Министерство образования и науки Российской Федерации

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Казанский (Приволжский) федеральный университет»

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ ИМ. ЛОБАЧЕВСКОГО

КАФЕДРА ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ

Направление: 010800.68 – Механика

Специализация: Теория упругости

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА

(Бакалаврская работа)

РАСЧЕТ НДС И ПРЕДЕЛЬНОГО СОСТОЯНИЯ ГРУНТОВ

Работа завершена:
"___"_____2014 г. _____ (А.Р. Евдокимов)

Работа допущена к защите:
Научный руководитель
к.ф.-м.н., доцент
"___"_____2014 г. _____(Д.В. Бережной)

Заведующий кафедрой
док. физ.-мат. наук, профессор
"___"_____2014г. _____(Ю.Г. Коноплев)

Казань — 2014

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. Введение
2. Понятие термина «грунт» 5
   2.1.Основная классификация и характеристики грунтов 5
3. Предельное сопротивление грунтов сдвигу 9
4. Предельное состояние грунтовых массивов 11
5. Актуальность метода конечных элементов 17
   5.1. Общая схема алгоритма МКЭ 18
   5.2. Плоская задача теории упругости 20
6. История программы ANSYS 23
   6.1. Возможности пакета ANSYS в вопросе механики грунтов 24
7. Решение модельной задачи 25
   7.1. Исследование влияния сцепления на несущую способность насыпи 27
   7.2. Исследование влияния угла внутреннего трения на несущую способность насыпи 31
   7.3. Исследование влияния высоты насыпи на ее несущую способность 35
   7.4. Исследование влияния изменения сетки на несущую способность насыпи 36
8. Заключение 42
9. Список использованных источников и литературы
10. Приложение

1. Введение

При строительстве сооружений требуется знание свойств взаимодействующих с ними грунтов. Поведение грунтов под нагрузками сопровождается сложными процессами, во многом отличающимися от поведения конструкционных материалов. Это потребовало разработки специальных экспериментальных методов и теоретического аппарата такой дисциплины, как механика грунтов для описания процессов их деформирования и разрушения.

Механика грунтов – дисциплина, которая занимается рассмотрением и изучением деформаций, прочности и устойчивости дисперсных (мелко раздробленных) тел. Развитие этой науки началось еще с работ великого ученого Ш. Кулона (1773), который разработал метод решения задач о давлении грунта на подпорные стенки и сформулировал закон сопротивления грунта сдвигу. Бурный рост промышленности, транспорта, горного дела и других областей хозяйства в XIX веке вызвал развитие строительства, что потребовало развитие геологических наук, а также механики грунтов. В это время появилось множество работ и исследований таких ученых как Г. Дарси, Е. Винклера. В 1869 году В. Карлович опубликовал первый учебник по основаниям и фундаментам на русском языке, в котором изложены и элементы механики грунтов. В последнее время большое внимание уделяется развитию нелинейной механики грунтов, в которой рассматриваются вопросы пластических деформаций и ползучести. Этому вопросу большое внимание уделяют Н.Н. Маслов, М.Н. Гольдштейн, С.С. Вялов, Ю.К. Зарецкий и другие.

Отличительной же особенностью развития механики грунтов является, с одной стороны, возросшая необходимость в уточненных оценках устойчивости и анализе напряженного состояния грандиозных по своим масштабам уникальных гидротехнических сооружений и оснований промышленных зданий и сооружений. А с другой стороны, революционные изменения и невероятный скачок в вычислительной математике, позволяют реализовать с помощью численных методов решение самых сложных инженерных проблем,

учитывая при этом технологию и последовательность строительства сооружений. Эта дисциплина в настоящее время использует математический аппарат механики сплошной среды. Вообще, механика грунтов является одним из составных разделов геомеханики, в основе которой лежат, во-первых, законы теоретической механики – механики абсолютно твердых несжимаемых тел, а во-вторых, законы строительной механики – упругости, пластичности и ползучести.

Численные методы анализа приходят в механику грунтов с отставанием во времени, в отличие от других областей строительной механики. Это связано с тем, что существовала невысокая достоверность определения механических свойств грунтов в условиях их природного залегания в сравнении со свойствами искусственных материалов – металла, бетона и других. Лишь появление испытательной аппаратуры нового поколения, разработка новых теорий деформирования грунтов, одним словом повышение достоверности исходной информации, делают актуальным качественное решение точности расчетов, что обеспечивают численные методы. Сегодня численный анализ становится необходимым элементом проектирования ответственных и сложных объектов геотехнического строительства, таких как фундаменты многоэтажных зданий, подземные сооружения.

2. Понятие термина «грунт»

Обычно термином грунтами называют любые горные породы коры выветривания земли – сыпучие или связные, прочность связей у которых между частицами во много раз меньше, чем прочность самих минеральных частиц, или эти связи между частицами отсутствуют вовсе. Вообще, определений в современной науке накопилось немало, вот, например, другое: грунты – это горные породы, являющиеся объектом инженерно-строительной деятельности человека.

Грунт, в соответствии с понятиями физической химии, является преимущественно дисперсной системой, то есть такой системой, которая состоит из дисперсной фазы (твердая часть грунта, частицы), дисперсионной среды – жидкой фазы и газовой фазы (воздуха). Грунт – концентрированная дисперсная система, то есть по массе и объему твердая фаза чаще всего преобладает, причем при известных условиях жидкая фаза частично или полностью заменяется воздухом. В механике грунтов сложные взаимодействия между фазами грунта обычно не учитываются, рассматриваются упрощенные механические модели: однофазный («сухой») грунт, у которого в порах отсутствует вода, замещающаяся воздухом, двухфазный («водонасыщенный») грунт, трехфазный («неводонасыщенный») грунт, а также четырехфазный (неводонасыщенный мерзлый) грунт, в котором четвертой фазой является лед (мерзлые грунты являются предметом «Механика мерзлых грунтов»).[6]

2.1 Основная классификация и характеристики грунтов

По характеру связи между твердыми частицами грунты подразделяются на сыпучие, связные и скальные. Связные грунты отличаются малой водопроницаемостью. Присутствие в них воды обусловливает молекулярные силы сцепления. Поэтому связные грунты характеризуются значительным сцеплением между частицами, большими деформациями под нагрузкой и длительностью деформаций. В скальных грунтах их частицы жестко связаны между собой цементирующим веществом, и эта связь при ее нарушении не восстанавливается.

В общем случае грунт является многофазной системой. Под фазами грунта, как уже было сказано выше, понимаются составляющие грунт компоненты: жидкость, газ, минеральные частицы. Каждый из них рассматривается как однородная среда, подчиняющаяся определенным законам деформирования. К первой фазе будем относить так называемый «скелет» грунта, под которым понимается совокупность минеральных частиц и среды, осуществляющей непосредственную связь структурных элементов. Связь между структурными элементами может иметь как водноколлоидную природу, так и цементационную. Природа межструктурных связей определяет характер деформирования грунта. Второй фазой будем считать жидкость (свободную, не участвующую в образовании связей между частицами грунта), а третьей – газ, заполняющий поры «скелета» грунта.[4]

Основными параметрами многофазного грунта являются объемная концентрация частиц, определяемая как отношение

$$m_s = \frac{V_s}{V},$$

объемная концентрация жидкости m_w и газа m_g

$$m_w = \frac{V_w}{V}; m_g = \frac{V_g}{V}$$

и пористость

$$m = \frac{V_p}{V}.$$

Здесь V – объем элемента; V_p – объем пор; V_w – объем пор, занятый жидкостью; V_g – объем пор, занятых газом; V_s – объем, занятый частицами грунта. Очевидно: $m_s + m_w + m_g = 1$ или $m_s + m = 1$.

Удобными характеристиками являются коэффициенты пористости

$$e = \frac{V_p}{V_s} = \frac{m}{m_s} \text{ или } e = \frac{m_w + m_g}{m_s} = \frac{1 - m_s}{m_s} = \frac{1 - m}{m}$$

и степень водонасыщенности

$$I_w = \frac{m_w}{m} = \frac{m_w + m_g}{m_s}.$$

Плотность многофазного грунта ρ равна

$$\rho = \rho^s m_s + \rho^w m_w + \rho^g m_g,$$

а плотность «скелета»

$$\rho^{sk} = m_s \rho^s,$$

или, выраженная через коэффициент пористости,

$$\rho^{sk} = \frac{\rho^s}{1+e}.$$

Важнейшим показателем связного грунта является его влажность W, определяемая как отношение веса поровой воды к весу «скелета». Показателями пластичности связного грунта являются пределы текучести и пластичности. Соответствующие им влажности обозначаются через W_Lи W_P. Числом пластичности принято называть разность $I_P = W_L - W_P$. Глинистые грунты, являющиеся продуктом химического выветривания горных пород, подразделяются на супеси, суглинки и глины в зависимости от пластических свойств, характеризуемых числом пластичности. Состояние глинистых грунтов по влажности отражают обычно с помощью показателя консистенции I_L:

$$I_L = \frac{W - W_P}{W_L - W_P}.$$

В процессе деформирования в общем случае происходит изменение количественного соотношения фаз грунта в единице объема. Очевидно, что характер деформирования по времени такой среды зависит от путей, по которым в результате механического воздействия перемещаются фазы грунтовой системы, а скорость деформирования и сроки стабилизации зависят от конфигурации и абсолютных размеров деформируемой области, а также от характера воздействия.[4]

Помимо однофазных и двухфазных видов грунтов существуют и более сложные их виды. Например, к трехфазным грунтам относят такие из них, степень водонасыщенности которых заключена в пределах $0.7<I_w<0.9$. В таких грунтах газ, вода и «скелет» представляют собой самостоятельные фазы, подчиняющиеся своим законам деформирования. При этом скорости движения «скелета», жидкости и газа неодинаковы.

Грунты, степень водонасыщения которых более 0.9 считаются квазиодвухфазными грунтами. В таких грунтах газ либо полностью растворен в

жидкости, либо находится частично в пузырьках, движущихся со скоростью, равной скорости движения поровой жидкости.

Квазиоднофазный грунт характеризуется отсутствием либо самостоятельной свободной жидкой фазы, либо влияния жидкой фазы на деформацию «скелета» грунта.

Таким образом, мы видим, что грунты обладают широким спектром различных характеристик и подразделяются на множество различных категорий, однако в данной работе, мы будем иметь дело исключительно с однофазным типом грунтов для простоты расчетов и наблюдений.

3. Предельное сопротивление грунтов сдвигу

Сдвиг – процесс изменения расположения частиц грунта под действием внешних сил. Грунты в основании сооружений, а также при неодинаковых отметках их поверхности испытывают воздействие не только нормальных, но и касательных напряжений. Когда касательные напряжения по какой-либо поверхности в грунте достигают его предельного сопротивления, происходит сдвиг одной части массива грунта по другой. Невозможно определить прочностные характеристики грунта в опыте на компрессионное сжатие. По этой причине используют схемы испытаний, в которых нагружение сопровождается развитием сдвиговых напряжений и деформаций. Сопротивление грунта сдвигу (предельное) может быть установлено испытанием его образцов на прямой сдвиг (срез) путем трехосного сжатия, вдавливанием штампа с шаровой или конусообразной поверхностью, по результатам среза грунта крыльчаткой по цилиндрической поверхности и другими способами. Если понятие прочности связного грунта не выходит за рамки традиционных представлений о прочности строительных материалов, то понятие прочности несвязных (сыпучих) грунтов требует дополнительных пояснений. Механизм прочности несвязных грунтов заключается в следующем. Под действием сжимающих напряжений в грунте, в том числе вызванных его собственным весом, на контактных поверхностях минеральных частиц возникают силы трения, препятствующие взаимным перемещениям частиц. Кроме этого, между минеральными частицами, пересекающими условную плоскость, имеются зоны зацепления (взаимного проникновения), создающие нагельный эффект. Таким образом, при сдвиге грунта по фиксированной плоскости возникает реакция, равная сумме сил трения по контактным поверхностям минеральных частиц. После преодоления сил трения происходит сдвиг грунта по фиксированной плоскости. При наличии зацепления между частицами сдвиг сопровождается переупаковкой минеральных частиц скелета грунта. Переупаковка скелета вызывает вначале доуплотнение грунта (дилатация), а при дальнейшем сдвиге – разуплотнение грунта (контракция). В предельном состоянии сдвиг

грунта по фиксированной плоскости происходит без увеличения сдвигающей нагрузки.[5]

Таким образом, прочность несвязного грунта определяется уровнем действующих в нем сжимающих напряжений. Совершенно очевидно, что такой грунт не имеет прочности при одноосном напряженном состоянии, однако может обладать достаточно высокой прочностью при других видах напряженного состояния, которые возникают в грунтовом массиве при передаче на него нагрузок от фундаментов.

Сдвиг можно определить в лаборатории опытным путем с использованием сдвигового прибора для грунтов ненарушенной структуры (рис. 1).

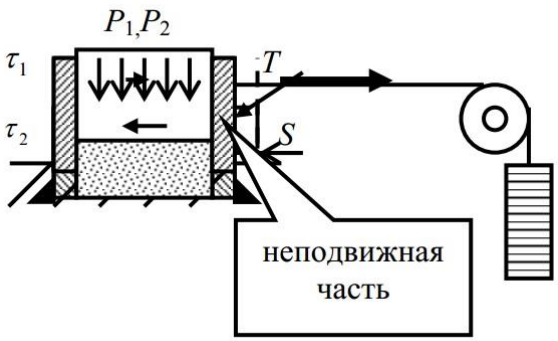


Рис. 1

Прикладываем P_1, затем прикладываем ступенями сдвигающую нагрузку T, происходит сдвиг (разрушение образца) при τ_1, где τ_i – это касательные напряжения. Берем второй образец с P_2 и получаем τ_2. Если мы проведем несколько таких опытов при различном вертикальном напряжении $\sigma = \frac{N}{A}$, где А – площадь образца в плоскости среза, то получим, что чем больше σ, тем больше предельное сопротивление грунта сдвигу τ. После проведения испытаний грунтов полученные зависимости подчиняются универсальному закону сдвига.

