

И.Е. АНУФРИЕВ, В.Г. КОРНЕЕВ

ЧИСЛЕННОЕ ТЕСТИРОВАНИЕ МЕТОДА ДЕКОМПОЗИЦИИ ДЛЯ p -ВЕРСИИ МКЭ

Введение

Известно, что применение hp -версии метода конечных элементов для решения эллиптических краевых задач дает ряд преимуществ по сравнению с h -версией. В частности, скорость ее сходимости как правило выше, а в ряде важных для приложений случаев она обладает экспоненциальной скоростью сходимости [1], [2]. Это позволяет сократить число неизвестных при решении сложных инженерных задач. В то же время матрицы жесткости hp -версии существенно более заполнены и имеют более сложную структуру. Поэтому в полной мере ее достоинства могут быть реализованы только при наличии быстрых алгоритмов решения соответствующих систем линейных алгебраических уравнений.

Предположим, $\mathbf{A}\mathbf{v} = \mathbf{f}$ — симметричная положительно определенная (с. п. о.) система алгебраических уравнений с $n \times n$ -матрицей, и n — параметр. Алгоритм решения этой задачи назовем *быстрым* или (асимптотически) *почти оптимальным*, если он требует $O((1 + \log n)^k n)$ арифметических операций с фиксированным и небольшим k . Если $k = 0$, то алгоритм называется *оптимальным*. Для решения часто применяется предобусловленный метод сопряженных градиентов (ПМСГ) с некоторым предобусловливателем \mathbf{A} . Под (общей) *арифметической или вычислительной стоимостью предобусловливателя* понимается арифметическая стоимость решения системы ПМСГ за исключением умножений матрицы \mathbf{A} на векторы, неизбежных при итерационном решении. Иными словами, эффективность предобусловливателя измеряется не только относительной обусловленностью, но и стоимостью решения системы с матрицей в виде предобусловливателя. Соответственно общей арифметической стоимости предобусловливателя называется *быстрым, почти оптимальным и оптимальным*. Для краткости алгоритмы решения систем линейных алгебраических уравнений называются также *солверами*. В этой работе рассматриваются только иерархические hp -дискретизации эллиптических уравнений второго порядка. Их конечные элементы предполагаются ассоциированными с квадратными базисными элементами, координатные функции которых определяются посредством произведений интегрированных полиномов Лежандра. Поэтому по умолчанию всегда подразумевается этот тип дискретизаций.

Активное использование предобусловливателей и солверов МДО hp -версии началось в 90-х гг., когда для h -дискретизаций такие алгоритмы были уже достаточно хорошо изучены (см., напр., [3] (1991), [4] (1996) и ссылки в них). По иерархическим hp -дискретизациям в 1994–97 гг. был выполнен ряд работ, в которых рассматривались вопросы, связанные с блочно-диагональными предобусловливателями, в которых блок неизвестных в вершинах элементов независим от остальных, с предобусловливанием дополнений Шура, с двухуровневыми МДО и МДО с перекрытием областей и т.п. (см. [5]–[9]). Наиболее разработанная схема построения

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 00-01-00772), программы “Университеты России” (проект № УР.03.01.017) и гранта для молодых кандидатов наук Санкт-Петербурга (№ PD03-1.1-22).

МДО-предобусловливателя типа Дирихле–Дирихле для двумерных эллиптических задач была представлена в [10]–[12] и была развита затем в [13]–[15]. Основные достижения этих работ заключались в трех моментах. Один — обоснование возможности предобусловливания с потерей $(1 + \log p)$ в относительной обусловленности матрицей из двух независимых блоков, соответствующих неизвестным в вершинах элементов и остальным неизвестным (см. также [5]). Два других — получение эффективных предобусловливателей конечно-разностного вида для внутренних задач на подобластях декомпозиции и предобусловливателей-солверов для интерфейсных задач. Наиболее трудоемкой компонентой алгоритмов МДО для hp -версии является решение локальных задач Дирихле на подобластях декомпозиции. Хотя использование полученного конечно-разностного предобусловливателя уменьшало вычислительную стоимость этой компоненты, построить на его основе почти оптимальные солверы для локальных задач Дирихле удалось лишь в более поздних работах [16], [17]. Они представляют собой вторичные итерационные процессы МДО для конечно-разностной задачи, соответствующей предобусловливателю. В целом эти результаты привели к нескольким предобусловливателям-солверам МДО для иерархических hp -дискретизаций эллиптических уравнений второго порядка, имеющим арифметическую стоимость $O(p^2(1 + \ln p)^k)$ с $1 \leq k \leq 3,5$. Они представлены в работах [18], [19].

В данной работе рассматривается одна из версий почти оптимального МДО алгоритма, положенного в основу разрабатываемого нами пакета программ. Основным ее содержанием является описание алгоритмов пакета и результатов их анализа и обсуждение результатов достаточно обширных численных экспериментов. Основной целью тестирования МДО солвера в целом и всех его основных компонент было на данном этапе установление асимптотик по p их практической трудоемкости и сравнение их с априорными оценками. Насколько известно, в работе впервые представлены численные результаты, полученные с помощью комплекса программ МДО на базе hp -версии. Прделан ряд экспериментов со всеми компонентами МДО-предобусловливателя с целью подтверждения полученных ранее в [14], [15], [19] априорных оценок спектральной эквивалентности и объема вычислительной работы. Как известно, основными компонентами являются следующие.

1. Солверы для локальных задач Дирихле на подобластях декомпозиции — конечных элементах.
2. Процедуры продолжения и ограничения с межэлементной границы внутрь конечных элементов.
3. Предобусловливатель-солвер для дополнения Шура, получаемого после конденсации внутренних для конечных элементов неизвестных.
4. Солвер для решения систем с матрицей, являющейся блоком матрицы жесткости, соответствующим неизвестным в вершинах конечных элементов.

Заметим, что ни конденсация внутренних неизвестных, ни дополнение Шура в алгоритме не используются. Мы не рассматриваем алгоритмы для четвертой компоненты, поскольку указанный блок является матрицей жесткости для ансамбля конечных элементов первого порядка. Для систем с такими матрицами можно использовать целый набор быстрых алгоритмов, полученных для h -версии.

Тестирование производилось для весьма широкого диапазона значений p , в некоторых экспериментах до $p > 500$, выходящих за пределы, характерные в настоящее время для практики решения прикладных задач. Однако это позволило во всех экспериментах достичь асимптотических зон и установить асимптотическое поведение исследуемых величин для их сравнения с теоретическими оценками.

Представленный в данной работе алгоритм допускает глубокое распараллеливание. Основной объем вычислений может производиться независимо для каждого конечного элемента, каждой стороны и подзадачи для неизвестных в вершинах. Если для локальных задач на конечных элементах применяется вторичный МДО, то возможно дальнейшее распараллеливание. С указанным свойством связано не менее важное другое: описываемый алгоритм МДО удобен для использования в адаптивных режимах. Он не теряет в быстродействии, если поряд-

ки пространств внутренних координатных функций на каждом элементе и пространств следов конечно-элементных функций на каждой стороне различны.

1. Алгоритм МДО и его основные компоненты

1.1. *Иерархическая р-версия.* Рассмотрим обобщенную постановку задачи Дирихле для эллиптического уравнения второго порядка в области $\Omega \subset R^2$: найти функцию $u \in \overset{0}{W}_2^1(\Omega)$ такую, что

$$a_\Omega(u, v) - (f, v) = 0 \quad \text{для любого } v \in \overset{0}{W}_2^1(\Omega).$$

Билинейная форма $a_\Omega(u, v)$ предполагается симметричной, ограниченной и коэрцитивной. Граница области Ω состоит из конечного числа гладких кривых, углы между которыми лежат в интервале $(0, 2\pi)$. Тогда для любого достаточно малого параметра сетки h область $\bar{\Omega}$ представима в виде объединения $R = \mathcal{O}(h^{-2})$ непересекающихся совместных криволинейных четырехугольников $\bigcup_{r=1}^R \bar{\Pi}_r$, причем совместные явно заданные отображения $x = x^{(r)}(y)$ квадрата $\bar{\Pi} = [-1, 1] \times [-1, 1]$ на четырехугольники $\bar{\Pi}_r$ невырождены и удовлетворяют обобщенным условиям квазиоднородности (напр., [14], [15]). Базисный конечный элемент \mathcal{E} есть квадрат $\bar{\Pi}$ с базисом $\mathcal{M} = \{\mathcal{L}_{i,j}, 0 \leq i, j \leq p\}$, где $\mathcal{L}_{i,j}(x_1, x_2) = \mathcal{L}_i(x_1)\mathcal{L}_j(x_2)$, функции \mathcal{L}_j для $j > 1$ являются интегрированными полиномами Лежандра с нормировочным множителем

$$\mathcal{L}_j(x) = \beta_j \int_{-1}^x L_{j-1}(t) dt, \quad \beta_j = \frac{1}{2} \sqrt{(2j-3)(2j-1)(2j+1)},$$

а $\mathcal{L}_0(x) = 0,5(1+x)$, $\mathcal{L}_1(x) = 0,5(1-x)$ — линейные “узловые” функции.

