ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2003 МАТЕМАТИКА № 8 (495)

УДК 519.612

М.В. ГОРЕЛОВА, Е.В. ЧИЖОНКОВ

О РЕШЕНИИ СЕДЛОВЫХ ЗАДАЧ МЕТОДАМИ С МОДЕЛЬНЫМИ СЕДЛОВЫМИ ОПЕРАТОРАМИ НА ВЕРХНЕМ СЛОЕ

Введение

Пусть U и P — евклидовы пространства векторов размерностей N_u и N_p соответственно. Рассмотрим невырожденную вещественную систему линейных алгебраических уравнений

$$L_0 z \equiv \begin{pmatrix} A & B \\ B^T & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f \\ \varphi \end{pmatrix} \equiv F, \tag{1}$$

где $z = \{u, p\}$ — вектор неизвестных, $A = A^T > 0$ — квадратная матрица размерности $N_u \times N_u$, а B — прямоугольная в общем случае матрица размерности $N_u \times N_p$. Задачи такого типа возникают при численном решении систем линейных уравнений в теории упругости и гидродинамике (задача Стокса) при использовании смешанных аппроксимаций для эллиптических уравнений, а также при решении краевых задач с использованием нестыкующихся сеток (см., напр., [1]–[3] и цитированную там литературу).

В данной статье анализируется сходимость следующего итерационного метода решения задачи (1)

$$\widetilde{L} \frac{z^{k+1} - z^k}{\tau_{k+1}} + L_0 z^k = F. \tag{2}$$

Верхний индекс обозначает номер итерации, матрица $\widetilde{L}$ имеет структуру

$$\widetilde{L} = \begin{pmatrix} Q & B \\ B^T & -\alpha C \end{pmatrix},$$

где $Q = Q^T > 0$, $C = C^T > 0$, α — постоянный параметр предобуславливателя, τ_k — переменный итерационный параметр. Далее считаются известными постоянные в матричных неравенствах

$$\begin{aligned} &\gamma C \le B^T A^{-1} B \le \Gamma C, \quad && 0 < \gamma < \Gamma, \\ &\delta Q \le A \le \Delta Q, && 0 < \delta \le \Delta, \end{aligned}$$

которые по мере надобности будем масштабировать, например, полагать величину δ (или Δ) равной единице для упрощения некоторых выкладок.

Исследование алгоритмов с модельными седловыми операторами на верхнем слое для таких задач проводилось в [4]–[8], причем наиболее близкая постановка задачи рассматривалась в [4], [5]. Отличительными особенностями данной статьи являются оптимизация спектра переобусловленной задачи относительно параметра α и использование переменных итерационных параметров. Здесь пока не рассматриваются способы конструктивного построения матриц $\widetilde{L}$, допускающих эффективное обращение. Как правило, для этого используется блочно-треугольная

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 99-01-01146).

факторизация (напр., [6], [7]), что автоматически приводит к более сложным оптимизационным задачам для выбора параметров алгоритма.

Введем обозначение $H = \ker B^T$, тогда $\dim(H) = N_u - N_p$. Далее потребуется разложение пространства U в прямую сумму $U = H \oplus G$, где $G = H^{\perp}$. Целью статьи является получение неулучшаемых оценок скорости сходимости метода (2) при использовании важного предположения, связанного с выбором предобуславливателя Q для матрицы A (в операторе $\widetilde{L}$).

Условие А. Пространства H и G являются инвариантными относительно матрицы $Q^{-1}A$.

При практической реализации алгоритма выполнение этого требования не является необходимым, но оно позволяет достаточно просто параметризовать спектр предобусловленного оператора для установления его точных границ.

Изложим коротко результаты исследований. Для невырожденных матриц $\widetilde{L}$ в зависимости от параметра α спектр предобусловленного оператора исходной задачи $R = \widetilde{L}^{-1}L_0$ может располагаться либо только на положительной части вещественной оси, либо по обе стороны от начала координат. Использование только неотрицательных значений α является достаточным для установления оптимальных характеристик сходимости метода. При этом матрица $\widetilde{L}$ имеет седловую структуру, а спектр R положителен. Минимуму спектрального числа обусловленности соответствует значение $\alpha = 0$, но реализация этого случая требует специального выбора начального приближения.