Предельное сопротивление грунтов сдвигу есть функция первой степени нормального напряжения.[5]

$$\tau = \sigma * \mathrm{t}g\,\varphi + c$$

4. Предельное состояние грунтовых массивов

Грунтовый массив представляется как сплошная среда, обладающая специфическими физико-механическими свойствами. Структурно можно выделить три группы грунтов, моделирование которых следует различать. Первая - песок, вторая - глины и третья - скальные породы. Основное отличие между ними в прочности связей между отдельными кристаллами и зернами среды. Существенное значение имеет также степень водонасыщенности среды, так как поровое давление играет важную роль в несущей способности грунтовых оснований. В настоящем разделе грунт рассматривается как однофазная среда.[2]

В моделировании грунтов вводят специальные характеристики прочности, которые определяют их несущую способность. Первой из них является константа - коэффициент сцепления, который характеризует прочность грунтовой среды на срез при отсутствии сжимающих напряжений. Второй служит угол внутреннего трения, который характеризует повышение прочности на сдвиг при всестороннем сжатии. Эти величины определяются экспериментально для каждого грунта при проведении геологических изысканий.

Широкое распространение получило условие прочности Кулона-Мора, в соответствии с которым на так называемых площадках скольжения

$$\tau \le C - \sigma_n tg\varphi \qquad (10)$$

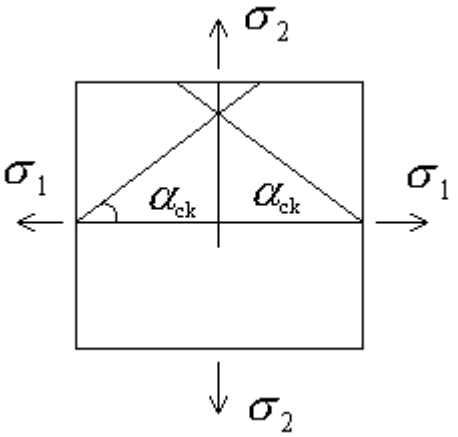


Рис. 2

Для плоской деформации ориентация этих площадок относительно главных напряжений указана на рис. 2, где угол скольжения определяется

$$\alpha_{ck} = \pm\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right) \tag{11}$$

Отметим, что во многих книгах по геомеханике правило знаков для напряжений берется иным, чем в обычных курсах механики деформируемого твердого тела. Поэтому следует осторожно относиться к приведенным в них формулам и соотношениям. При написании настоящего параграфа были использованы обозначения, принятые в теории упругости.

Схема решения задачи на основе условия (10) удобна при решении двумерных задач. Основой ее является итерационная процедура типа метода начальных напряжений. Разрешающее уравнение на шаге итерации имеет вид

$$\begin{aligned}\iint_S \left\{\sigma^{k+1}\right\}^T \{\delta\varepsilon\} dS = \iint_S \{Q\}^T \{\delta\vartheta\} dS + \\ + \int_{\Gamma_\sigma} \{P\}^T \{\delta\vartheta\} dl + \iint_{S_{сд}} \left\{\tau^{(k)} - \tau_{пр}{}^{(k)}\right\} \delta\gamma dS,\end{aligned} \tag{12}$$

где k - номер итерации; Γ_σ - граница области с заданными усилиями; $S_{сд}$ - область, где материал достиг предельного состояния; $\tau^{(k)}, \gamma$ - касательные напряжения и деформации сдвига на площадках скольжения, получаемые по линейным соотношениям теории упругости; $\tau_{пр}^{(k)}$ - предельные напряжения, вычисленные как

$$\tau_{пр}^{(k)} = C - \sigma_n^{(k)} tg\varphi \tag{13}$$

Область $S_{сд}$ находится из условия

$$\tau^{(k)} > \tau_{пр}^{(k)} \tag{14}$$

Проверка условий (14) осуществляется в квадратурных точках и в случае необходимости вычисляются слагаемые, соответствующие последнему интегралу в уравнении (12). Физический смысл этого слагаемого - работа до-

полнительных напряжений, которые необходимо приложить к массиву, чтобы линейные соотношения теории упругости дали решение нелинейной задачи, на соответствующих деформациях.[2]

Для вычисления этого интеграла необходимо найти по напряжениям $\sigma_x^{(k)}, \sigma_y^{(k)}, \tau_{xy}^{(k)}$ главные напряжения и площадки их действия (номер итерации будем опускать)

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}, \quad tg2\alpha = \frac{2\tau}{\sigma_y - \sigma_x} \qquad (15)$$

- нормальные и касательные напряжения на площадках скольжения.

$$\tau = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2)Sin(2\alpha_{ck}),$$

$$\sigma_n = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2) + \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2)Cos(2\alpha_{ck}), \qquad (16)$$

$$\sigma_\tau = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2) - \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2)Cos(2\alpha_{ck}),$$

- предельные касательные напряжения по соотношению (13). Деформации сдвига γ на этих площадках вычисляются по деформациям в виде

$$\gamma = (\varepsilon_{yy} - \varepsilon_{xx})Sin(2\beta) - \gamma_{xy}Cos(2\beta) \qquad (17)$$

где $\beta = \alpha + \alpha_{ck}$.

Для того чтобы обеспечить симметричное скольжение по площадкам, наклоненным по отношению к площадке главного сжимающего напряжения, интеграл по области скольжения преобразуется к двум слагаемым

$$\iint_{S_{c\partial}} \left(\tau^{(k)} - \tau_{np}^{(k)}\right)\delta\gamma dS = \frac{1}{2}\iint_{S_{c\partial}} \left[\left(\tau^{(k)} - \tau_{np(+)}^{(k)}\right)\delta\gamma + \left(\tau^{(k)} - \tau_{np(-)}^{(k)}\right)\delta\gamma\right]dS \qquad (18)$$

где $\tau_{\text{пр}(+)}^{(k)}, \tau_{\text{пр}(-)}^{(k)}$ соответствуют вычислению при α_{ck} положительном и отрицательном в соответствии с (11).

По окончанию итерационного процесса истинное напряженное состояние определяется следующим образом:

a. по напряжениям $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ определяются главные напряжения (15);

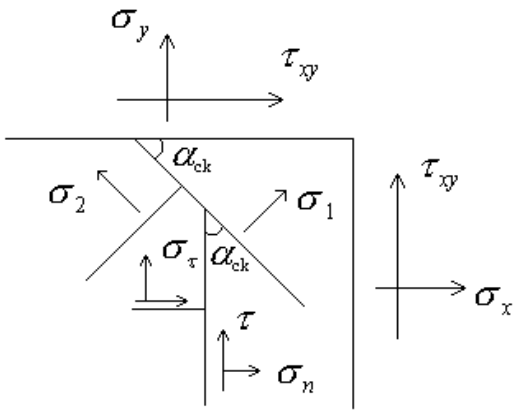
b. вычисляют касательные напряжения τ и предельные напряжения $\tau_{пр}$ на возможных площадках сдвига;

c. если $\tau > \tau_{пр}$, то принимают $\tau = \tau_{пр}$; вычисляют истинные напряжения $\sigma_x^{(u)}, \sigma_y^{(u)}, \tau_{xy}^{(u)}$ в виде

$$\sigma_x^u = \frac{1}{2}(\sigma_n + \sigma_\tau) - \frac{1}{2}(\sigma_n - \sigma_\tau)Cos2\beta - \tau Sin2\beta,$$
$$\sigma_y^u = \frac{1}{2}(\sigma_n + \sigma_\tau) + \frac{1}{2}(\sigma_n - \sigma_\tau)Cos2\beta + \tau Sin2\beta, \qquad (19)$$
$$\tau_{xy}^u = \frac{1}{2}(\sigma_\tau - \sigma_n)Sin2\beta - \tau Cos2\beta.$$

В тех зонах, где среда не достигает предельного состояния, $\sigma_x^{(u)} = \sigma_x$, $\sigma_y^{(u)} = \sigma_y$, $\tau_{xy}^{(u)} = \tau_{xy}$.

Иллюстрация пересчета напряжений с исходной площадки, ориентированной относительно глобальных осей x, y к площадке действия главных напряжений и далее к площадкам скольжения приведена на следующем рисунке:



Для обобщения этого критерия на трехмерное напряженное состояние подставим (16) в неравенство (10). В результате получим

$$\sigma_1 - \sigma_2 \frac{1 - Sin\varphi}{1 + Sin\varphi} - 2Ctg\alpha_{ck} \le 0 \qquad (20)$$

Составляя аналогичные неравенства для всех возможных пар главных напряжений σ_1, σ_2, σ_3, получим систему неравенств

$$\sigma_i - \sigma_j \frac{1 - Sin\varphi}{1 + Sin\varphi} - 2Ctg\alpha \le 0, \tag{21}$$

где $i = 1,1,2$, $j = 2,3,3$.

Широкое распространение в трехмерном случае получил критерий прочности Мизеса-Боткина, который сформулирован для интенсивности касательных напряжений

$$\tau_i = \frac{1}{\sqrt{3}}\sigma_i, \tag{22}$$

где σ_i - интенсивность напряжений, и среднего напряжения (гидростатического давления)

$$\sigma_0 = \frac{1}{3}\left(\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}\right) \tag{23}$$

в виде функции текучести

$$F(\sigma) = \tau_i - C^* + \sigma_0 tg\varphi^* = 0, \tag{24}$$

где $C*, \varphi*$- сцепление и угол внутреннего трения на октаэдрических площадках, которые связаны с C и φ следующим соотношением

$$tg\varphi* = \frac{2\sqrt{3}Sin\varphi}{3 - Sin\varphi}; \quad C* = \frac{2\sqrt{3}CCos\varphi}{3 - Sin\varphi}. \tag{25}$$

В этом случае используются методики решения упругопластических задач в рамках теории течения. Отличие лишь в конкретном выражении упругопластической матрицы. В частности, справедливо

$$\Delta\sigma_{ij} = 2G\left(\varepsilon_{ij} + \delta_{ij}\frac{3\mu}{1 - 2\mu}\Delta\varepsilon_0\right) - \\ - \tilde{\alpha}\frac{\left(\frac{G}{\tau_i}\sigma_{ij}' + Ktg\varphi^*\delta_{ij}\right)\sum_{kl}\left(\frac{G}{\tau_i}\sigma_{kl}' + Ktg\varphi^*\delta_{kl}\right)\Delta\varepsilon_{kl}}{G + Ktg^2\varphi^*}, \tag{26}$$

где $K = \dfrac{E}{3(1-2\mu)}$ - модуль всестороннего сжатия.

В некотором смысле наличие внутреннего трения играет роль упрочнения, если проводить аналогию с теорией пластического течения.

Для учета физической нелинейности кривой деформирования можно использовать так называемую двухпараметрическую модель, в которой определяются зависимости модуля сдвига G и модуля всестороннего сжатия K как функции от напряженного состояния, т. е.

$$K = K(\sigma_0, \tau_i), \quad G = G(\sigma_0, \tau_i). \tag{27}$$

В этом случае матрица упругости $[D]$ имеет вид

$$[D] = \begin{bmatrix} K+\frac{4}{3}G & K-\frac{2}{3}G & K-\frac{2}{3}G & 0 & 0 & 0 \\ K-\frac{2}{3}G & K+\frac{4}{3}G & K-\frac{2}{3}G & 0 & 0 & 0 \\ K-\frac{2}{3}G & K-\frac{2}{3}G & K+\frac{4}{3}G & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G \end{bmatrix}. \tag{28}$$

Если используется метод секущих, то определяются секущие модули K_c, G_c, а если используется метод приращений, то вводятся в рассмотрение касательные модули K_k, G_k. В частности, приводятся

$$\begin{aligned} &K_c = K_0(1+\alpha\sigma_0), \quad G_c = G_0(1-f), \\ &K_k = K_0(1+\alpha\sigma_0)^3, \quad G_k = G_0(1-f)^2, \end{aligned} \tag{29}$$

где $f = 1 - \dfrac{\tau_i}{A}, \quad A = c_0 - \sigma_0 tg\varphi_0$. При этом отмечается, что при декомпрессии (разгрузке) $K_k^{\partial} \approx 3K_k$.[2]

5. Актуальность метода конечных элементов

В настоящее время метод конечных элементов (МКЭ) является самым популярным способом решения практических задач механики деформируемого твердого тела (МДТТ). С его помощью проводят расчеты по определению напряженно-деформированного состояния и несущей способности реальных конструкций самых различных отраслей техники и строительства. При этом эффективно решаются задачи как общей, так и локальной прочности. Развитие МКЭ на динамические и нелинейные проблемы предоставляет возможность достоверно моделировать такие сложные процессы как разрушение, удар, потерю устойчивости, штамповка, вытяжка и т.д. Практически все задачи МДТТ получили постановку и алгоритмы решения в рамках конечно-элементных методик.

Причина столь большой популярности МКЭ кроется в его алгоритмичности и хорошей совместимостью с системами автоматического проектирования (САПР) и их твердотельным моделированием. Это позволяет создавать информационные подсистемы, которые естественно вкладываются в виде составных фрагментов в различные CAD/CAM/CAE системы. В результате получается средство для осуществления полного цикла проектирование – производство в электронной форме.

