в том и только том случае, если линейная оболочка матриц $A_1, \ldots, A_r$ совпадает с M_n.

Следствие 3. Пусть матрицы $A_0, \ldots, A_r$ квазитреугольные, т. е. $A_{\nu} = \{B_{ij}^{\nu}\}_{i,j=1}^{s}$, $B_{ii}^{\nu} \in M_{n_i}$, $\sum\limits_{i=1}^{s} n_i = n$, $B_{ij}^{\nu} = 0$ при $i > j$. Тогда уравнение $\mathbb{A} = (A_0, \ldots, A_r)$ не является согласованным.

Доказательство. Для всех $\nu = 1, \ldots, r$, $k = 0, \ldots, n^2 - 1$ матрицы L_k^{ν} имеют такой же вид, как и матрицы A_{ν}, поэтому их линейная оболочка не совпадает с M_n. $\square$

Пример 2. Покажем, что уравнение $\mathbb{A} = (A_0, A_1)$ не является согласованным. Достаточно построить матрицу $W_0 \in M_n$, удовлетворяющую равенствам $(\operatorname{vec} W_0)^* F^k b = 0$ для всех $k = 0, \ldots, n^2-1$, где $F = A_0 \otimes I - I \otimes A_0^*$, $b = \operatorname{vec} A_1$. Нетрудно проверить, что $(\operatorname{vec} W_0)^* F^k b = b^*(\operatorname{vec} W_k)$, $k = 0, \ldots, n^2 - 1$, где $W_k = A_0^* W_{k-1} - W_{k-1} A_0^*$. Если $\operatorname{Sp} A_1 = 0$, то при $W_0 = I$ выполнено $W_k = 0$, $k = 1, \ldots, n^2 - 1$ и $b^*(\operatorname{vec} W_0) = 0$. Если $\operatorname{Sp} A_1 \neq 0$ и $A_0 \neq \mu I$, то положим $W_0 = A_0^* - \dfrac{\operatorname{Sp}(A_1 A_0)}{\operatorname{Sp} A_1} I$. В этом случае также выполнены равенства $b^*(\operatorname{vec} W_k) = 0$ для всех $k = 0, \ldots, n^2 - 1$. Если $A_0 = \mu I$, то $F = 0$ и согласованности нет.

Следствие 4. Если $\operatorname{Sp} A_{\nu} = 0$ для всех $\nu = 1, \ldots, r$, то уравнение $\mathbb{A}$ не является согласованным.

Доказательство. Положим $W_0 = I$, тогда $(\operatorname{vec} W_0)^*[G, FG, \dots, F^{n^2-1}G] = 0$.

Пример 3. Пусть степень минимального многочлена матрицы A_0 равна m $(m \geq 2)$. Тогда уравнение $\mathbb{A} \equiv (A_0, \dots, A_r)$, где $r \leq m-1$, не является согласованным. Для доказательства этого достаточно построить матрицу $W_0 \in M_n$, удовлетворяющую равенствам $b_\nu^*(\operatorname{vec} W_k) = 0$ при всех $\nu = 1, \dots, r$, $k = 0, \dots, n^2 - 1$, где $b_\nu = \operatorname{vec} A_\nu$, $W_k = A_0^* W_{k-1} - W_{k-1} A_0^*$. Будем искать W_0 в виде $W_0 = \sum\limits_{s=0}^{m-1} \lambda_s (A_0^*)^s$ (матрицы $(A_0^*)^s$, $s = 0, \dots, m-1$, линейно независимы). Тогда $W_k = 0$ для всех $k = 1, \dots, n^2 - 1$. Далее, равенства $b_\nu^*(\operatorname{vec} W_0) = 0$ эквивалентны равенствам $\sum\limits_{s=0}^{m-1} \lambda_s \operatorname{Sp}(A_\nu A_0^s) = 0$, $\nu = 1, \dots, r$, образующим систему из r уравнений с m неизвестными $\lambda_0, \dots, \lambda_{m-1}$. Так как $r < m$, то существует нетривиальное решение системы, что и доказывает отсутствие согласованности.