Представим множество \mathcal{M} в виде объединения подмножеств *внутренних координатных функций* $\mathcal{M}_I = \{\mathcal{L}_{i,j}, 2 \leq i, j \leq p\}$, *координатных функций сторон* $\mathcal{M}_{II} = \{\mathcal{L}_{i,j}, i = 0, 1, 2 \leq j \leq p \text{ или } j = 0, 1, 2 \leq i \leq p\}$ и *координатных функций вершин* $\mathcal{M}_{III} = \{\mathcal{L}_{i,j}, i = 0, 1, j = 0, 1\}$. Введем обычным способом конечноэлементное пространство

$$H^0(\Omega) = \{u \in C(\bar{\Omega}) \mid u(x^{(r)}(y)) \in \text{span}(\mathcal{M}), \quad y \in \Pi, \quad r = 1, \dots, R\} \cap \overset{0}{W}_2^1(\Omega)$$

и его базис $\Phi = \{\phi_i\}_{i=1, \dots, \mathcal{N}}$ разобьем на три подмножества Φ_I , Φ_{II} и Φ_{III} . Подмножество внутренних базисных функций Φ_I состоит из функций ϕ_i , каждая из которых отличается от нуля только на одном элементе Π_r и $\phi_i(x^{(r)}(y)) \in \mathcal{M}_I$. В подмножество базисных функций сторон Φ_{II} входят функции ϕ_i , которые отличны от нуля на паре конечных элементов Π_r, Π_t с общей стороной и $\phi_i(x^{(r)}(y)), \phi_i(x^{(t)}(y)) \in \mathcal{M}_{II}$. Подмножество базисных функций вершин Φ_{III} составляют функции ϕ_i , не равные нулю только на конечных элементах Π_r с общей вершиной, на которых $\phi_i(x^{(r)}(y)) \in \mathcal{M}_{III}$. Аналогично разобьем неизвестные и обозначим через $\mathbf{u}_I \in \mathbb{R}^{\mathcal{N}_I}$, $\mathbf{u}_{II} \in \mathbb{R}^{\mathcal{N}_{II}}$, $\mathbf{u}_{III} \in \mathbb{R}^{\mathcal{N}_{III}}$ векторы внутренних неизвестных и неизвестных сторон и вершин соответственно, где $\mathcal{N} = \mathcal{N}_I + \mathcal{N}_{II} + \mathcal{N}_{III}$ — общее число неизвестных. Принятому упорядочению соответствует представление конечноэлементной системы алгебраических уравнений

$$\mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{f} \tag{1.1}$$

в блочном виде

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} \mathbf{K}_I & \mathbf{K}_{I,II} & \mathbf{K}_{I,III} \\ \mathbf{K}_{II,I} & \mathbf{K}_{II} & \mathbf{K}_{II,III} \\ \mathbf{K}_{III,I} & \mathbf{K}_{III,II} & \mathbf{K}_{III} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u} = \begin{pmatrix} \mathbf{u}_I \\ \mathbf{u}_{II} \\ \mathbf{u}_{III} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f} = \begin{pmatrix} \mathbf{f}_I \\ \mathbf{f}_{II} \\ \mathbf{f}_{III} \end{pmatrix}.$$

1.2. *Структура предобусловливателя МДО.* Следуя [14], [15] для построения предобусловливателя МДО введем более простую матрицу, чем \mathbf{K} . Свяжем с каждым элементом Π_r матрицу $\mathbf{A}_r \equiv \mathbf{A} = \hat{\mathbf{A}}_1 + h^2 \hat{\mathbf{A}}_0$ или $\mathbf{A}_r \equiv \mathbf{A} = \hat{\mathbf{A}}_1$ где $\hat{\mathbf{A}}_1$ — матрица жесткости базисного элемента \mathcal{E} , индуцируемая билинейной формой $\hat{a}_\Pi(w, v) = \int_{\Pi} (\nabla w \cdot \nabla v + wv) dx$, а $\hat{\mathbf{A}}_0$ — его матрица массы при

локальной нумерации неизвестных. Обозначим через Λ глобальную матрицу, получающуюся в результате процедуры сборки (аналогичной сборке \mathbf{K}) матриц \mathbf{A}_r , и представим ее в блочном виде с учетом разделения неизвестных на внутренние, неизвестные сторон и вершин

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \Lambda_I & \Lambda_{I,II} & \Lambda_{I,III} \\ \Lambda_{II,I} & \Lambda_{II} & \Lambda_{II,III} \\ \Lambda_{III,I} & \Lambda_{III,II} & \Lambda_{III} \end{pmatrix}. \quad (1.2)$$

Спектральная эквивалентность матриц Λ и \mathbf{K} следует [20] из условий обобщенной квазиоднородности. Кроме того, матрица

$$\Lambda^{(0)} = \begin{pmatrix} \Lambda_I & \Lambda_{I,II} & \mathbf{O} \\ \Lambda_{II,I} & \Lambda_{II} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} & \Lambda_{III} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Lambda^{(I)} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \Lambda_{III} \end{pmatrix},$$

полученная при помощи обнуления блоков взаимодействия функций вершин с остальными, является [14], [15] почти спектрально-эквивалентной \mathbf{K} :

$$(1 + \ln p)^{-1} \Lambda^{(0)} \prec \mathbf{K} \prec \Lambda^{(0)}.$$

Знак \prec используем для записи неравенств, выполняющихся с точностью до не зависящих от h и p постоянных.

Глобальный МДО-предобусловливатель \mathcal{K} для $\Lambda^{(0)}$ определяем через обратный к нему, приняв

$$\mathcal{K}^{-1} = \mathcal{K}_I^{(+)} + \mathcal{K}_{II}^{(+)} + \mathcal{K}_{III}^{(+)}. \quad (1.3)$$

Основной версии пакета соответствуют

$$\mathcal{K}_I^{(+)} = \begin{pmatrix} \mathcal{K}_I^{-1} & \mathbf{O} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{O} \end{pmatrix}, \quad \mathcal{K}_{III}^{(+)} = \begin{pmatrix} \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathcal{K}_{III}^{-1} \end{pmatrix},$$

где \mathcal{K}_L^{-1} — неявно заданные матрицы, являющиеся результатом применения неточных итерационных солверов с фиксированным и небольшим числом итераций для решения систем с матрицами Λ_L . В $\mathcal{K}_I^{(+)}$ и $\mathcal{K}_{III}^{(+)}$ можно, вообще говоря, использовать $\mathcal{K}_L^{-1} = \Lambda_L^{-1}$, $L = I, III$, т.е. псевдообратные матрицы к соответствующим блокам матрицы Λ , однако это предполагает точные методы решения систем с матрицами Λ_L . Пусть \mathbf{A}_I — блок матрицы \mathbf{A} , определенный на внутренних неизвестных. Поскольку $\Lambda_I = \text{diag}\{\mathbf{A}_I, \mathbf{A}_I, \dots, \mathbf{A}_I\}$, то решение системы с матрицей Λ_I требует решения R систем с матрицей \mathbf{A}_I и соответственно предобусловливатель локальных задач Дирихле определяется как блочно-диагональная матрица с R одинаковыми блоками $\mathcal{K}_I^{-1} = \text{diag}\{\widetilde{\mathcal{A}}_I^{-1}, \widetilde{\mathcal{A}}_I^{-1}, \dots, \widetilde{\mathcal{A}}_I^{-1}\}$. Здесь $\widetilde{\mathcal{A}}_I^{-1}$ — оператор, являющийся результатом применения некоторого вторичного итерационного процесса с небольшим числом итераций для решения системы с матрицей \mathbf{A}_I . Всюду в статье используем волну в обозначении операторов, порожденных вторичным итерационным процессом для решения системы линейных уравнений.

Определение предобусловливателя интерфейсных задач $\mathcal{K}_{II}^{(+)}$ связано с разложением

$$\Lambda^{(I)} = \begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{O} \\ \Lambda_{II,I} \Lambda_I^{-1} & \mathbf{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Lambda_I & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{S} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{I} & \Lambda_I^{-1} \Lambda_{I,II} \\ \mathbf{O} & \mathbf{I} \end{pmatrix},$$

где $\mathbf{S} = \Lambda_{II} - \Lambda_{II,I} \Lambda_I^{-1} \Lambda_{I,II}$ — дополнение Шура. В дальнейшем будем использовать блочно-диагональный предобусловливатель \mathcal{S} для дополнения Шура с одинаковыми блоками для каждой из сторон триангуляции (при условии однотипной нумерации неизвестных каждой из сторон), т.е. $\mathcal{S} = \text{diag}\{\mathcal{S}_0, \mathcal{S}_0, \dots, \mathcal{S}_0\}$. При этом он удовлетворяет неравенствам

$$(1 + \ln p)^{-1} \mathcal{S} \prec \mathbf{S} \prec (1 + \ln p) \mathcal{S}. \quad (1.4)$$

Пусть $\mathcal{P} : \mathbb{R}^{\mathcal{N}_{II}} \rightarrow \mathbb{R}^{\mathcal{N}_I + \mathcal{N}_{II}}$ — оператор продолжения такой, что для любого вектора $\mathbf{v}_{II} \in \mathbb{R}^{\mathcal{N}_{II}}$ выполняется неравенство

$$\|\mathcal{P}\mathbf{v}_{II}\|_{\mathbf{A}^{(I)}} \leq \gamma_{\mathcal{P}} \|\mathbf{v}_{II}\|_{\mathbf{S}}, \quad (1.5)$$