На сегодняшний день, в эпоху компьютерных и интернет технологий метод конечных элементов широко используется в ЭВМ. Наиболее распространёнными вычислительными системами, основанными на методе конечных элементов, являются:

1. ABAQUS - универсальная система МКЭ анализа с встроенным пре/постпроцессором;

2. ANSYS - универсальная система МКЭ анализа с встроенным пре/постпроцессором;

3. COMSOL Multiphysics - универсальная система МКЭ анализа с пре/постпроцессором;

4. DEFORM-2D/3D - система МКЭ анализа для моделирования технологических процессов обработки давлением и резанием;

5. FreeFEM++ - реализация метода МКЭ для решения систем уравнений в частных производных в виде открытой среды программирования;

5.1 Общая схема алгоритма МКЭ

Последовательность процедур алгоритма МКЭ может быть представлена в следующем виде:

1. Дискретизация рассматриваемой области

Замена среды совокупностью конечных элементов (КЭ) заданной формы, соединенных между собой в узлах конечным числом связей. Этот этап, несмотря на видимую простоту, имеет значение, хотя он и не обусловлен строгими теоретическими рекомендациями и во многом определяется интуитивно.

Процесс дискретизации может быть разделен на два этапа: разбиение тела на элементы и нумерация элементов и узлов.

При разбиении любой двумерной области на элементы сначала делится на четырехугольные и треугольные подобласти или зоны, которые затем подразделяются на треугольники. Границы между подобластями должны проходить там, где изменяются геометрия, приложенная нагрузка или свойства элементов.

Что касается нумерации узлов, то она, как правило, производится слева направо. Нумерация узлов влияет на эффективность вычислений, необходимых для получения решения.

2. Выбор вариационного принципа

Выбор вариационного принципа определяет основные неизвестные функции, через которые впоследствии устанавливаются остальные неизвестные. В задачах механики твердого деформируемого тела используются следующие вариационные принципы: принцип Кастильяно (варьируются напряжения), принцип Рейсснера (варьируются перемещения и напряжения), принцип Ху-Вашицы (варьируются перемещения, напряжения и деформа-

ции). В практических же расчетах чаще всего используется принцип Лагранжа.

3. Выбор аппроксимирующих функций

При кусочно-непрерывной аппроксимации предполагается, что перемещения внутри элемента могут быть выражены через перемещения в его узлах. Эта связь описывается при помощи так называемых функций формы, которые аппроксимируют действительное поле перемещений внутри элемента.

От выбора аппроксимирующих функций в значительной степени зависит точность решения. Эти функции должны удовлетворять следующим критериям:

a. критерию полноты: при стремлении размеров элемента к нулю выбранные функции формы должны обеспечивать любые простые значения;

b. критерию совместимости: функции формы должны обеспечивать непрерывность перемещений и ее производных до n-1 порядка на границе между элементами.

При выполнении этих критериев с увеличением числа элементов, моделирующих конструкцию, результаты расчета монотонно сходятся к точному решению. Нарушение критерия совместимости в ряде случаев приводит к достоверному результату, но сходимость в этих случаях не будет монотонной.

4. Реализация вариационного принципа

На этом этапе осуществляется вычисление матриц жесткостей элементов и построение глобальной матрицы системы алгебраических уравнений и вектора узловых сил. Глобальная матрица жесткости может быть получена несколькими методами:

a. непосредственного сложения скоростей;

b. конгруэнтного преобразования;

c. при помощи конечно-разностных операторов;

5. *Учет граничных условий*

Полученная на основе указанных методов матрица жесткости является вырожденной, поскольку в соответствии с уравнениями равновесия заданной системы часть уравнений (для пространственных систем – шесть, а для плоских – три) окажутся взаимно зависимыми. Корректировка этой матрицы при учете граничных условий приводит к невырожденной системе линейной алгебраических уравнений.

6. *Решение системы линейных алгебраических уравнений*

Для решения системы алгебраических уравнений используются стандартные программы, имеющиеся в математическом обеспечении ЭВМ, и специально подготовленные и лучшим образом учитывающие симметрию и структуру матрицы жесткости системы – редкозаполненность или ленточность.

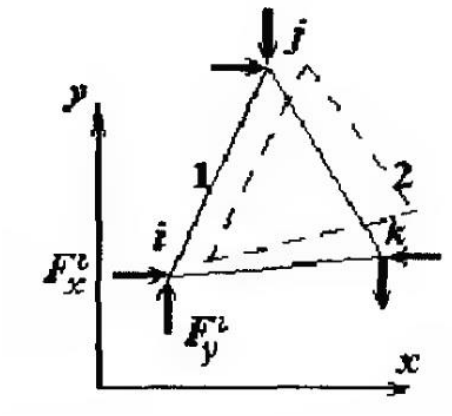
7. *Определение деформаций и напряжений*

После определения узловых перемещений в соответствии с известными соотношениями теории упругости могут быть определены деформации и напряжения.

5.2 Плоская задача теории упругости

В плоской задаче теории упругости точки напряженной области получают перемещения U и V вдоль осей x и y соответственно. Каждый из этих компонентов является непрерывной функцией координат, и именно эти функции отыскиваются методами аналитической теории упругости путем рассмотрения уравнений совместности деформаций, связи напряжений и деформаций, уравнений равновесия для бесконечно малого элемента области и их совместного интегрирования при заданных граничных условиях.

При решении задач МКЭ исследуемая область разделяется на отдельные элементы конечных размеров, для них составляются уравнения, удовлетворяющие условиям совместности, связи и равновесия, а процесс аналитического интегрирования заменяется решением системы линейных уравнений, связывающих силы и перемещения в узлах элементов.



Простейшим элементом является треугольный элемент с тремя узлами в вершинах, номера которых в общей сети элементов *i, j* и *k* (см. рисунок). Под воздействием шести компонент узловых сил элемент перемещается из положения 1 в положение 2, при этом новое положение трех узлов в вершинах элемента характеризуется шестью компонентами узловых перемещений.

Анализ свойств элементов методами алгебры матриц приводит к шести линейным уравнениям, связывающим узловые перемещения и узловые силы элемента:

$\{F\} = [K]\{\delta\}$, где

$\{F\} = \{F_{ix}, F_{iy}, F_{jx}, F_{jy}, F_{kx}, F_{ky}\}^T$ - вектор узловых сил; $\{\delta\} = \{\delta_{ix}, \delta_{iy}, \delta_{jx}, \delta_{jy}, \delta_{kx}, \delta_{ky}\}^T$ - вектор узловых перемещений; $[K] = \Delta[A]^{-1T}[B]^T[D][B][A]^{-1T}$ - матрица жесткости элемента; Δ - площадь элемента.

$$[A] = \begin{bmatrix} 1 & x_i & y_i & 0 & 0 & 0 \\ 1 & x_j & y_j & 0 & 0 & 0 \\ 1 & x_k & y_k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_i & y_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_j & y_j \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_k & y_k \end{bmatrix}$$ - матрица узловых координат;

$$[B] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}; \quad [D] = \frac{E}{(1-2\nu)(1+\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix}$$ - матрица коэффициентов уравнений закона Гука для плоской деформации; E - модуль упругости Юнга; ν - коэффициент Пуассона.[6]

$\{\sigma\} = \{\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}\}^T = [D]\{\varepsilon\} = [D][B][A]^{-1}\{\delta\}$,

Из матриц жесткости элементов формируется матрица жесткости всей системы элементов $\lfloor K_c \rfloor$, элементы которой являются коэффициентами си-

стемы линейных алгебраических уравнений, связывающих $2N$ узловых сил с $2N$ узловыми перемещениями (N – число узлов сети конечных элементов):

$$\{F_c\} = [K_c]\{\delta_c\}.$$

Решение этой системы уравнений относительно вектора $\{\delta_c\}$ дает решение упругой задачи в перемещениях. Далее по найденным перемещениям узлов вычисляются напряжения и деформации в элементах:

$$\{\varepsilon\} = \{\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}\}^T = [B][A]^T\{\delta\},$$

$$\{\sigma\} = \{\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}\}^T = [D][B][A]^{-1}\{\delta\}.$$

6. *История программы ANSYS*

История программы ANSYS насчитывает уже около 40 лет. В течение этого времени компания ANSYS Inc. непрерывно совершенствует технологию, создает гибкие и удобные системы численного моделирования для различных отраслей производства, что позволяет различным компаниям выполнять полноценный анализ своих проектных разработок и тем самым добиваться максимальной эффективности затрат на вычислительную технику и программные средства.

Фирму ANSYS, Inc. основал доктор Джон Свенсон в 1970 году с целью коммерциализации методов компьютерного моделирования. Он стал одним из пионеров внедрения конечно-элементного анализа (FEA), способствовал становлению компьютерного проектирования (CAE). Сегодня многие ведущие корпорации мира имеют программное обеспечение фирмы ANSYS. В число клиентов компании ANSYS входит первая десятка промышленных корпораций из числа ста наиболее процветающих фирм мира, публикуемых в рубрике “Global 100” журнала Fortune Magazine.

Предлагаемые фирмой ANSYS средства численного моделирования и анализа удобны для пользователя, совместимы с другими пакетами, работают на различных платформах и позволяют решать связанные задачи механики и физики.

В настоящее время программа ANSYS представляет собой многоцелевой пакет проектирования и анализа, признанный во всем мире. Первая редакция программы значительно отличалась от последних ее версий и касалась только решения задач теплопередачи и прочности в линейной постановке. Как и большинство других программ того времени, она работала в пакетном режиме и лишь на “больших” машинах.

Сегодня ANSYS - это чрезвычайно мощная и удобная программа, предназначенная для проведения в единой среде анализа задач прочности, тепла, электромагнетизма, гидрогазодинамики. Возможен также многодис-

циплинарный связанный анализ, объединяющий все четыре типа перечисленных задач и оптимизация на основе всех указанных типов анализа.

6.1 Возможности ANSYS в вопросе механике грунтов

Почва, как упругий материал, ведет себя иначе, чем, например, сталь. В случае сжатия грунт может выдерживать большие нагрузки, однако в случае сдвига небольшая нагрузка может привести к существенным деформациям. Традиционные модели неприменимы при моделировании и анализе подобных явлений. Модуль под названием Geomechanics, который доступен в более поздних версиях программы, в свою очередь, комплектуется набором сложных моделей материалов, описывающих поведение грунтов, в частности, внутреннее трение и сцепление частиц почвы. Эти модели (Cam-Clay, Drucker-Prager, Mohr-Coulomb, Matsuoka-Nakai и Lade-Duncan), могут быть использованы при оценке устойчивости откосов, подпорных стенок и других подобных сооружений.

Модуль Geomechanics также поставляется с набором инструментов для моделирования механики горных пород и бетона. Встроенные модели Willam-Warnke, Bresler-Pister, Ottosen и Hoek-Brown могут быть применены или дополнены для описания более широкого спектра хрупких материалов.

ANSYS позволяет проводить вычисления любой сложности, моделировать самую сложную геометрию, что делает этот пакет программ безусловным лидером среди остальных конкурентов. А интуитивно понятный интерфейс позволяет пользователю с легкостью варьировать возможностями программы, упрощая тем самым работу с ней.

7. Решение модельной задачи

В качестве модельной задачи рассмотрим модель грунта, которая представлена на следующем рисунке 3:

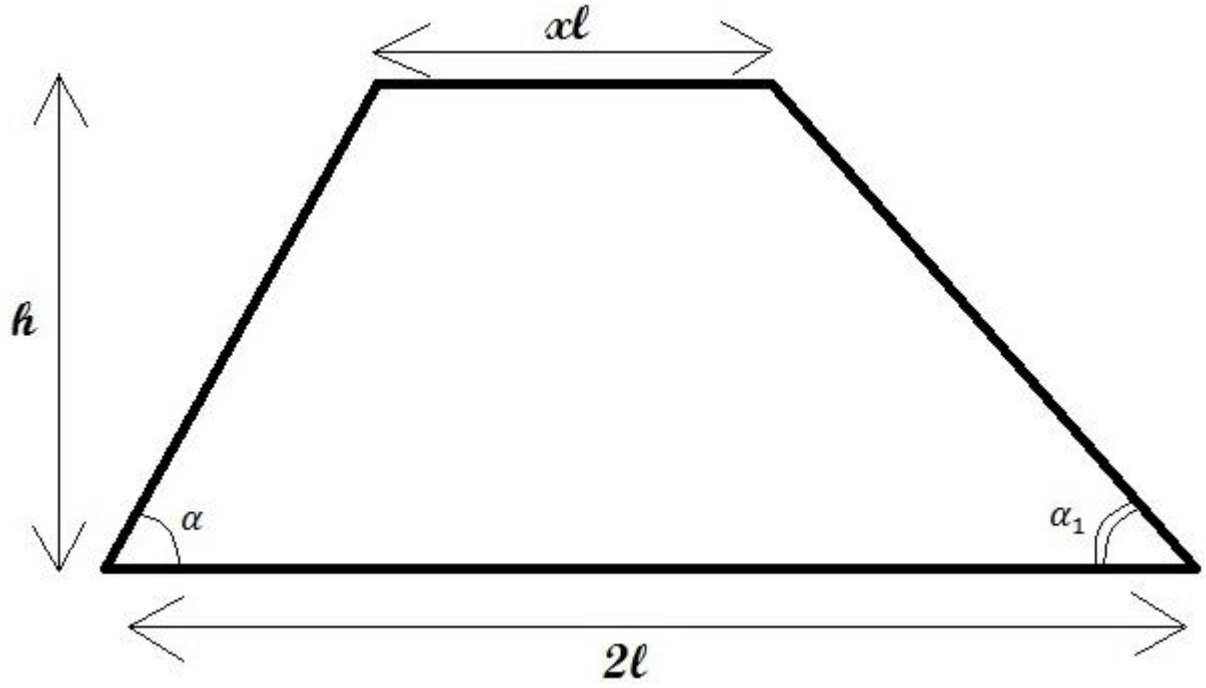


Рис. 3

Механические характеристики ряда широко распространенных грунтов приведены ниже (табл. 1).

Таблица 1. Механические характеристики грунтов.