Следствие 5. Если все собственные значения матрицы A_0 различны, то уравнение $\mathbb{A} \equiv (A_0, \dots, A_r)$, где $r \leq n - 1$, не является согласованным.

Таким образом, если минимальный многочлен матрицы A_0 совпадает с характеристическим, то r управляющих параметров, где $r < n$, недостаточно для согласованности. Покажем, что n параметров управления достаточно, т. е. найдутся такие матрицы $A_1, \dots, A_n$, что уравнение $\mathbb{A} = (A_0, A_1, \dots, A_n)$ согласованно. Пусть $\lambda^n + \alpha_1 \lambda^{n-1} + \dots + \alpha_n$ — характеристический многочлен матрицы A_0. Тогда матрица A_0 в некотором базисе имеет вид

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -\alpha_n & -\alpha_{n-1} & -\alpha_{n-2} & \dots & -\alpha_1 \end{pmatrix}.$$

Построим матрицы $A_1 = e_n e_1^*, \dots, A_n = e_n e_n^*$ и по уравнению $\mathbb{A}$ — уравнение (F, G). Тогда

$$F = \begin{pmatrix} -A_0^* & I & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -A_0^* & I & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & I \\ -\alpha_n I & -\alpha_{n-1} I & -\alpha_{n-2} I & \dots & -\alpha_1 I - A_0^* \end{pmatrix}, \qquad G = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ I \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что $\operatorname{rank}[G, FG, \dots, F^{n-1}G] = n^2$, поэтому уравнение $\mathbb{A}$ согласованно.

Литература

1. Лейхтвейс К. *Выпуклые множества.* – М.: Наука, 1985. – 335 с.
2. Миллионщиков В.М. *Доказательство достижимости центральных показателей линейных систем* // Сиб. матем. журн. – 1969. – Т. 10. – № 1. – С. 99–104.
3. Миллионщиков В.М. *Грубые свойства линейных систем дифференциальных уравнений* // Дифференц. уравнения. – 1969. – Т. 5. – № 10. – С. 1775–1784.
4. Изобов Н.А. *Линейные системы дифференциальных уравнений* // Итоги науки и техн. ВИНИТИ. Матем. анализ. – 1974. – Т. 12. – С. 71–146.
5. Попова С.Н., Тонков Е.Л. *Управление показателями Ляпунова согласованных систем.* I // Дифференц. уравнения. – 1994. – Т. 30. – № 10. – С. 1687–1696.
6. Попова С.Н., Тонков Е.Л. *К вопросу о равномерной согласованности линейных систем* // Дифференц. уравнения. – 1995. – Т. 31. – № 4. – С. 723–724.
7. Тонков Е.Л. *Задачи управления показателями Ляпунова* // Дифференц. уравнения. – 1995. – Т. 31. – № 10. – С. 1682–1686.

8. Попова С.Н., Тонков Е.Л. *Согласованные системы и управление показателями Ляпунова* // Дифференц. уравнения. – 1997. – Т. 33. – № 2. – С. 226–235.
9. Еругин Н.П. *Линейные системы обыкновенных дифференциальных уравнений.* – Минск: Изд-во АН БССР, 1963. – 272 с.
10. Тонков Е.Л. *Управляемость нелинейной системы по линейному приближению* // ПММ. – 1974. – Т. 38. – № 4. – С. 599–606.
11. Тонков Е.Л. *Равномерная локальная управляемость и стабилизация нелинейной рекуррентной системы* // Дифференц. уравнения. – 1982. – Т. 18. – № 5. – С. 908–910.
12. Немыцкий В.В., Степанов В.В. *Качественная теория дифференциальных уравнений.* – М.: ГИТТЛ, 1949. – 550 с.
13. Ланкастер П. *Теория матриц.* – М.: Наука, 1978. – 280 с.
14. Красовский Н.Н. *Теория управления движением.* – М.: Наука, 1968. – 475 с.
15. Тонков Е.Л. *О равномерной локальной управляемости линейного уравнения* // Матем. физика. Респ. межвед. сб. – Киев, 1983. – Вып. 33. – С. 44–53.

Удмуртский государственный университет

Поступила
03.03.1998