с $\gamma_{\mathcal{P}}$ постоянной или слабо зависящей от p . Полагаем $\mathcal{K}_{II}^{(+)} = \mathcal{P}\mathbf{S}^{-1}\mathcal{P}^{\top}$. Обозначим через \mathcal{P}_r ограничение оператора \mathcal{P} на элемент с номером r . В силу свойств матриц \mathbf{A}_I и \mathbf{S} все эти ограничения одинаковы при условии идентичности локальных нумераций внутренних координатных функций на всех элементах и координатных функций сторон на всех сторонах, т.е. $\mathcal{P}_r \equiv \mathcal{P}_E : \mathbb{R}^{4(p-1)} \rightarrow \mathbb{R}^{(p-1)(p-1)+4(p-1)}$ — оператор продолжения для базисного элемента. Более того, если для блоков матрицы \mathbf{A} ввести аналогичную (1.2) индексацию и использовать обозначения

$$\mathbf{A}^{(I)} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_I & \mathbf{A}_{I,II} \\ \mathbf{A}_{II,I} & \mathbf{A}_{II} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{S}_E = \mathbf{A}_{II} - \mathbf{A}_{II,I}\mathbf{A}_I^{-1}\mathbf{A}_{I,II},$$

то (1.5) эквивалентно неравенству

$$\|\mathcal{P}_E\mathbf{v}_{II}\|_{\mathbf{A}^{(I)}} \leq \gamma_{\mathcal{P}} \|\mathbf{v}_{II}\|_{\mathbf{S}_E}. \quad (1.6)$$

Описанный способ построения МДО-предобусловливателей использовался в [12]–[15]. Справедлива теорема ([15], теорема 5.2), свидетельствующая о том, что предобусловливатель \mathcal{K} почти оптимален в смысле относительного числа обусловленности.

Теорема 1.1. Пусть $(1 + \ln p)^{-1}\mathcal{K}_L \prec \Lambda_L \prec \mathcal{K}_L$ для $L = I, II$ и выполняются неравенства (1.4) и неравенство (1.6) с постоянной $\gamma_{\mathcal{P}}$. Тогда

$$(1 + \ln p)^{-2}\mathcal{K} \prec \mathbf{K} \prec (1 + \ln p)\mathcal{K}.$$

Для решения системы (1.1) применим ПМСГ с предобусловливателем, обратный к которому имеет вид (1.3),

$$\mathbf{u}^{(1)} := 0, \mathbf{r}^{(1)} := \mathbf{f}, \mathbf{p}^{(0)} := 0, \mathbf{r}^{(0)} := 0, \beta_1 := 0$$

for $k := 1, 2, \dots$

$$\mathbf{z}^{(k)} := \mathcal{K}^{-1}\mathbf{r}^{(k)}$$

if $k > 1$

$$\beta_k := [(\mathbf{z}^{(k)})^{\top}(\mathbf{r}^{(k)})] / [(\mathbf{z}^{(k-1)})^{\top}\mathbf{r}^{(k-1)}]$$

endif

$$\mathbf{p}^{(k)} := \mathbf{z}^{(k)} + \beta_k\mathbf{p}^{(k-1)}, \alpha_k := \frac{(\mathbf{z}^{(k)})^{\top}\mathbf{r}^{(k)}}{(\mathbf{p}^{(k)})^{\top}\mathbf{K}\mathbf{p}^{(k)}}, \mathbf{r}^{(k+1)} := \mathbf{r}^{(k)} - \alpha_k\mathbf{K}\mathbf{p}^{(k)}, \mathbf{u}^{(k+1)} := \mathbf{u}^{(k)} + \alpha_k\mathbf{p}^{(k)}$$

endfor.

В последнее время проблеме устойчивости итерационных методов решения систем линейных уравнений при предобусловлировании посредством вторичных точных и неточных солверов уделяется много внимания. В ряде работ она рассматривалась с чисто алгебраической точки зрения (напр., [21]–[23]). В [22] был предложен вариант ПМСГ, менее чувствительный к ошибкам решения системы с предобусловливателем. В этом варианте, который также реализован в пакете программ и использовался в наших численных экспериментах, итерационный параметр β_k вычисляется по формуле

$$\beta_k := (\mathbf{z}^{(k)})^{\top}(\mathbf{r}^{(k)} - \mathbf{r}^{(k-1)}) / [(\mathbf{z}^{(k-1)})^{\top}\mathbf{r}^{(k-1)}]. \quad (1.7)$$

Далее рассмотрим основные компоненты МДО-предобусловливателя \mathcal{K} , которые определим таким образом, что вычислительная стоимость решения системы с матрицей \mathcal{K} будет почти оптимальной.

1.3. *Предобусловливание локальных задач Дирихле.* Как следует из предыдущей секции, умножение $\mathcal{K}_1^{(+)} \mathbf{v}_1$ требует лишь решения R систем с матрицей \mathcal{A}_1 . Известные приемы построения быстрых предобусловливателей-солверов \mathcal{A}_1 (см. [24], [25], [16]–[18]) основаны на спектрально эквивалентном предобусловливателе конечно-разностного вида, полученном в [12], который будем называть *базовым*. Для простоты изложения считаем $p = 2N + 1$ с целым N и разобьем множество внутренних координатных функций базисного элемента на четыре подмножества в соответствии с четностью-нечетностью их порядков по каждой из двух переменных: $\mathcal{M}_1 = \mathcal{M}_1^{ee} \cup \mathcal{M}_1^{eo} \cup \mathcal{M}_1^{oe} \cup \mathcal{M}_1^{oo}$, где

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_1^{ee} &= \{\mathcal{L}_{2,2}, \mathcal{L}_{2,4}, \dots, \mathcal{L}_{2,2N}, \mathcal{L}_{4,2}, \mathcal{L}_{4,4}, \dots, \mathcal{L}_{4,2N}, \dots, \mathcal{L}_{2N,2}, \mathcal{L}_{2N,4}, \dots, \mathcal{L}_{2N,2N}\}, \\ \mathcal{M}_1^{eo} &= \{\mathcal{L}_{2,3}, \mathcal{L}_{2,5}, \dots, \mathcal{L}_{2,2N+1}, \mathcal{L}_{4,3}, \mathcal{L}_{4,5}, \dots, \mathcal{L}_{4,2N+1}, \dots, \mathcal{L}_{2N,3}, \mathcal{L}_{2N,5}, \dots, \mathcal{L}_{2N,2N+1}\}, \\ \mathcal{M}_1^{oe} &= \{\mathcal{L}_{3,2}, \mathcal{L}_{3,4}, \dots, \mathcal{L}_{3,2N}, \mathcal{L}_{5,2}, \mathcal{L}_{5,4}, \dots, \mathcal{L}_{5,2N}, \dots, \mathcal{L}_{2N+1,2}, \mathcal{L}_{2N+1,4}, \dots, \mathcal{L}_{2N+1,2N}\}, \\ \mathcal{M}_1^{oo} &= \{\mathcal{L}_{3,3}, \mathcal{L}_{3,5}, \dots, \mathcal{L}_{3,2N+1}, \mathcal{L}_{5,3}, \mathcal{L}_{5,5}, \dots, \mathcal{L}_{5,2N+1}, \dots, \mathcal{L}_{2N+1,3}, \mathcal{L}_{2N+1,5}, \dots, \mathcal{L}_{2N+1,2N+1}\}.\end{aligned}$$

После этого матрица жесткости внутренних функций \mathbf{A}_1 базисного элемента становится блочно-диагональной: $\mathbf{A}_1 = \text{diag}\{\mathbf{A}_{e,e}, \mathbf{A}_{e,o}, \mathbf{A}_{o,e}, \mathbf{A}_{o,o}\}$ (см. [12]). Блоки базового блочно-диагонального предобусловливателя $\mathcal{A}_1 = \text{diag}\{\mathcal{A}_{e,e}, \mathcal{A}_{e,o}, \mathcal{A}_{o,e}, \mathcal{A}_{o,o}\}$ определим соотношениями

$$\mathcal{A}_{a,b} = \mathcal{D}_a \otimes (\Delta + \mathcal{D}_b^{-1}) + (\Delta + \mathcal{D}_a^{-1}) \otimes \mathcal{D}_b,$$

в которых a, b принимают значения e, o и

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_e &= \text{diag}\{4i^2\}_{i=1,2,\dots,N}, & \mathcal{D}_o &= \text{diag}\{4i^2 + 4i + 1\}_{i=1,2,\dots,N}, \\ \Delta &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & -1 & & & & & \\ -1 & 2 & -1 & & & & 0 \\ & & \dots & \dots & & & \\ & & & & -1 & 2 & -1 \\ & & & & & -1 & 2 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Этот предобусловливатель спектрально-эквивалентен матрице жесткости внутренних функций базисного элемента [13]: $\mathcal{A}_1 \prec \mathbf{A}_1 \prec \mathcal{A}_1$. Кроме того, все блоки $\mathcal{A}_{a,b}$ спектрально-эквивалентны друг другу, поэтому можно также положить $\mathcal{A} = \text{diag}\{\mathcal{A}_{a,a}, \mathcal{A}_{a,a}, \mathcal{A}_{a,a}, \mathcal{A}_{a,a}\}$ с $a = e$ или $a = o$. Таким образом, для получения быстрого солвера для матрицы \mathcal{A}_1 достаточно получить такой солвер для $\mathcal{A}_{e,e}$.