№	Основной грунт (условное обозначение)	ρ [кг/м^3]	E [Мпа]	μ	С [КПа]	φ [гр]
1	Торф	1020	3	0.22	14	6
2	Глина твердая, полутвердая	1840	15	0.42	32	16
3	Глина туго-пластичная	1850	10	0.42	20	13
4	Глина мягко-пластичная	1870	6	0.42	16	10
5	Глина туго-пластичная заторфованная	1310	3.8	0.22	18	11
6	Глина мягко-пластичная заторфованная	1110	2.4	0.22	11	6
7	Суглинок твердый, полутвердый	1990	15	0.35	19	20
8	Суглинок туго-пластичный	1960	12	0.35	24	19
9	Суглинок мягко-пластичный	1940	6.2	0.35	15	14
10	Песок пылеватый	1960	12	0.3	1.5	25
11	Песок гравелистый	2000	50	0.3	8	40
12	Гипс, ангидрид (прочные 10г)	2900	2950	0.47	15	19

В качестве основного расчетного материала взят грунт под названием глина твердая/полутвердая. При этом рассматривалась насыпь высотой h, длиной нижнего основания $2l$, а верхнего основания xl, где величина x варьировалась путем изменения углов α и α_1. В таблице 2 представлены размерные данные для всех переменных, использованных в задаче.

Таблица 2. Данные задачи

№	Название величины	Численное значение	Размерность
1	Высота (h)	30	метры
2	Длина (l)	30	метры
3	Углы откоса (α,α1)	85, 40	градусы

Задача решалась в ППП ANSYS 14.5 плоскими конечными элементами сплошной среды, работающими в условиях плоской деформации следующим образом: во-первых, бралась определенная насыпь, которая нагружалась собственным весом, умноженным на коэффициент, который в дальнейшем будем называть коэффициентом запаса. Расчет проводился до тех пор, пока задача в программе не начинала расходиться. Варьируя коэффициентами сцепления, углом внутреннего трения, высотой насыпи, а также углами естественного откоса нашей целью было найти зависимости вышеперечисленных постоянных от коэффициента запаса. Во-вторых, нижней грани насыпи задали жесткое закрепление: $u_x = u_y = 0$, при этом изначально сетка рассматривалась размером 20x15 (см. рис. 4).

Критерием потери устойчивости насыпи служила расходимость алгоритма в программе, после этого, происходило увеличение констант грунта, и задача решалась снова. Исследования проводились до тех пор, пока коэффициент запаса не достигал единицы. Это означало тот факт, что исследуемая насыпь с выбранными характеристиками, выдерживает нагрузку под собственным весом и не разваливается.

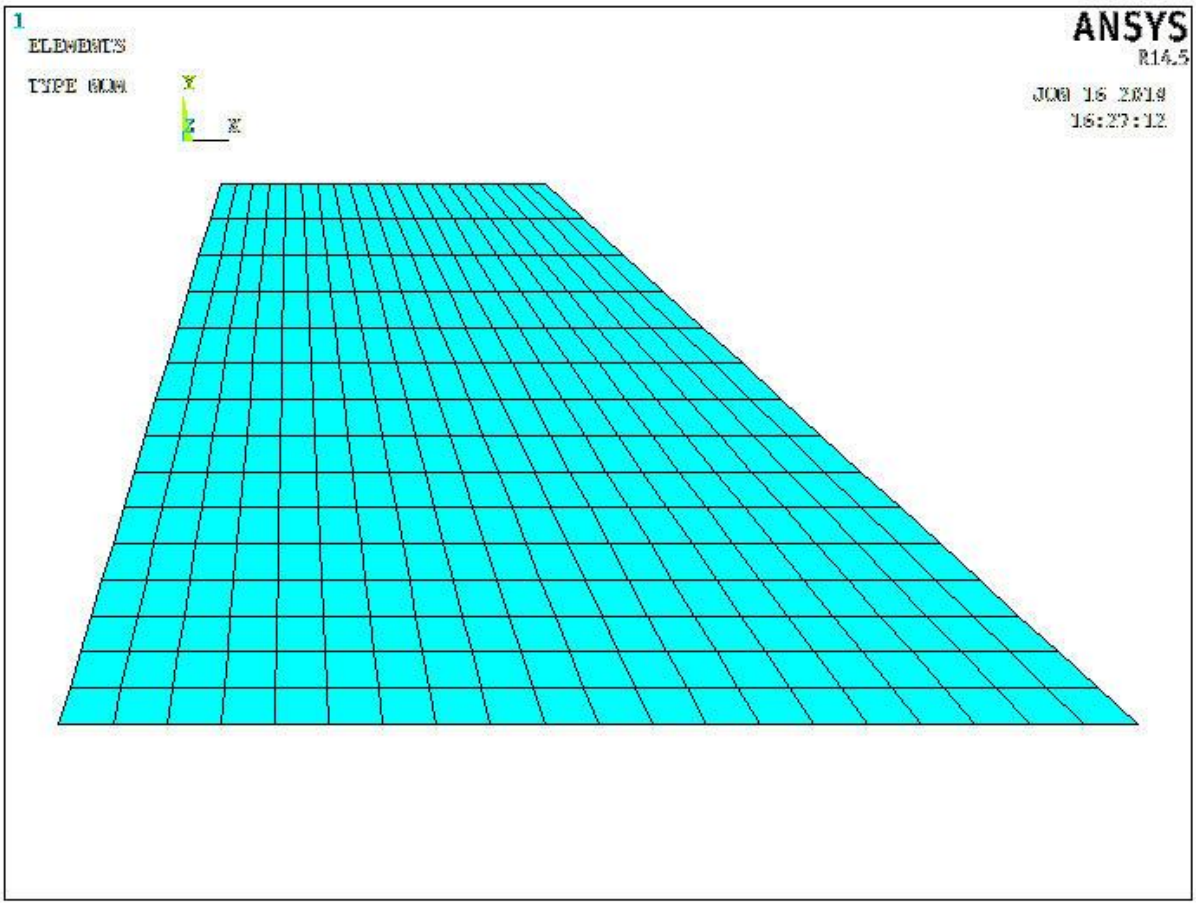


Рис. 4

7.1 Исследование влияния сцепления на несущую способность насыпи.

Исследования проводились при фиксированных значениях таких констант как угол внутреннего трения (φ), углы откоса (α, α_1), высота (h) и постоянной сетки размером 20x15. Как уже было сказано выше, если задача расходилась, то результаты фиксировались, а коэффициент сцепления увеличивался. Такой алгоритм выполнялся до тех пор, пока задача не решалась, это и означало то, что коэффициент запаса достиг значения 1. На рисунках 5-7 показано изменение зон пластической деформации от увеличения сцепления, а на рисунке 8 - зависимость коэффициента сцепления от коэффициента запаса. Также были проведены эксперименты по изучению влияния увеличения сцепления на прогиб и напряжения (по Мизесу). Рисунки 9-11 показывают изменения прогиба, а 12-14 изменения напряжений.