В [12], как и в [26], ставилась цель получить предобусловливатель конечно-разностного вида. Очевидно, $\mathcal{A}_{e,e}$ является матрицей конечно-разностной аппроксимации на квадратной сетке с шагом $h = 1/N$ (и пятиточечным шаблоном) эллиптического уравнения второго порядка

$$L_{\mathcal{A}} u \equiv -2(\xi_1^2 u''_{\xi_2 \xi_2} + \xi_2^2 u''_{\xi_1 \xi_1}) + (\xi_1^2 / \xi_2^2 + \xi_2^2 / \xi_1^2) u = F(\xi), \quad \xi = (\xi_1, \xi_2) \in \pi_1, \quad u|_{\partial \pi_1} = 0,$$

в квадрате $\pi_1 := (0, 1) \times (0, 1)$. Коэффициенты этого уравнения вырождаются, а коэффициенты при младших членах имеют, кроме того, особенности. Это явилось причиной того, что быстрые солверы для матрицы \mathcal{A}_1 появились лишь в последние годы в статьях [24], [16]–[18] и препринте [25]. Они относятся к трем типам: МДО для конечно-разностной аппроксимации, многосеточный метод и метод, основанный на специальной многоуровневой вэйвлетной декомпозиции пространства кусочно-линейных функций на равномерной сетке. Во всех из них сначала строятся близкие к \mathcal{A}_1 модифицированные предобусловливатели, более приспособленные к конкретному солверу. Например, для построения МДО предобусловливателя-солвера в [16], [17] была введена более крупная ортогональная декомпозиционная сетка, сгущающаяся по каждой из переменных ξ_1, ξ_2 специальным образом к нулю так, что на каждой ее ячейке коэффициенты отличаются от постоянных на одну и ту же (относительно) часть, т. е. фактически \mathcal{A}_1 заменялся спектрально эквивалентным предобусловливателем \mathbf{B}_1 , соответствующим дифференциальному оператору

$L_{\mathbf{B}}$ с кусочно-постоянными коэффициентами, для которого строился МДО. В [24], [25] многоуровневые алгоритмы строились для упрощенного с потерей спектральной эквивалентности предобусловливателя

$$\mathbb{A}_I = \text{diag}\{\mathbb{A}_{e,e}, \mathbb{A}_{e,o}, \mathbb{A}_{o,e}, \mathbb{A}_{o,o}\}, \quad \mathbb{A}_{a,b} = \mathcal{D}_a \otimes \Delta + \Delta \otimes \mathcal{D}_b, \quad (1.8)$$

для которого $\text{cond}(\mathbb{A}_I^{-1} \mathbf{A}_I) \prec (1 + \log p)$. Он является конечно-разностной аппроксимацией оператора краевой задачи

$$L_{\mathbb{A}} u \equiv -2(\xi_1^2 u''_{\xi_2 \xi_2} + \xi_2^2 u''_{\xi_1 \xi_1}) = F(\xi), \quad \xi \in \pi_1, \quad u|_{\partial\pi_1} = 0.$$

Один из модулей пакета реализует также обобщение многоуровневого алгоритма на случай произвольного p .¹

Общая вычислительная стоимость предобусловливателей-солверов \mathbb{A}_I и \mathbf{B}_I для матрицы \mathbf{A}_I колеблется в зависимости от версии солвера от $p^2(1 + \ln p)^{0,5}$ до $p^2(1 + \ln p)^{4,5}$. За более подробным описанием и результатами исследования этих солверов мы отсылаем к цитированным выше работам.

1.4. *Предобусловливание дополнения Шура и продолжения с интерфейса.* Для построения $\mathcal{K}_{\Pi}^{(+)}$ нужны: предобусловливатель \mathcal{S} для дополнения Шура \mathbf{S} и оператор продолжения \mathcal{P} , удовлетворяющие условиям (1.4) и (1.6). Для определения блока \mathcal{S}_0 матрицы \mathcal{S} достаточно, следуя [13], рассмотреть предобусловливание дополнения Шура \mathbb{S}_E базисного элемента. Будем считать, не нарушая общности, что $p = 2N + 1$. Переупорядочим координатные функции сторон базисного элемента, представив множество функций сторон в виде $\mathcal{M}_{\Pi} = \mathcal{M}_{\Pi}^{(1)} \cup \mathcal{M}_{\Pi}^{(2)} \cup \mathcal{M}_{\Pi}^{(3)} \cup \mathcal{M}_{\Pi}^{(4)}$ так, что каждое из $\mathcal{M}_{\Pi}^{(s)}$ будет содержать координатные функции s -ой стороны, пронумерованные с учетом четности-нечетности индексов,

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{\Pi}^{(1)} &= \mathcal{M}_{\Pi}^{(1,e)} \cup \mathcal{M}_{\Pi}^{(1,o)}, & \mathcal{M}_{\Pi}^{(1,e)} &= \{\mathcal{L}_{2,1}, \mathcal{L}_{4,1}, \dots, \mathcal{L}_{2N,1}\}, & \mathcal{M}_{\Pi}^{(1,o)} &= \{\mathcal{L}_{3,1}, \mathcal{L}_{5,1}, \dots, \mathcal{L}_{2N+1,1}\}, \\ \mathcal{M}_{\Pi}^{(2)} &= \mathcal{M}_{\Pi}^{(2,e)} \cup \mathcal{M}_{\Pi}^{(2,o)}, & \mathcal{M}_{\Pi}^{(2,e)} &= \{\mathcal{L}_{1,2}, \mathcal{L}_{1,4}, \dots, \mathcal{L}_{1,2N}\}, & \mathcal{M}_{\Pi}^{(2,o)} &= \{\mathcal{L}_{1,3}, \mathcal{L}_{1,5}, \dots, \mathcal{L}_{1,2N+1}\}, \\ \mathcal{M}_{\Pi}^{(3)} &= \mathcal{M}_{\Pi}^{(3,e)} \cup \mathcal{M}_{\Pi}^{(3,o)}, & \mathcal{M}_{\Pi}^{(3,e)} &= \{\mathcal{L}_{2,0}, \mathcal{L}_{4,0}, \dots, \mathcal{L}_{2N,0}\}, & \mathcal{M}_{\Pi}^{(3,o)} &= \{\mathcal{L}_{3,0}, \mathcal{L}_{5,0}, \dots, \mathcal{L}_{2N+1,0}\}, \\ \mathcal{M}_{\Pi}^{(4)} &= \mathcal{M}_{\Pi}^{(4,e)} \cup \mathcal{M}_{\Pi}^{(4,o)}, & \mathcal{M}_{\Pi}^{(4,e)} &= \{\mathcal{L}_{0,2}, \mathcal{L}_{0,4}, \dots, \mathcal{L}_{0,2N}\}, & \mathcal{M}_{\Pi}^{(4,o)} &= \{\mathcal{L}_{0,3}, \mathcal{L}_{0,5}, \dots, \mathcal{L}_{0,2N+1}\}. \end{aligned} \quad (1.9)$$

Предобусловливатель для \mathbb{S}_E выбираем в виде $\mathcal{S}_E = \text{diag}[\mathcal{S}_0, \mathcal{S}_0, \mathcal{S}_0, \mathcal{S}_0]$, где каждый блок \mathcal{S}_0 отвечает одной из сторон базисного элемента. Определение \mathcal{S}_0 связано с различными представлениями полинома $q(x)$ степени $2N + 1$ на отрезке

$$q(x) = \sum_{i=0}^{2N+1} a_i \mathcal{L}_i(x), \quad q(x) = \sum_{i=0}^{2N+1} b_i x^i, \quad q(\cos \phi) = \sum_{i=0}^{2N+1} c_i \cos i\phi.$$

Введем матрицу $\mathcal{D} = \text{diag}\{0, 1, \dots, 2N + 1\}$ и верхние треугольные матрицы \mathcal{B}, \mathcal{C} , которые соответствуют преобразованиям

$$\mathcal{B}\mathbf{a} = \mathbf{b}, \quad \mathcal{C}\mathbf{b} = \mathbf{c}, \quad \mathbf{a} = \{a_i\}_{i=0,1,\dots,2N+1}, \quad \mathbf{b} = \{b_i\}_{i=0,1,\dots,2N+1}, \quad \mathbf{c} = \{c_i\}_{i=0,1,\dots,2N+1}.$$

Пусть $\mathcal{W} = \mathcal{C}\mathcal{B}$. Матрица \mathcal{S}_0 определяется как матрица $\ln(1 + p)\mathcal{W}^{\top} \mathcal{D} \mathcal{W}$ с вычеркнутыми строками и столбцами, соответствующими a_0 и a_1 , т. е. первым двум функциям \mathcal{L}_0 и \mathcal{L}_1 .

Теорема 1.2 ([14], теорема 3.1). *Справедливы неравенства $(1 + \ln p)^{-1} \mathcal{S}_E \prec \mathbb{S}_E \prec (1 + \ln p)^{k-1} \mathcal{S}_E$ при $\mathbf{A} = \hat{\mathbf{A}}_1$, $k = 3$ и при $\mathbf{A} = \hat{\mathbf{A}}_1 + h^2 \hat{\mathbf{A}}_0$, $k = 2$.*

¹Этот алгоритм и модуль разработаны А.Б. Смирновым и Е.Н. Смирновой.

Заметим, что из теоремы 1.2 следует (1.4), если при сборке \mathbf{A} использовались матрицы $\mathbf{A}_r \equiv \hat{\mathbf{A}}_1$.

Остановимся на некоторых особенностях реализации предобусловливателя \mathcal{S} . Принятая перенумерация координатных функций сторон (1.9) приводит к тому, что матрицы \mathcal{W} и \mathcal{D} распадаются на два независимых подблока для неизвестных, соответствующих четным и нечетным базисным функциям. Следовательно,

$$\mathcal{W}^\top \mathcal{D} \mathcal{W} = \begin{pmatrix} \mathcal{W}^{(e)} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathcal{W}^{(o)} \end{pmatrix}^\top \begin{pmatrix} \mathcal{D}^{(e)} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathcal{D}^{(o)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{W}^{(e)} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathcal{W}^{(o)} \end{pmatrix},$$

где $\mathcal{D}^{(e)} = \text{diag}\{0, 2, \dots, 2N\}$, $\mathcal{D}^{(o)} = \text{diag}\{1, 3, \dots, 2N+1\}$. Таким образом, предобусловливание интерфейсной задачи на каждом шаге внешнего итерационного процесса требует решения $2\mathcal{N}_s$ систем вида $\mathcal{F}\mathbf{y} = \mathbf{d}$, где \mathcal{F} получаем вычеркиванием первой строки из матрицы

$$\overline{\mathcal{S}}_0 = \overline{\mathcal{W}}^\top \overline{\mathcal{D}} \overline{\mathcal{W}},$$

в которой либо $\overline{\mathcal{W}} = \mathcal{W}^{(e)}$ и $\overline{\mathcal{D}} = \mathcal{D}^{(e)}$, либо $\overline{\mathcal{W}} = \mathcal{W}^{(o)}$ и $\overline{\mathcal{D}} = \mathcal{D}^{(o)}$. Простой прием помогает избежать перемножения матриц с последующим вычеркиванием первой строки и столбца и решением систем с полностью заполненными матрицами. Обозначим через \mathbf{z} и \mathbf{u} решения вспомогательных систем

$$\overline{\mathcal{W}}^\top \overline{\mathcal{D}} \overline{\mathcal{W}} \mathbf{z} = \underbrace{\{1, 0, \dots, 0\}}_{N+1}^\top, \quad \overline{\mathcal{W}}^\top \overline{\mathcal{D}} \overline{\mathcal{W}} \mathbf{u} = \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{d} \end{bmatrix}. \quad (1.10)$$

Первую из них достаточно решить один раз перед началом итерационного процесса. Компоненты решения системы $\mathcal{F}\mathbf{y} = \mathbf{d}$ находятся по формулам $y_k = u_{k+1} - (u_1/z_1)z_{k+1}$ для $k = 1, 2, \dots, N$. Следовательно, обращение предобусловливателя интерфейсных задач \mathcal{S} сводится к решению систем с треугольными и диагональной матрицами для каждой стороны триангуляции, и его вычислительная стоимость составляет $\mathcal{N}_s \mathcal{O}(p^2) = \mathcal{O}(Rp^2)$, где \mathcal{N}_s — число сторон.

Выбор оператора продолжения \mathcal{P} , эквивалентно \mathcal{P}_E , существенно определяет эффективность интерфейсной компоненты $\mathcal{K}_{\text{II}}^{(+)}$. Положим $\mathcal{P}_E^\top = (-\mathbf{A}_{\text{II},\text{I}} \tilde{\mathbf{A}}_{\text{I},\text{pr}}^{-1} \mid \mathbf{I}_{\text{II}})$, где $\tilde{\mathbf{A}}_{\text{I},\text{pr}}^{-1}$ является оператором, порожденным итерационным процессом

$$\mathbf{w}^{k+1} = \mathbf{w}^k + \sigma_k \mathcal{A}_1^{-1} (\mathbf{A}_1 \mathbf{w}^k - \mathbf{v}_{\text{I},r}), \quad \mathbf{w}^0 = \mathbf{0}, \quad (1.11)$$

для приближенного решения систем $\mathbf{A}_1 \mathbf{w} = \mathbf{v}_{\text{I},r}$ для каждого конечного элемента r , в котором $k = 0, 1, \dots, n$ и σ_k — чебышевские итерационные параметры, \mathcal{A}_1 — быстрый предобусловливатель-солвер для матрицы \mathbf{A}_1 .

Таким образом, формально определяется матрица

$$\tilde{\mathbf{A}}_{\text{I},\text{pr}}^{-1} = \left[\mathbf{I} - \prod_{k=1}^n (\mathbf{I} - \sigma_k \mathcal{A}_1^{-1} \mathbf{A}_1) \right] \mathbf{A}_1^{-1}.$$

В [19], [27] доказано, что для выполнения свойства (1.5) оператора продолжения достаточно сделать $n = n_{\text{pr}}(p) = \mathcal{O}((\ln(1+p))/\rho)$ итераций в (1.11), где ρ — коэффициент сжатия невязки на одной итерации. Для метода простых итераций с постоянным итерационным параметром $\sigma_k \equiv \sigma_0 = \mathcal{O}(1)$ имеем $\rho = (\lambda_{\max} - \lambda_{\min})/(\lambda_{\max} + \lambda_{\min}) = \mathcal{O}(1)$, где λ_{\max} и λ_{\min} — максимальное и минимальное собственные числа обобщенной проблемы $\mathbf{A}_1 \mathbf{x} = \lambda \mathcal{A}_1 \mathbf{x}$. Такой выбор оператора продолжения приводит к тому, что

$$\mathcal{K}_{\text{II}}^{(+)} = \begin{pmatrix} -\tilde{\mathbf{A}}_{\text{I},\text{pr}}^{-1} \mathbf{A}_{\text{I},\text{II}} \\ \mathbf{I}_{\text{II}} \end{pmatrix} \mathcal{S}^{-1} (-\mathbf{A}_{\text{I},\text{I}} \tilde{\mathbf{A}}_{\text{I},\text{pr}}^{-1} \mid \mathbf{I}_{\text{II}}), \quad \tilde{\mathbf{A}}_{\text{I},\text{pr}}^{-1} = \text{diag}\{\tilde{\mathbf{A}}_{\text{I},\text{pr}}^{-1}, \dots, \tilde{\mathbf{A}}_{\text{I},\text{pr}}^{-1}\}.$$

Умножение $\mathcal{K}_{\text{II}}^{(+)}$ во внешнем итерационном процессе на текущем шаге на вектор невязки

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} \mathbf{r}_{\text{I}} \\ \mathbf{r}_{\text{II}} \\ \mathbf{r}_{\text{III}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{r}^{(\text{I})} \\ \mathbf{r}^{(\text{II})} \\ \mathbf{r}^{(\text{III})} \end{pmatrix}$$

не требует предварительной сборки матриц и состоит из трех этапов.

1. *Сужение*

$$\mathbf{w}_{\text{I}} \leftarrow \tilde{\Lambda}_{\text{I,pr}}^{-1} \mathbf{r}_{\text{I}}, \quad \mathbf{z}_{\text{II}} \leftarrow -\Lambda_{\text{II,I}} \mathbf{w}_{\text{I}} + \mathbf{r}_{\text{II}}. \quad (1.12)$$

Операция $\tilde{\Lambda}_{\text{I,pr}}^{-1} \mathbf{r}_{\text{I}}$ требует решения R систем $\mathbf{A}_{\text{I}} \mathbf{w}_{\text{I}}^{(r)} = \mathbf{r}_{\text{I}}^{(r)}$ при помощи n_{pr} итераций предобусловленного итерационного процесса (1.11). Умножение $\Lambda_{\text{II,I}} \mathbf{w}_{\text{I}}$ также выполняется поэлементно $\mathbf{A}_{\text{II,I}} \mathbf{w}_{\text{I}}^{(r)}$ для всех r , полученные векторы затем собираются.

2. *Предобусловливание дополнения Шура*

$$\mathbf{z}_{\text{II}} \leftarrow \mathcal{S}^{-1} \mathbf{w}_{\text{II}}$$

требует решения систем вида (1.10) независимо для каждой стороны триангуляции.

3. *Продолжение*

$$\begin{pmatrix} \mathbf{v}_{\text{I}} \\ \mathbf{v}_{\text{II}} \end{pmatrix} \leftarrow \begin{pmatrix} \tilde{\Lambda}_{\text{I,pr}}^{-1} \Lambda_{\text{I,II}} \\ \mathbf{I}_{\text{II}} \end{pmatrix} \mathbf{z}_{\text{II}} \quad (1.13)$$

заключается в поэлементных умножениях $\bar{\mathbf{z}}_r \leftarrow \mathbf{A}_{\text{I,II}} \mathbf{z}_{\text{II}}^{(r)}$ с подвекторами сторон элементов и поэлементном решении систем с матрицей $\mathbf{A}_{\text{I}} \mathbf{v}_{\text{I}}^{(r)} = \bar{\mathbf{z}}_r^{(r)}$ так же, как и в п. 1.