$c = 56,60;\ \varphi = 16; h = 30;$

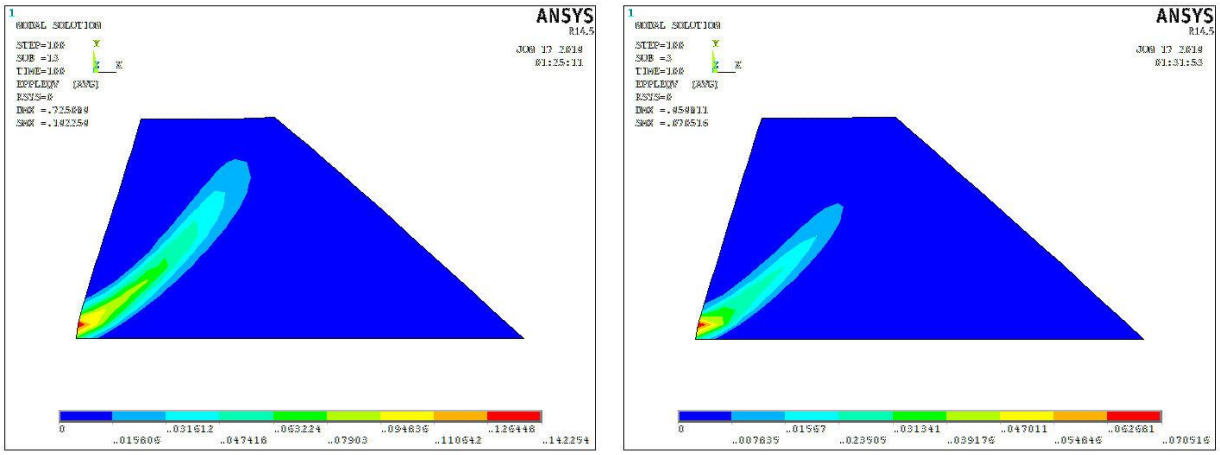


Рис. 5-6

$c = 70, \varphi = 16, h = 30$

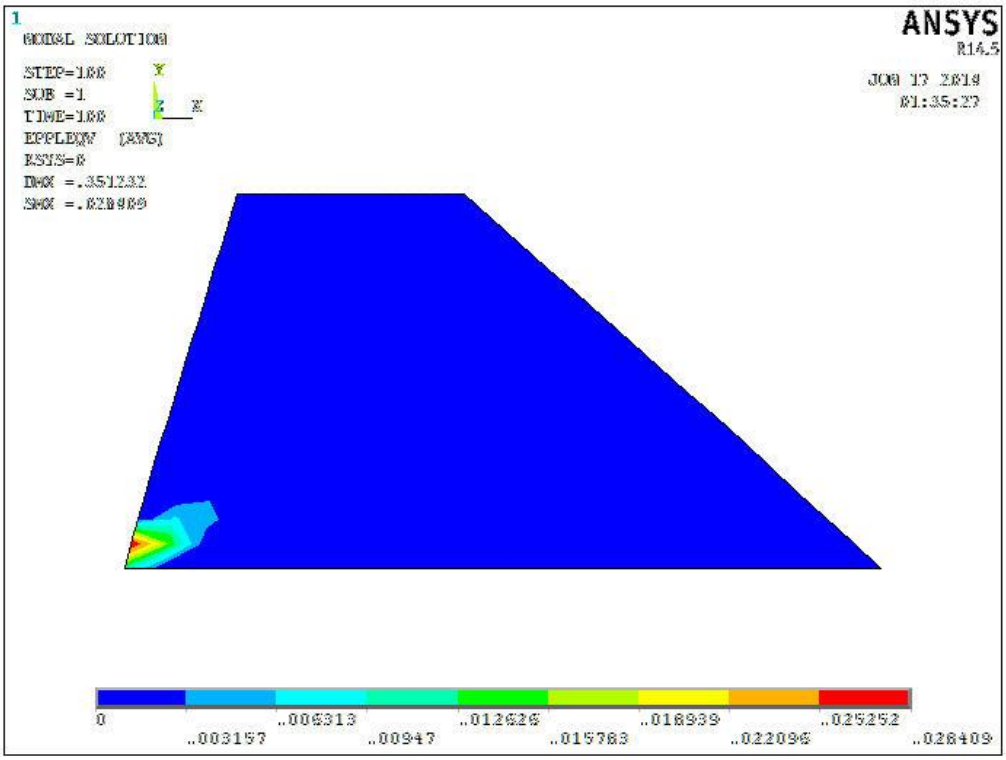


Рис. 7

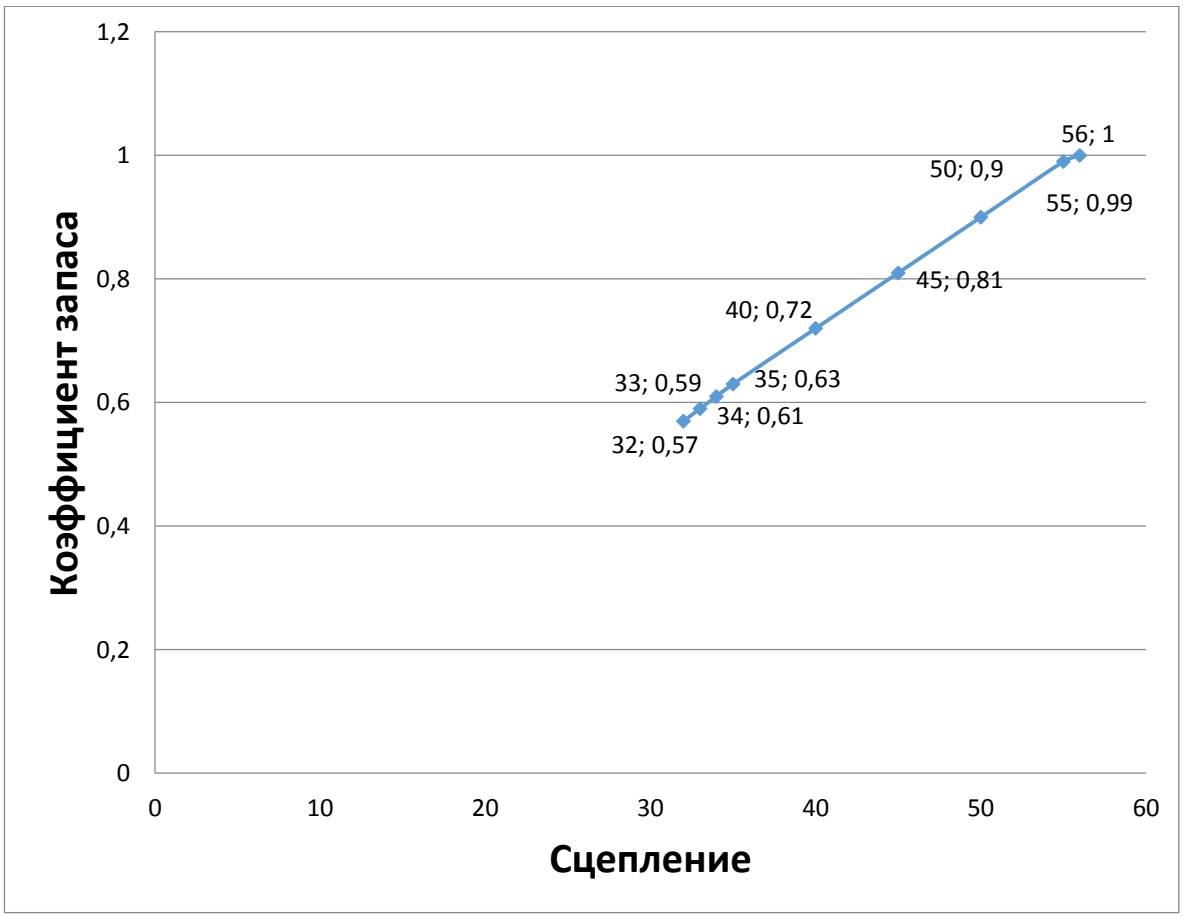


Рис. 8

$$c = 56,60;\ \varphi = 16; h = 30;$$

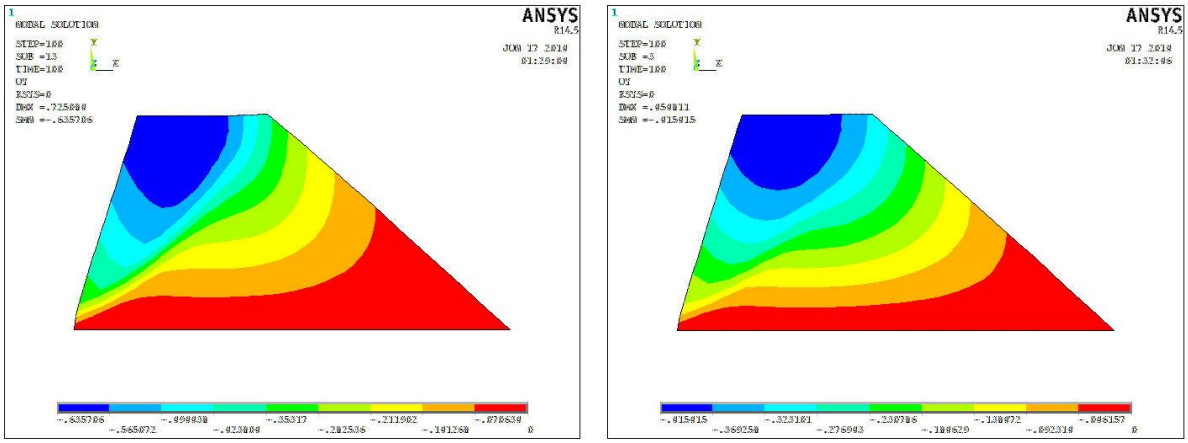


Рис. 9-10

$$c = 70, \varphi = 16, h = 30$$

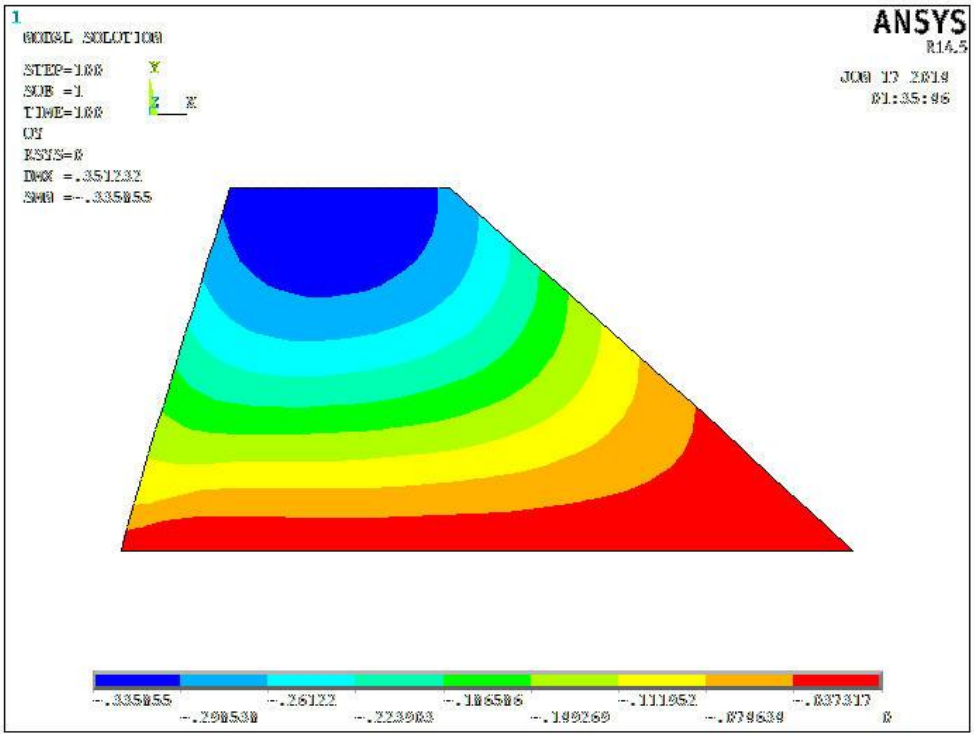


Рис. 11

$$c = 56, 60;\ \varphi = 16;\ h = 30;$$

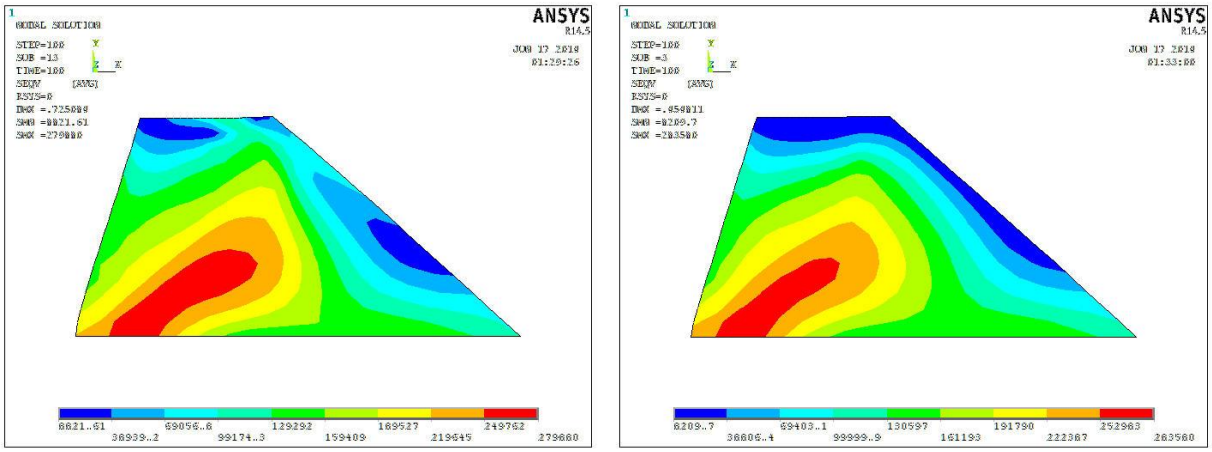


Рис. 12-13

$$c = 70, \varphi = 16, h = 30$$

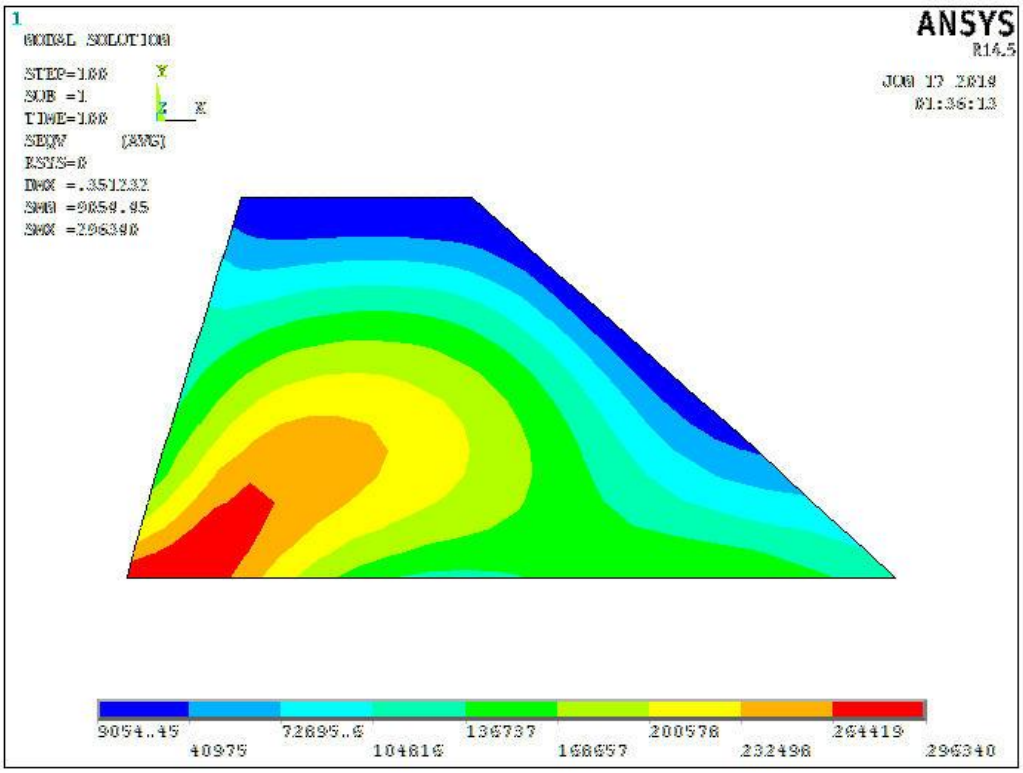


Рис. 14

Анализ результатов проведенного вычислительного эксперимента показывает, что при увеличении угла внутреннего трения коэффициент устойчивости грунтового откоса возрастает. При этом уменьшается прогиб, а напряжения также возрастают, вследствие увеличения «сопротивляемости» насыпи.

7.2 Исследования влияния угла внутреннего трения на несущую способность насыпи

Проводились эксперименты также для и угла внутреннего трения. Константами в данном опыте выступали сцепление, высота и углы откоса. На рисунках 15-17 показаны зоны изменения пластических деформаций. Рисунок 18 показывает зависимость коэффициента запаса от угла внутреннего трения.

$$c = 32;\ \varphi = 25,26;\ h = 30;$$

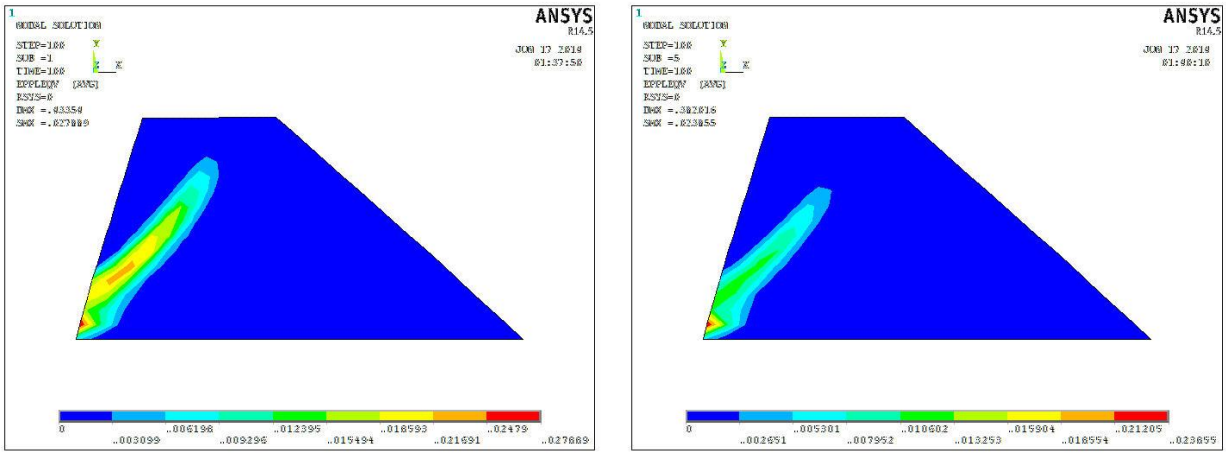


Рис. 15-16

$$c = 32;\ \varphi = 27;\ h = 30;$$

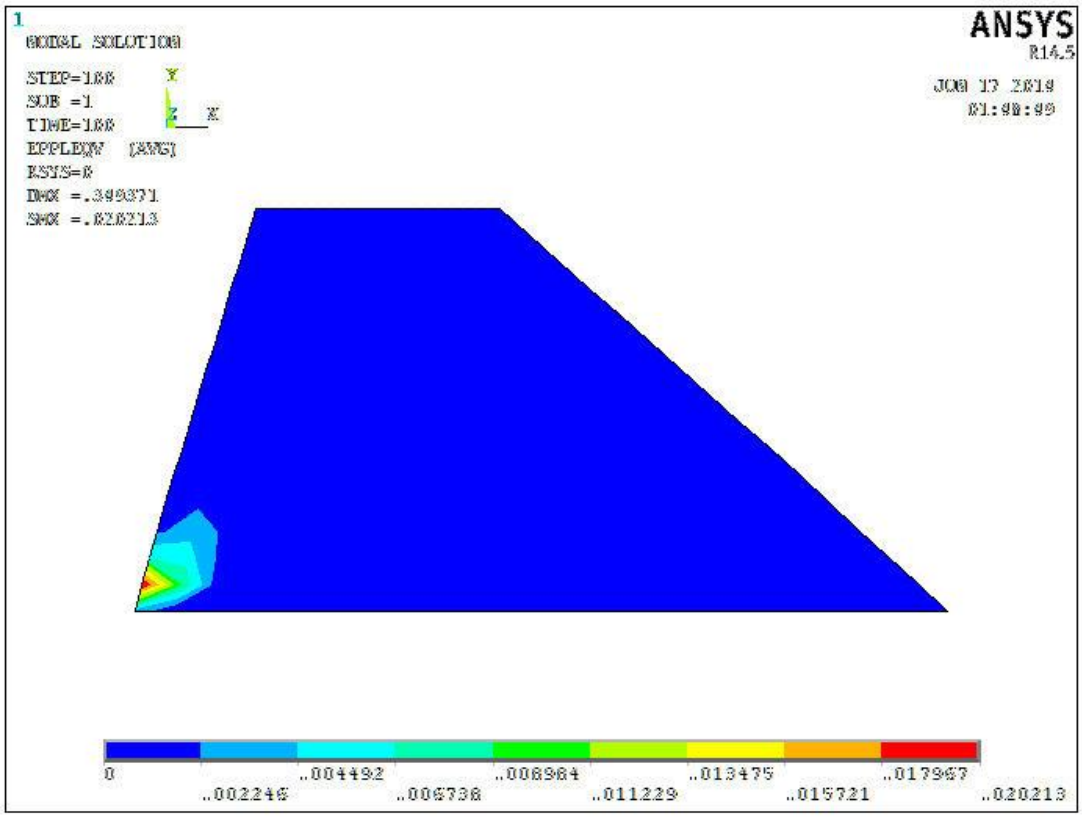


Рис. 17

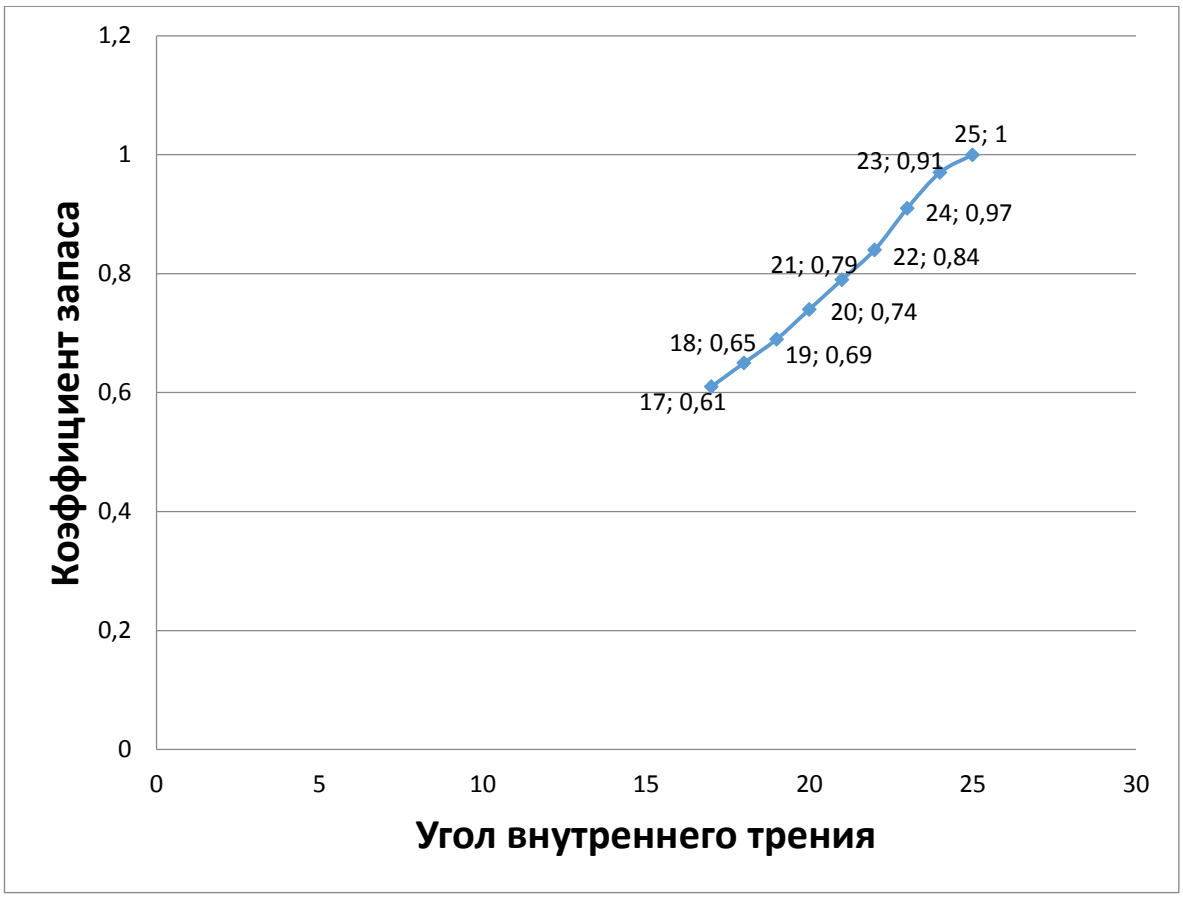


Рис. 18

При этом проведены исследования влияния угла внутреннего трения на прогиб (перемещения) насыпи. Они представлены на рисунках 19-21. На рисунках 21-23 приведены зоны интенсивности напряжений (по Мизесу).

$$c = 32;\ \varphi = 25,26;\ h = 30$$

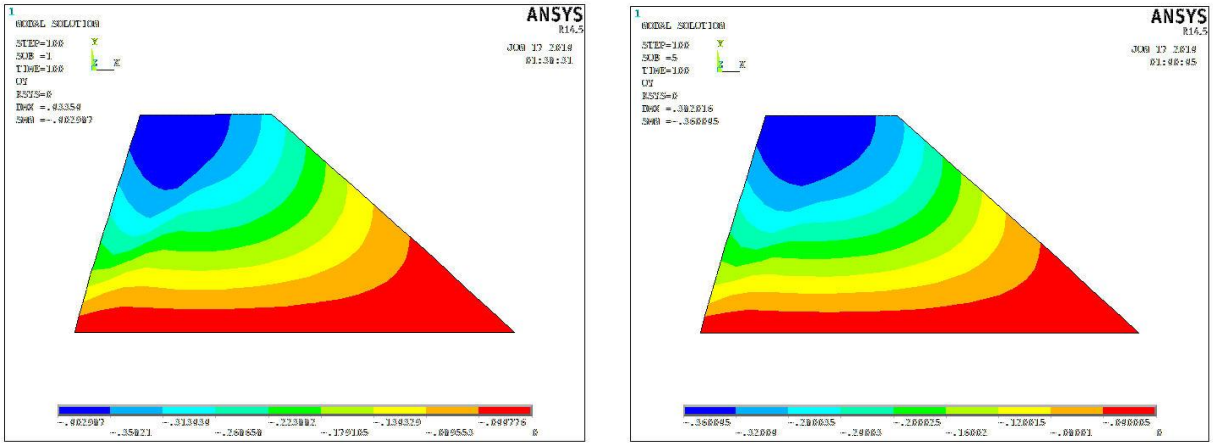


Рис. 19-20

$$c = 32, \varphi = 27, h = 30$$

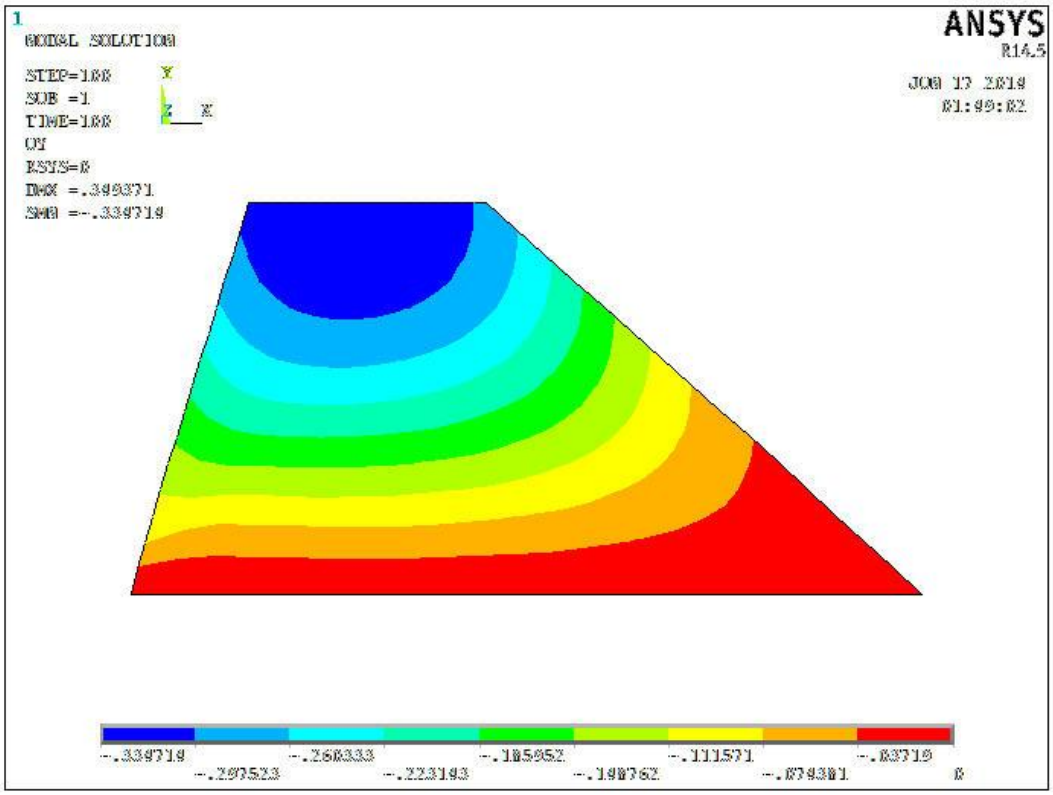
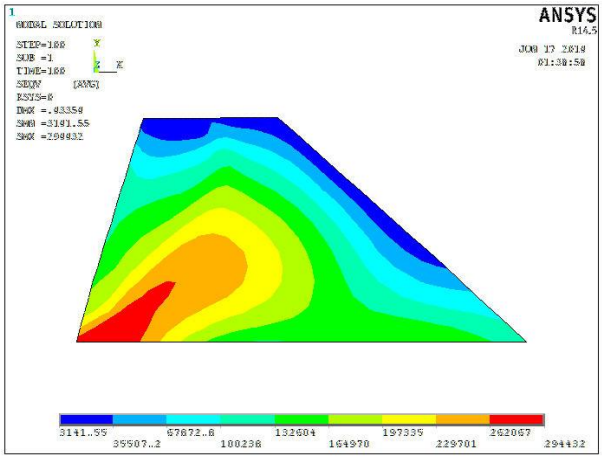


Рис. 21

$$c = 32;\ \varphi = 25, 26;\ h = 30$$



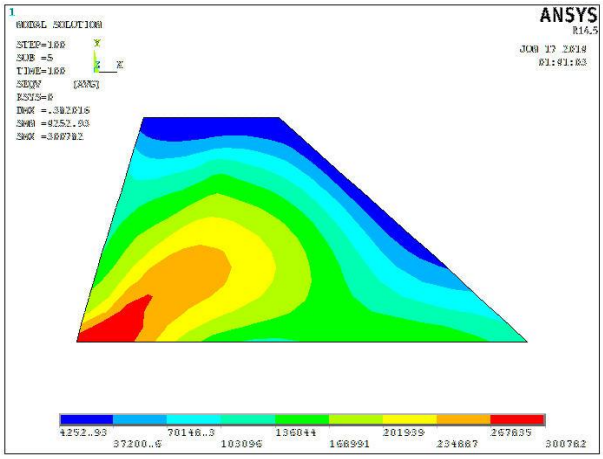


Рис. 22-23

$$c = 32;\ \varphi = 27;\ h = 30$$

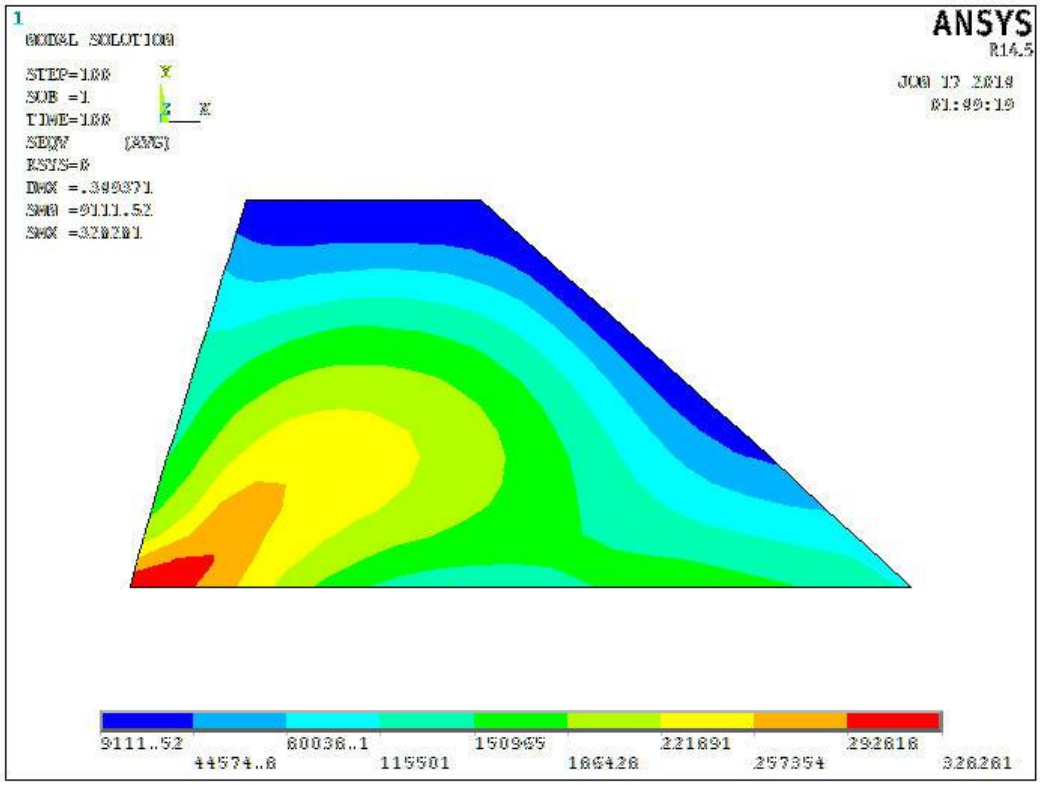


Рис. 24

Анализ исследований показал, что при увеличении угла внутреннего трения, коэффициент запаса возрастает, а также уменьшается прогиб, однако как свидетельствуют результаты исследований, напряжения при увеличении угла внутреннего трения также увеличиваются. Как уже было сказано выше, это происходит потому, что сопротивляемость разрушению несущей способности возрастает с увеличением коэффициента запаса.