Матрица взаимодействия внутренних функций с координатными функциями сторон $\mathbf{A}_{\text{I,II}}$ имеет сильно разреженную структуру

$$\mathbf{A}_{\text{I,II}} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{ee,\text{II}} \\ \mathbf{A}_{eo,\text{II}} \\ \mathbf{A}_{oe,\text{II}} \\ \mathbf{A}_{oo,\text{II}} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}_{ee,\text{II}} = \begin{pmatrix} \mathbf{B}_1 & \mathbf{O} & \mathbf{D} & \mathbf{O} & \mathbf{B}_1 & \mathbf{O} & \mathbf{D} & \mathbf{O} \\ \mathbf{B}_2 & \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{B}_2 & \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{O} \\ \mathbf{B}_3 & \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{B}_3 & \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{O} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{B}_N & \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{B}_N & \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{O} \end{pmatrix}.$$

При этом блок $\mathbf{A}_{ee,\text{II}}$ состоит из диагональных матриц \mathbf{D} и матриц \mathbf{B}_i размера $N \times N$, в каждой из которых только один ненулевой коэффициент $(\mathbf{B}_i)_{1,i} \neq 0$ при всех $i = 1, \dots, N$. Структура матриц $\mathbf{A}_{eo,\text{II}}$, $\mathbf{A}_{oe,\text{II}}$ и $\mathbf{A}_{oo,\text{II}}$ совпадает со структурой $\mathbf{A}_{ee,\text{II}}$ с точностью до перестановки блочных столбцов [28]. Следовательно, умножение матрицы $\mathbf{A}_{\text{I,II}}$ на вектор требует $\mathcal{O}(p)$ арифметических действий, если умножение производится только для ненулевых коэффициентов.

Общая вычислительная стоимость операции $\mathbf{v} \leftarrow \mathcal{K}_{\text{II}}^{(+)} \mathbf{r}$ складывается из стоимости решения системы с матрицей \mathcal{S} (см. выше) и стоимости операций продолжения и сужения. При этом последняя является наибольшей и определяет главный член общей вычислительной стоимости. Она есть произведение числа итераций (1.11), которое при использовании любого из указанных солверов для внутренних задач Дирихле не превосходит $\mathcal{O}((1 + \ln p)(1 + \ln(1 + \ln p)))$, и числа действий на одной итерации, требуемых для решения внутренних задач Дирихле.

Теорема 1.3. Пусть для решения локальных задач Дирихле применяется быстрый солвер с общей вычислительной стоимостью $\mathcal{O}(p^2(1 + \ln p)^k)$, а предобусловливание дополнения Шура и продолжение с интерфейса осуществляется согласно п.1.4. Пусть также Ω — область, составленная из прямоугольников, и сетка конечных элементов прямоугольная. Тогда общая вычислительная стоимость солвера МДО для системы (1.1) оценивается в $\mathcal{O}(p^2(1 + \ln p)^{2,5+k}(1 + \ln(1 + \ln p)))$ арифметических действий.

В численных экспериментах, представленных в разделе 2, локальные задачи Дирихле решались посредством версий, описанных в п. 1.3, многоуровневого солвера и солвера типа МДО с крайними из указанных в п. 1.3 вычислительными стоимостями, соответствующими $k = 0,5$ и $k = 4,5$. Заметим, что в общем случае (криволинейные конечные элементы, переменные коэффициенты эллиптического уравнения) оценка теоремы 1.3 сохраняется без учета стоимости операций умножения на каждой итерации на матрицу \mathbf{K} .

2. Результаты численных экспериментов

2.1. *Общая характеристика.* Численные эксперименты производились с отдельными компонентами — солверами МДО, и с МДО в целом.

Основной и, как правило, наиболее трудоемкой компонентой МДО является солвер для локальных задач Дирихле. Для солвера, основанного на вторичном МДО [16], [17], который используется при решении систем с предобусловливателем локальных задач Дирихле, приводим часть результатов тестирования, полученных А. Рытовым. Результаты численных экспериментов с многосеточным солвером можно найти в [24] и [19]. Практическая трудоемкость обоих солверов в широком диапазоне значений p подтверждает, что они относятся к классу быстрых.

Довольно обширное экспериментирование производилось с операциями продолжения с интерфейса посредством вторичных итерационных процессов с предобусловливателями–солверами локальных задач Дирихле. Здесь также подтвердился основной вывод из априорных оценок, согласно которому для обеспечения сходимости внешнего итерационного процесса и ее ускорения число итераций при продолжении должно быть в $\mathcal{O}(\ln(1 + p))$ раз больше, чем при непосредственном решении локальных задач Дирихле. Была также численно исследована зависимость обобщенного числа обусловленности дополнения Шура при предобусловливании посредством описанного в п. 1.4 предобусловливателя.

Эффективность МДО в целом проверялась по отношению к целому ряду его параметров. Решались задачи Дирихле в квадратной и L -образной областях. При этом нас интересовали зависимости числа глобальных итераций предобусловленного метода сопряженных градиентов и времени счета от p и количества вторичных итераций. Наконец, сравнивались затраты процессорного времени по отношению к погрешности решений, получаемых посредством описанного в работе МДО на базе p -версии и многосеточного солвера коммерческого пакета ANSYS для h -версии.

2.2. *Решение локальных задач Дирихле.* Приводим часть результатов, которые касаются почти оптимального солвера, основанного на вторичной декомпозиции [16], [17]. Применялась наиболее простая для программирования версия алгоритма, для которого априорная оценка вычислительной стоимости имеет вид $\mathcal{O}(p^2(1 + \ln p)^{4,5})$, [16], [17]. Время решения (в сек.) системы линейных алгебраических уравнений с предобусловливателем в качестве матрицы и постоянной правой частью в зависимости от N ($p = 2N + 1$) приведено на рис. 1. Маркерами отмечены значения, соответствующие $\mathcal{O}(N^2(\ln N)^{3,5})$. Вычисления проводились на компьютере Pentium IV 2.4 GHz с 1 GB оперативной памяти. Как видно из графика, на практике солвер оказывается более быстродействующим по сравнению с прогнозом на основе априорной оценки.

2.3. *Операции продолжения–сужения.* Продолжения (1.13) и сужения (1.12) выполнялись посредством вторичного итерационного процесса — предобусловленного метода сопряженных градиентов с предобусловливателем (1.8) и выбором итерационного параметра β_k в соответствии с (1.7). При этом варьировалось число вторичных итераций. Численные эксперименты позволили установить оптимальную (в смысле уменьшения вычислительных затрат глобального итерационного солвера) зависимость количества итераций n_{pr} вторичного итерационного солвера от p (см. рис. 2а)), которая полностью согласуется с теоретической оценкой $n_{pr}(p) = \mathcal{O}((\ln(1 + p))/\rho)$.

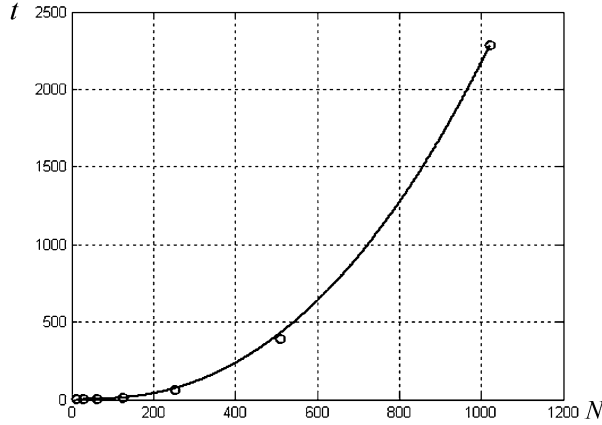


Рис. 1. Вычислительная стоимость солвера для локальных задач Дирихле

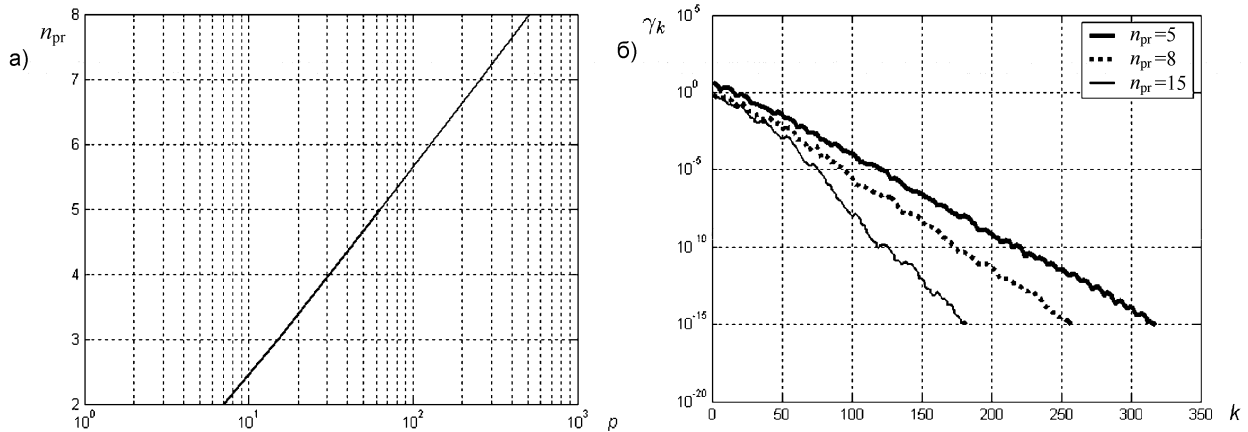


Рис. 2. а) оптимальное число итераций n_{pr} вторичного итерационного солвера в зависимости от p ; б) зависимость невязки приближенного решения от числа итераций глобального солвера

Исследование влияния числа итераций n_{pr} во вторичном солвере, применяемом в продолжениях и сужениях, на эффективность глобального итерационного солвера позволяет сделать также следующие выводы. Уменьшение n_{pr} приводит к потере сходимости внешнего итерационного процесса. При увеличении n_{pr} во вторичном солвере число итераций n_g внешнего процесса уменьшается, однако общие вычислительные затраты возрастают. На рис. 2б) представлено уменьшение невязки в евклидовой норме $\gamma_k = \|\mathbf{Ku}^{(k)} - \mathbf{f}\|_2 / \|\mathbf{f}\|_2$ при решении системы (1.1) в зависимости от числа итераций глобального солвера k для $p = 127$ и различных значений n_{pr} . Аналогичные результаты получаются и для других значений p .

2.4. *Предобуславливание дополнения Шура.* Решалась задача на собственные значения $\mathcal{S}_\varepsilon \mathbf{x} = \lambda \mathbf{x}$ и обобщенная задача на собственные значения $\mathcal{S}_\varepsilon \mathbf{x} = \lambda \mathcal{S}_\varepsilon \mathbf{x}$. Для случая $\mathbf{A} = \mathbf{A}_1$ зависимость числа обусловленности дополнения Шура от p приведена на рис. 3а), а рис. 3б) содержит зависимость от p обобщенного числа обусловленности $\text{cond}(\mathcal{S}_\varepsilon^{-1} \mathcal{S}_\varepsilon)$. Графики приведены отдельно по причине существенной разницы в скоростях роста этих чисел обусловленности. Численные эксперименты полностью подтвердили априорные оценки теоремы 1.2 асимптотического поведения обобщенного числа обусловленности.

2.5. *МДО для задачи Дирихле в L-образной области.* Для L-образной области, изображенной на рис. 4, решалась задача Дирихле для уравнения Пуассона

$$u''_{xx} + u''_{yy} = -f(x, y) \quad (2.1)$$

с однородными краевыми условиями для $f(x, y) \equiv 1$. Система линейных алгебраических уравнений p -версии (1.1) решалась при помощи ПМСГ, описанного в п. 1.2, с предобуславливателем

лем МДО и итерационным параметром β_k , определенным по формуле (1.7). Число n_g итераций ПМСГ, необходимых для уменьшения погрешности по невязке в евклидовой норме в 10^4 раз, в зависимости от p приведено на рис. 5а), а время решения системы t (в сек.) на компьютере Pentium III-733 Mhz с 768 Mb оперативной памяти — на рис. 5б). Поведение числа итераций и вычислительных затрат согласуется с априорными оценками.

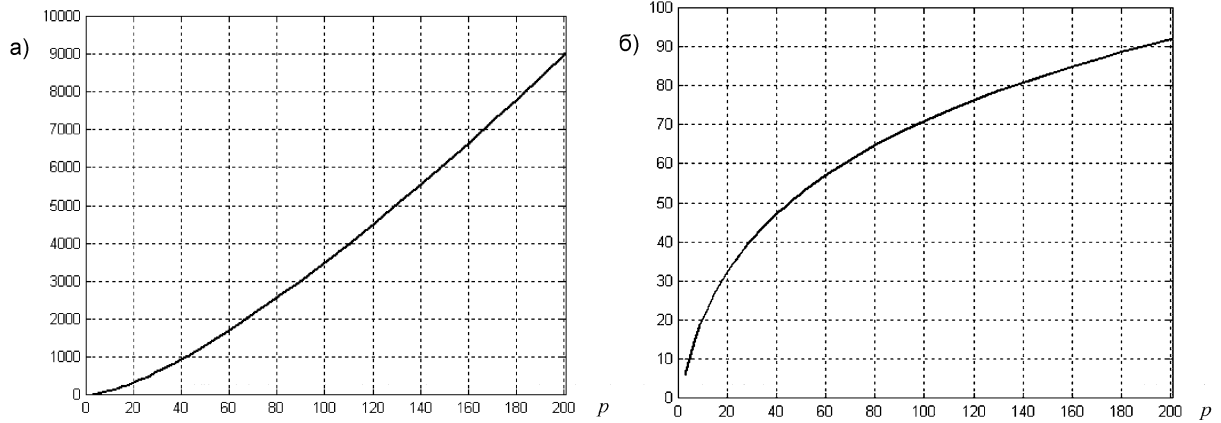


Рис. 3. а) зависимость числа обусловленности дополнения Шура $\text{cond}(\mathbb{S}_\varepsilon)$ от p ;
 б) зависимость обобщенного числа обусловленности $\text{cond}(\mathcal{S}_\varepsilon^{-1}\mathbb{S}_\varepsilon)$ от p

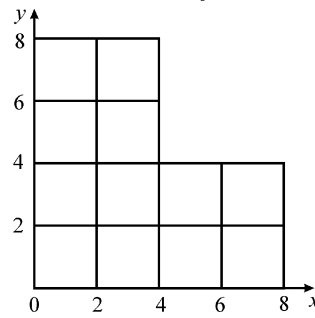


Рис. 4. L -образная область

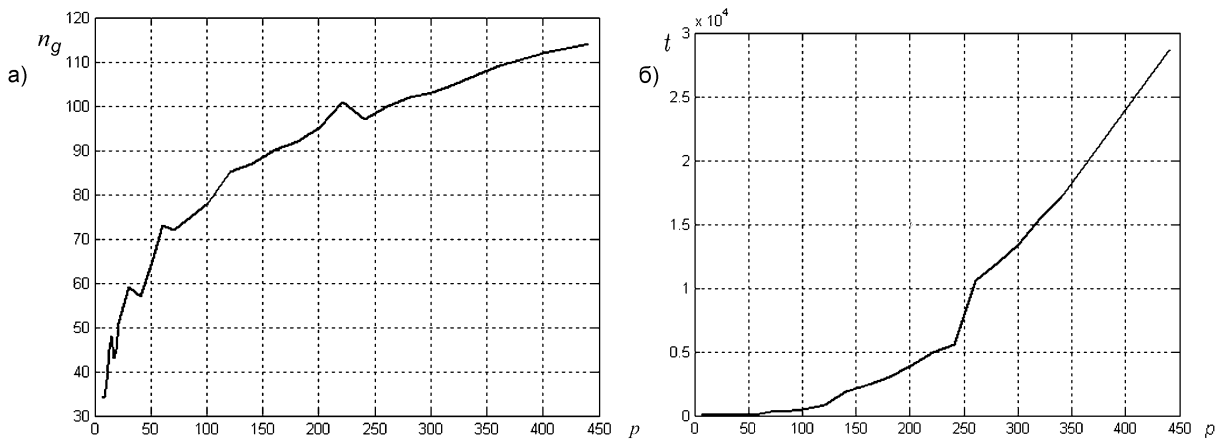


Рис. 5. а) зависимость числа итераций ПМСГ от p ;
 б) зависимость времени решения системы линейных уравнений p -версии от p

2.6. p - и h -версии в задаче с гладким решением. В случае гладких решений скорость сходимости p -версии, как правило, выше скорости сходимости h -версии (напр., [1], [2]). Представляет интерес сравнение времени решения систем линейных алгебраических уравнений для h - и p -дискретизаций, необходимых для получения приближенного решения с одинаковой относительной погрешностью в энергетической норме. В нашем численном эксперименте решалась однородная

граничная задача Дирихле для уравнения Пуассона (2.1) в квадрате $(-4, 4) \times (4, 4)$ с правой частью $f(x, y) = 2\pi^2 \sin \pi x \sin \pi y$, соответствующей точному решению $u_{ex}(x, y) = \sin \pi x \sin \pi y$.

Временные затраты t (в сек.) на решение систем линейных уравнений в зависимости от числа степеней свободы N_{DOF} приведены на рис. 6а) (для h -версии) и рис. 6б) (для p -версии). Отметим, что для h -версии $N_{DOF} = \mathcal{O}(h^{-2})$, а в случае p -версии $N_{DOF} = \mathcal{O}(p^2)$. Решение системы линейных уравнений h -версии осуществлялось в ANSYS при помощи многосеточного солвера (Algebraic multigrid solver). В нашем пакете программ реализован итерационный солвер с МДО-предобусловливателем, описанный в пп. 1.2–1.4. Рисунок 7а) содержит сравнение вычислительных затрат t (в сек.) прямого и итерационного солверов для решения систем линейных уравнений, соответственно h - и p -дискретизаций, в зависимости от относительной ошибки приближенного решения в энергетической норме.