7.3 Исследование влияния высоты насыпи на ее несущую способность.

Был проведен ряд экспериментов влияния высоты насыпи на суммарные перемещения (прогиб), напряжения и величину пластических деформаций. Результаты исследований представлены на следующих рисунках.

$$c = 32;\ \ \varphi = 16;\ h = 35, 40;$$

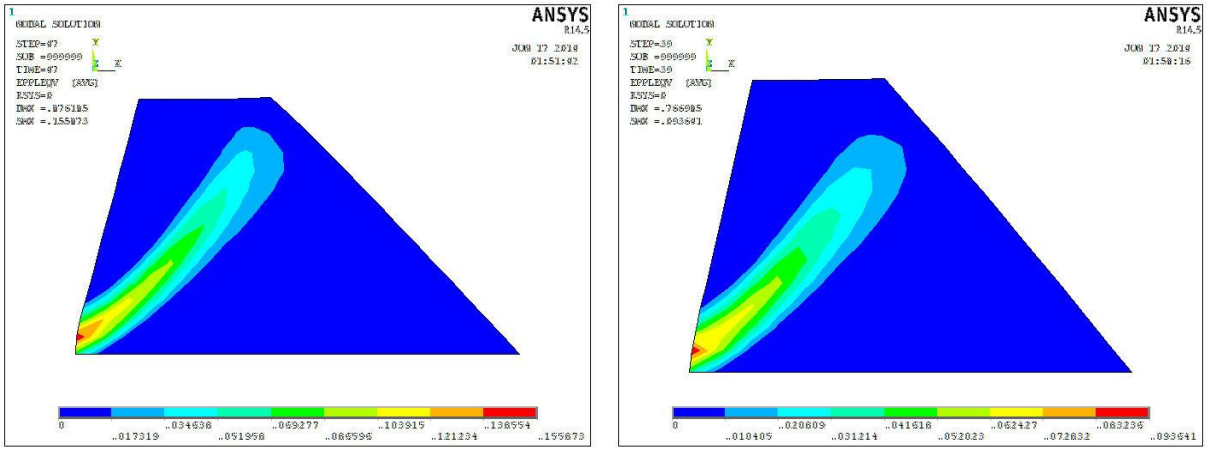


Рис. 25-26

$$c = 32;\ \ \varphi = 16;\ h = 50;$$

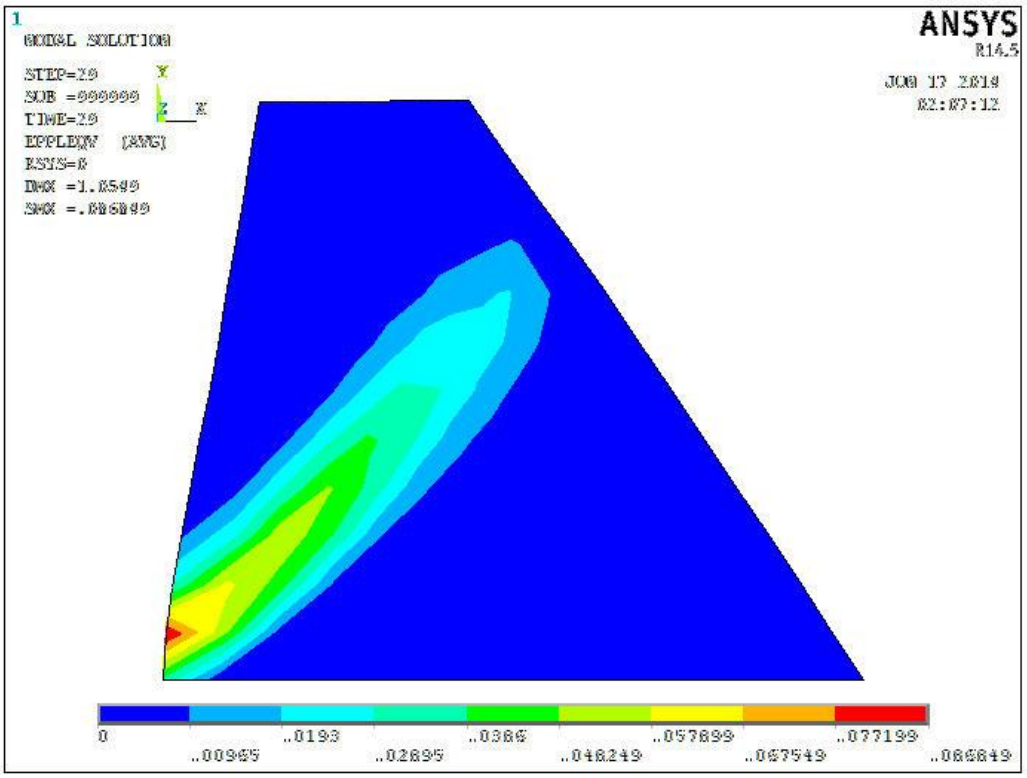


Рис. 27

На следующих рисунках 28-30 представлены изменения прогиба от увеличения высоты насыпи.

$$c = 32;\ \ \varphi = 16;\ h = 35, 40;$$

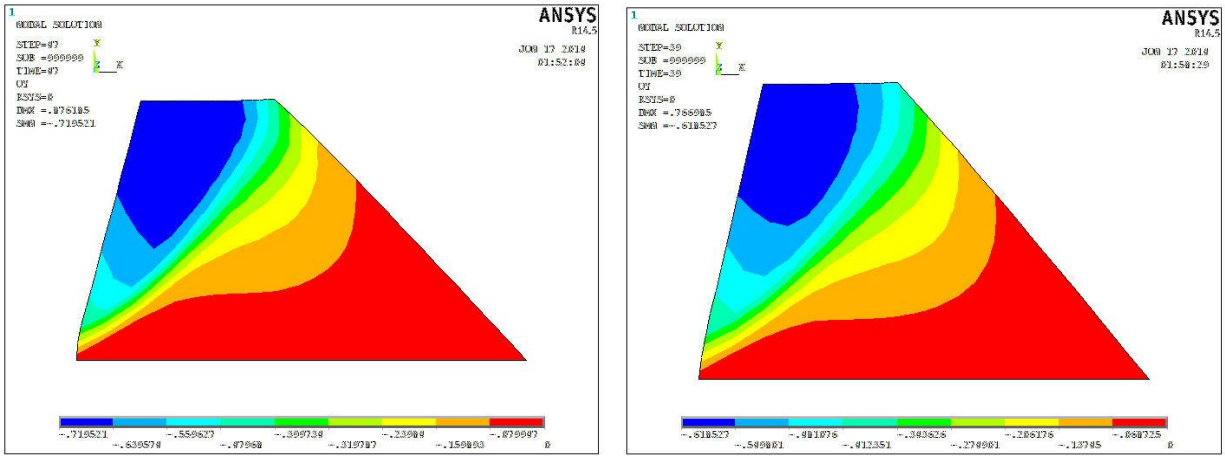


Рис. 28-29

$$c = 32, \varphi = 16, h = 50$$

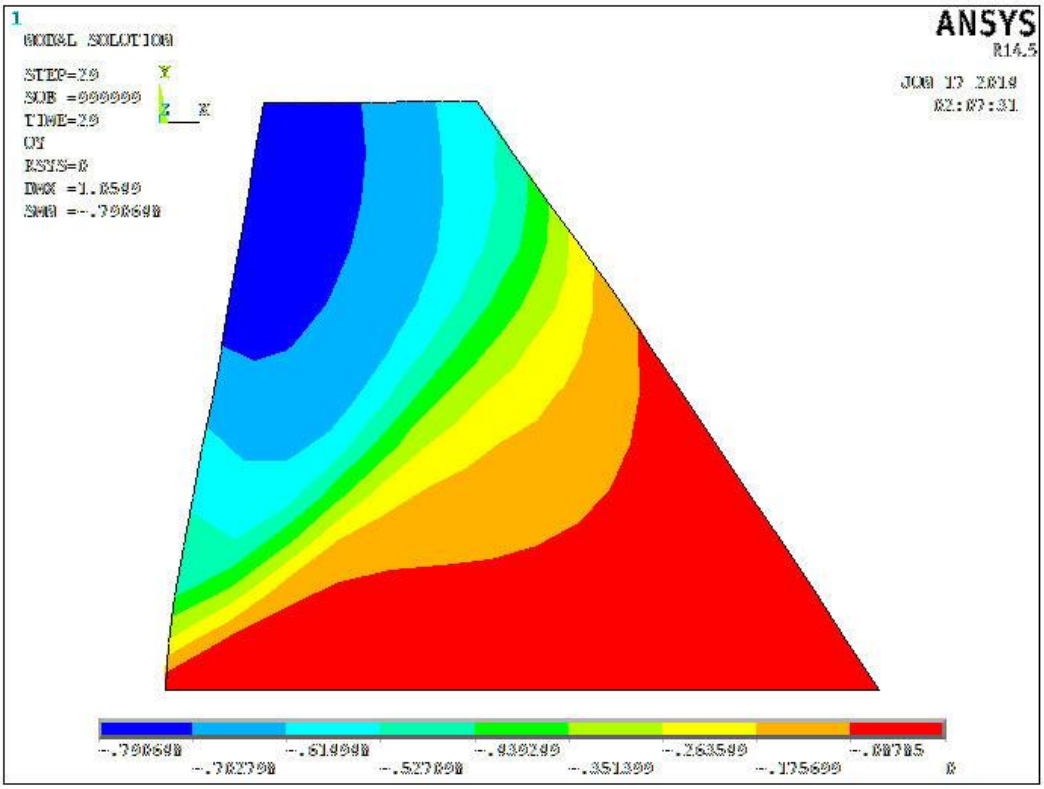


Рис. 30

Изменение напряжений представлены на рисунках 31-33.