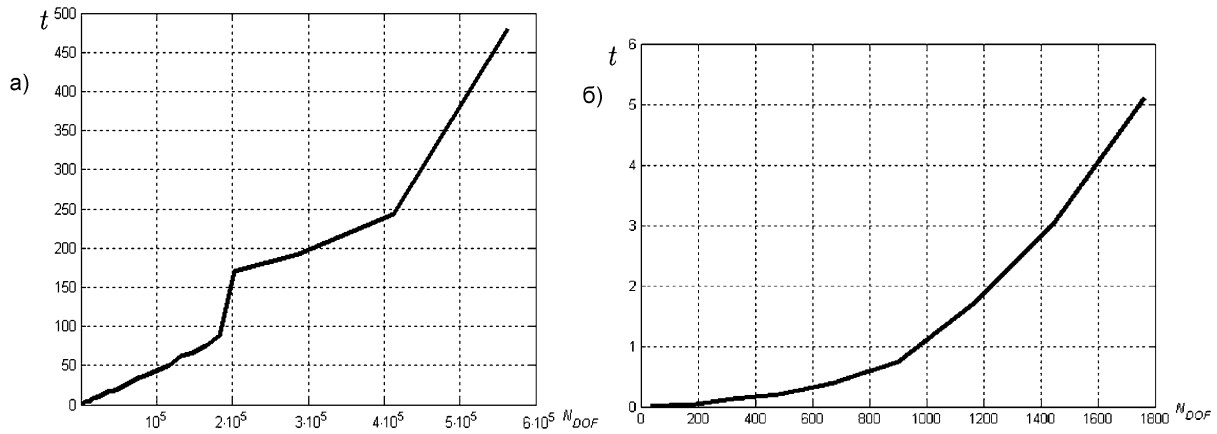


Рис. 6. а) время решения системы линейных уравнений h -версии в зависимости от числа степеней свободы; б) время решения системы линейных уравнений p -версии в зависимости от числа степеней свободы

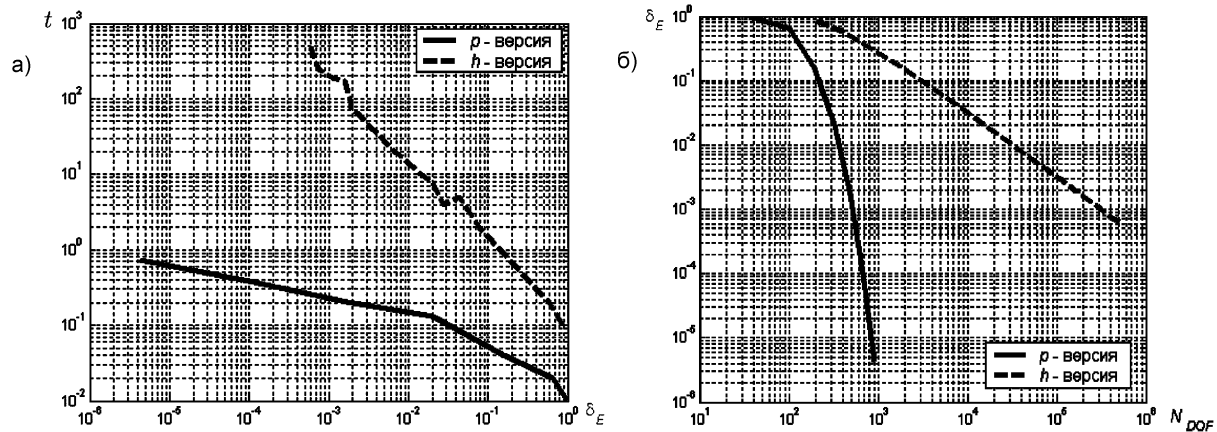


Рис. 7. а) сопоставление вычислительных затрат на решение систем линейных уравнений p - и h -версий; б) зависимость относительной погрешности конечноэлементного решения в энергетической норме от числа степеней свободы N_{DOF}

Исследовалось также уменьшение относительной погрешности в энергетической норме δ_E при увеличении числа степеней свобод N_{DOF} . Решение при помощи h -версии было получено в пакете ANSYS, а для p -версии использовался наш пакет. Полученные результаты (см. рис. 7б)) полностью согласуются с априорными оценками скорости сходимости h - и p -версий метода конечных элементов.

Литература

1. Babuška I., Suri M. *The h - p version of the finite element method with quasiuniform meshes* // Math. Mod. Numer. Anal. – 1987. – V. 21. – P. 199–238.
2. Schwab Ch. *P - and hp -finite element methods. Theory and applications in solid and fluid mechanics.* – Clarendon Press. Oxford, 1998. – 374 p.
3. Nepomnyaschikh S.V. *Method of splitting into subspaces for solving elliptic boundary value problems in complex-form domains* // Russian (cont. Sov.) J. Numer. Anal. and Math. Model. – 1991. – V. 6. – № 2. – P. 151–168.
4. Smith B., Bjørstad P., Gropp W. *Domain decomposition: parallel multilevel methods for elliptic partial differential equations.* – Cambridge University Press, 1996. – 224 p.
5. Babuška I., Craig A., Mandel J., Pitkäranta J. *Efficient preconditioning for the p -version finite element method in two dimensions* // SIAM J. Numer. Anal. – 1991. – V. 28. – № 3. – P. 624–661.
6. Pavarino L.F. *Additive Schwarz methods for the p -version finite element method* // Numer. Math. – 1994. – V. 66. – № 4. – P. 493–515.
7. Ainsworth M. *A preconditioner based on domain decomposition for h - p finite element approximation on quasi-uniform meshes* // SIAM J. Numer. Anal. – 1996. – V. 33. – P. 1358–1376.
8. Ainsworth M., Senior B. *Aspects of an adaptive hp -finite element method: Adaptive strategy, conforming approximation and efficient solvers* // Comp. Methods Appl. Mech. Engrg. – 1997. – V. 150. – P. 65–87.
9. Guo B., Cao W. *Inexact solvers on element surfaces for the p and h - p finite element method* // Comput. Methods Appl. Mech. – 1997. – V. 150. – P. 173–191.
10. Ivanov S.A., Korneev V.G. *On the preconditioning in the domain decomposition technique for the p -version finite element method. I* // Technische Universität Chemnitz-Zwickau. Preprint SPC 95-35. – 1995. – № 12. – P. 1–15.
11. Ivanov S.A., Korneev V.G. *On the preconditioning in the domain decomposition technique for the p -version finite element method. II* // Technische Universität Chemnitz-Zwickau. Preprint SPC 95-36. – 1995. – № 12. – P. 1–14.
12. Ivanov S.A., Korneev V.G. *Preconditioning in the domain decomposition methods for the p -version with the hierarchical bases* // Матем. моделир. – 1996. – Т. 8. – № 9. – С. 63–73.
13. Korneev V.G., Jensen S. *On domain decomposition preconditioning in the hierarchical p -version of the finite element method* // Comput. Methods. Appl. Mech. Eng. – 1997. – V. 150. – P. 215–238.
14. Корнеев В.Г., Енсен С. *Эффективное предобусловливание методом декомпозиции области для p -версии с иерархическим базисом. I* // Изв. вузов. Математика. – 1999. – № 5. – С. 37–56.
15. Корнеев В.Г., Енсен С. *Эффективное предобусловливание методом декомпозиции области для p -версии с иерархическим базисом. II* // Изв. вузов. Математика. – 1999. – № 11. – С. 24–40.
16. Корнеев В.Г. *Почти оптимальный метод решения задач Дирихле на подобластях декомпозиции иерархической hp -версии* // Дифференц. уравнения. – 2001. – Т. 37. – № 7. – С. 1–10.
17. Korneev V.G. *Local Dirichlet problems on subdomains of decomposition in hp discretizations, and optimal algorithms for their solution* // Матем. моделир. – 2002. – Т. 14. – № 5. – С. 51–74.
18. Korneev V.G. *Fast domain decomposition solvers for hp discretizations of 2-nd order elliptic equations* // In Proceedings of the International Conference on Computational Mathematics. 24–28 of June, 2002, Novosibirsk. Institute of Computational Mechanics and Mathematical Geophysics of Siberian Branch of Russian Acad. of Sci.: Novosibirsk, 2002. – P. 536–547.
19. Korneev V.G., Xanthis L., Anoufrieu I.E. *Solving finite element hp discretizations of elliptic problems by fast DD algorithms* // Тр. СПбГПУ. – 2002. – № 485. – С. 126–153.
20. Корнеев В.Г. *Схемы метода конечных элементов высоких порядков точности.* – Л.: Изд-во ЛГУ, 1977. – 205 с.
21. Giladi E., Golub G., Keller J. *Inner and outer iterations for the Chebyshev algorithm* // SIAM J.

- on Numer. Anal. – 1998. – V. 35. – № 1. – P. 300–319.
22. Golub G.H., Ye Q. *Inexact preconditioned conjugate gradient method with inner-outer iteration* // SIAM J. Sc. Comp. – 1999. – V. 21. – № 4. – P. 1305–1320.
 23. Golub G., Overton M. *The convergence of inexact Chebyshev and Richardson iterative methods for solving linear systems* // Numer. Math. – 1988. – V. 53. – P. 571–593.
 24. Beuchler S. *Multigrid solver for the inner problem in domain decomposition methods for p-FEM* // SIAM J. Numer. Anal. – 2002. – V. 40. – № 4. – P. 928–944.
 25. Beuchler S., Schneider R., Schwab C. *Multiresolution weighted norm equivalence and applications* // Preprint SFB393/02-09, Technische Universität Chemnitz, 2002.
 26. Иванов С.А., Корнеев В.Г. *Выбор координатных функций высоких порядков и предобуславливание в рамках метода декомпозиции области* // Изв. вузов. Математика. – 1995. – № 4. – С. 62–81.
 27. Korneeov V., Xantis L., Anoufrieu I. *Hierarchical and Lagrange hp discretizations and fast domain decomposition solvers for them* // Johannes Kepler Universität Linz. SFB-Report № 02-18, 2002. – 30 p.
 28. Ануфриев И.Е., Головин О.А., Константинов В., Смирнова Е.Н. *Численный эксперимент с эффективным предобуславливанием интерфейсной задачи в p-версии* // Тр. СПбГПУ. – 2002. – № 485. – С. 3–16.

Санкт-Петербургский
государственный политехнический
университет

Поступила
20.10.2003