$$c = 32, \varphi = 16, h = 35, 40;$$

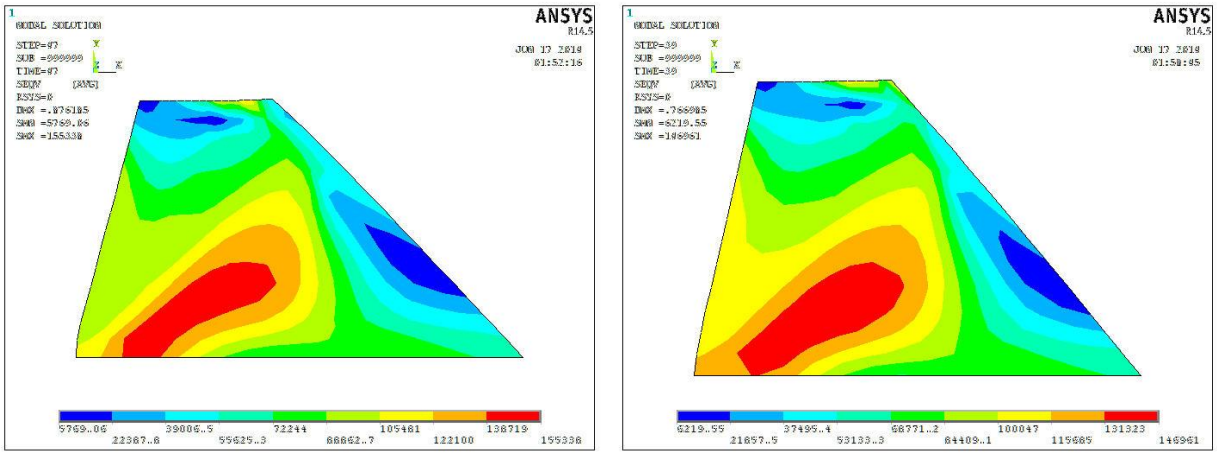


Рис. 31-32

$$c = 32, \varphi = 16, h = 50$$

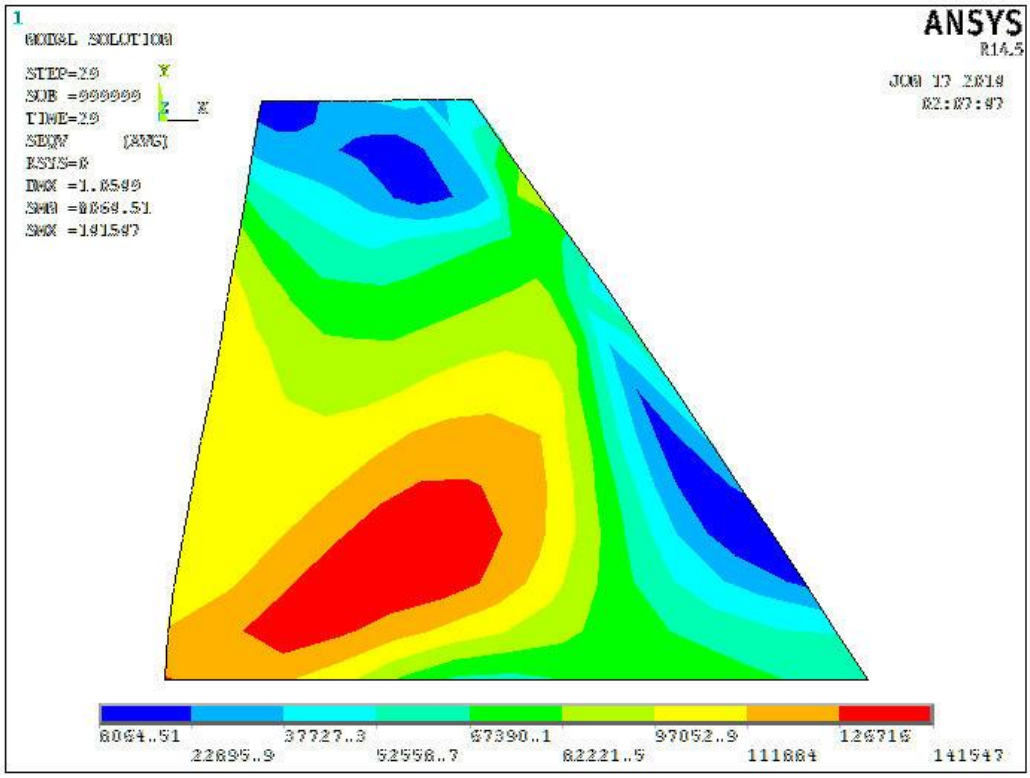


Рис. 33

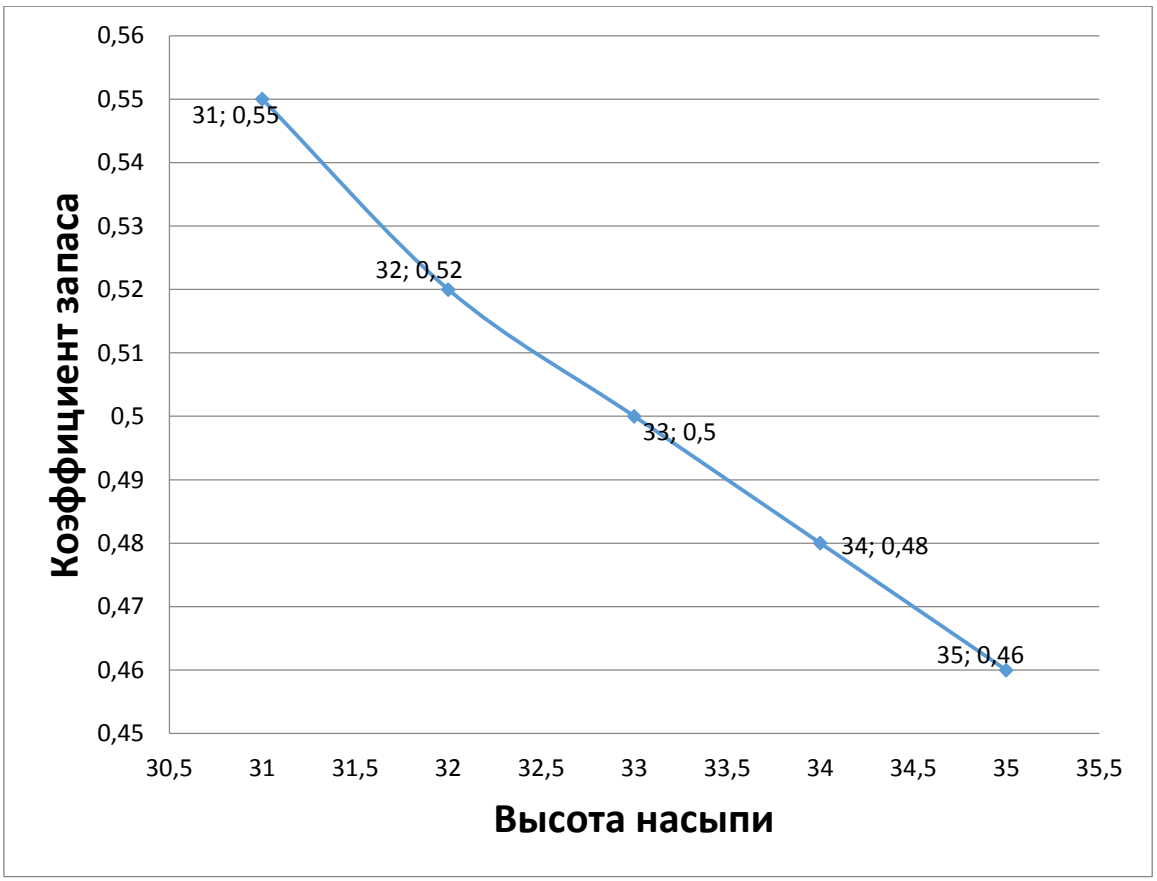


Рис. 33а

Рисунок 33а показывает зависимость коэффициента запаса от высоты насыпи. Таким образом, анализ результатов экспериментов отчетливо дает понять тот факт, что при увеличении высоты *h* насыпи, суммарные перемещения и напряжения убывают, а коэффициент запаса возрастает, тем самым устойчивость грунта увеличивается.

7.4 Исследование влияния изменения сетки на прогиб насыпи.

В данном эксперименте были показаны результаты исследования сгущения сетки и ее влияние на прогиб. Для решения всей модельной задачи был использован пакет ANSYS 14.5, что существенно упростило варьирование сеткой, так как в более ранних версиях программы (ANSYS 5.7 – учебная версия) существенные изменения сетки практически невозможно.

$c = 32, \varphi = 16, h = 30,$ сетка 10x10 и20x20

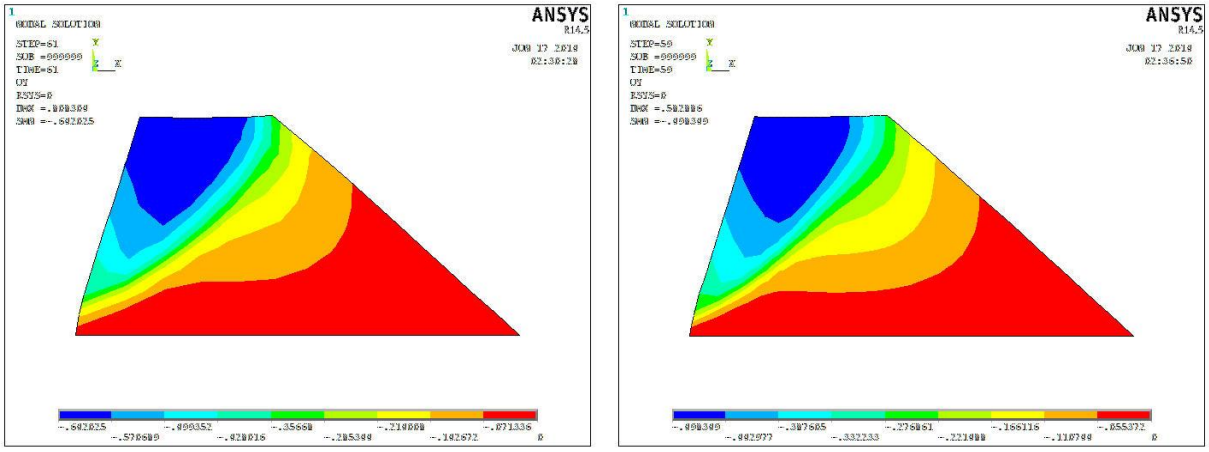


Рис. 34-35

$c = 32, \varphi = 27, h = 30,$ сетка 30x30

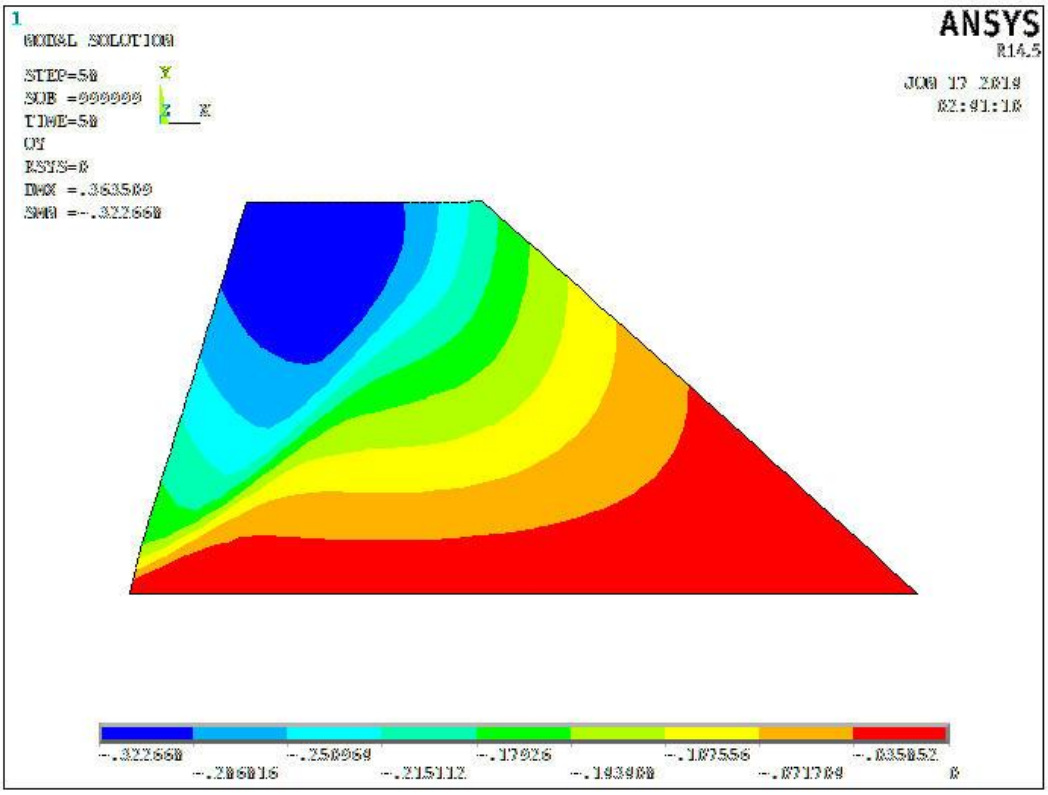


Рис. 36

Анализ результатов показывает, что при существенном сгущении сетки результаты становятся точнее, однако следует учитывать тот факт, что время

счета значительно увеличивается, а также то, что для использования более густой сетки необходимы более высокопроизводительные ЭВМ.

8. Заключение

В данной работе было дано понятие грунта, его характеристик, свойств и ряда моделей. Также был представлен метод конечных элементов, его преимущества по сравнению с другими численными методами, применение метода в механике грунтов.

В ППП ANSYS решена модельная задача, которая включила в себя исследование влияния различных характеристик грунта, таких как сцепление, угла внутреннего трения и высоты, на коэффициент запаса. В результате анализа расчетов были сделаны следующие выводы:

1. Изменение, а если быть точнее, увеличение сцепления и угла внутреннего трения насыпи увеличивают устойчивость исследуемого объекта.
2. При увеличении сцепления и угла внутреннего трения осадка насыпи (прогиб) заметно уменьшаются, а напряжения возрастают.
3. Увеличение высоты насыпи уменьшают напряжения в грунте, а также его прогиб.
4. Сгущение сетки позволяет получить более точные результаты экспериментов.

9. Список использованных источников и литературы

1. Ухов С.Б., Семенов В.В., Знаменский В.В. и др. Механика грунтов, основания и фундаменты. - Учебное пособие М55 для строит. спец. вузов 4-е изд., стер. - М.: Высш. шк., 2007. - 566с.
2. Голованов А.И., Бережной Д.В. Метод конечных элементов в механике деформируемых твердых тел. - Казань: изд-во «ДАС», 2001. – 300с.
3. Фадеев А.Б. Метод конечных элементов в геомеханике. - М.:Недра, 1987, 221с.
4. Зарецкий Ю.К. Лекции по современной механике грунтов. – Издательство Ростовского университета, 1989. 608с.
5. Пьянков С.А. Механика грунтов: учебное пособие / С.А. Пьянков, З.К. Азизов; Ульян. гос. техн. универс-т. – Ульяновск: УлГТУ, 2008. – 103с.
6. Далматов Б.И., Бронин В.И., Карлов В.Д и др. Механика грунтов. Ч.1. Основы геотехники в строительстве. – М.: Изд-во АСВ; СПб.: СПбГА-СУ, 2000. – 204с.

10. Приложение

```
fini
/clear
! начальные данные программы
/uis,msgpop,3
/nerr,5
/graphics,full
/triad,ltop
/plopts,minm,off
*afun,deg
/units,si
! глина твердая/полутвердая
e=15e6
nu=0.42
ro=1840
c=32e3
fi=16
h=30
l=30
nn=15
! препроцессор
/prep7
! задаем материал
et,1,plane42
keyopt,1,3,2
! материальные свойства грунта
mp,ex,1,e
mp,nuxy,1,nu
mp,dens,1,ro
! реальные константы
tb,dp,1
tbdata,1,c,fi,,
! создание точек
k,1,0,0,0
k,2,2*l,0,0,
k,3,0.3*l,h,0,
k,4,0.9*l,h,0,
! создание области
FLST,2,4,3
FITEM,2,1
FITEM,2,3
FITEM,2,4
```

```
FITEM,2,2
A,P51X
! задание сетки
mshape,2,2D
mshkey,2
! размер сетки и ее построение
ESIZE,h/nn
amesh,1
! решатель
/SOLU
! задание закреплений
!FLST,2,6,1,ORDE,6
!FITEM,2,1
!FITEM,2,37
!FITEM,2,54
!FITEM,2,58
!FITEM,2,62
!FITEM,2,67
!/GO
!D,P51X, , , , , ,ALL, , , , ,
FLST,2,1,4,ORDE,1
FITEM,2,4
/GO
DL,P51X, ,ALL,
*do,i,0.01,1,0.01
acel,0,i*9.81,0,
solve
save
*enddo
! постпроцессор
/post1
/EFACET,1
PLNSOL, EPPL,EQV, 0,1.0
SET,LAST
PLNSOL, S,EQV, 0,1.0
SET,LAST
PLNSOL, U,Y, 0,1.0
```