1. Вспомогательные результаты

Рассмотрим связанные с (1) обобщенные задачи на собственные значения

$$A_0 p \equiv B^T A^{-1} B p = tCp, \tag{3}$$

$$B_0 u \equiv BC^{-1}B^T u = \omega A u, \tag{4}$$

где t, ω — спектральные параметры, и проанализируем их решения. Имеет место [9]

Теорема 1. *Пусть* $\det(L_0) \neq 0$. *Тогда*

1) *все собственные значения задачи* (3) *положительны*;
2) *ненулевые собственные значения задачи* (4) *положительны и совпадают с учетом кратностей с собственными значениями задачи* (3);
3) *задача* (4) *имеет ровно* $N_u - N_p \geq 0$ *нулевых собственных значений*;
4) *каждому решению* (t_i, p_i) *задачи* (3) *можно поставить в соответствие единственное (с точностью до постоянного множителя) решение* (ω_i, u_i) *задачи* (4) *по следующему правилу*:

$$t_i = \omega_i, \quad p_i = C^{-1}B^T u_i, \quad i = 1, \ldots, N_p.$$

Разложим базис пространства U, состоящий из собственных векторов задачи (4), на два подмножества: базис пространства H и базис его ортогонального дополнения G

$$\{u_i\}_{i=1}^{N_u} = \{h_i\}_{i=1}^{N_u - N_p} \bigcup \{g_i\}_{i=1}^{N_p}.$$

Из (4) следует, что каждую из подсистем векторов можно считать ортонормированной в метрике, порождаемой матрицей A.

Рассмотрим пространство $Z = U \times P$ со скалярным произведением

$$(z_1, z_2)_Z = \chi_1(A\,u_1, u_2) + \chi_2(C\,p_1, p_2), \quad z_i = \{u_i, p_i\} \in Z, \;\; \chi_i > 0, \;\; i = 1, 2,$$

и построим в нем базис специального вида, используя собственные векторы задач (3) и (4). Имеет место [9]

Теорема 2. *Система векторов* $\{z_i\}_{i=1}^{N_u+N_p}$ *структуры*

$$z_i^{(1)} = \{h_i, 0\}, \qquad i = 1, \ldots, N_u - N_p,$$
$$z_j^{(2,3)} = \{g_j, \varkappa_j^{(2,3)} p_j\}, \quad j = 1, \ldots, N_p,$$

где $p_j = C^{-1}B^T g_j$, *образует базис в пространстве* Z, *если при фиксированном значении* j *конечные коэффициенты* $\varkappa_j^{(2)}$ *и* $\varkappa_j^{(3)}$ *различны.*

2. Спектр предобусловленного оператора

Изучим вопрос о спектре матрицы $R = \widetilde{L}^{-1}L_0$ в зависимости от параметра α, т. е. рассмотрим спектральную задачу

$$L_0 z = \lambda \widetilde{L} z. \tag{5}$$

Имеет место

Теорема 3. *Пусть* $\alpha \neq 0$ *и выполнено условие* A, *тогда собственные значения в задаче* (5) *принадлежат множеству*

$$\Lambda = \{s\} \bigcup \{\lambda^{(2,3)}\}, \quad t \in [\gamma, \Gamma], \quad s \in [\delta, \Delta],$$
$$\lambda^{(2,3)} = \frac{1 + \frac{\alpha}{2t} \pm \frac{\alpha}{2t}\sqrt{1 + \frac{4t}{\alpha}(1 - \frac{1}{s})}}{1 + \frac{\alpha}{st}}. \tag{6}$$

Доказательство. Перепишем задачу (5) в покомпонентной форме

$$\begin{cases} Au + Bp = \lambda(Qu + Bp), \\ B^T u = \lambda(B^T u - \alpha C p) \end{cases}$$

и отметим ее свойства.

Задача (5) не имеет нулевых собственных значений λ, отвечающих ненулевым собственным векторам, т. к. по условию $\det(L_0) \neq 0$; и не имеет собственных векторов $z = \{u, p\}$ вида $\{0, p\}$, т. к. в этом случае из второго соотношения (5) следует $p = 0$ (поскольку $\lambda \neq 0$, $\alpha \neq 0$, $C = C^T > 0$).

Если в решении задачи (5) имеются собственные векторы $z = \{h, p\}$, где $h \in H$ (т. е. $B^T h = 0$), то вторая компонента p необходимо равна нулю, а соответствующие собственные значения $\lambda^{(1)}$ являются решениями спектральной задачи $Ah = \lambda Qh$, т. е. $\lambda^{(1)} \in [\delta, \Delta]$. Заметим, что при выполнении условия A таких собственных векторов $\{z^{(1)}\}$ имеется ровно $N_u - N_p$.

Рассмотрим теперь другой случай, когда собственные векторы имеют вид $z = \{g, p\}$, где $g \in G$ (т. е. $B^T g \neq 0$). Пусть $p = \varkappa C^{-1} B^T g$, тогда задача (5) примет вид

$$\begin{cases} Ag + \varkappa BC^{-1}B^T g = \lambda(Qg + \varkappa BC^{-1}B^T g), \\ B^T g = \lambda(B^T g - \alpha\varkappa B^T g), \end{cases}$$

и из второго уравнения будем иметь

$$\varkappa = \frac{\lambda - 1}{\lambda\alpha},$$

а после подстановки этого соотношения в первое из уравнений получим

$$\{\lambda^2(\alpha Q + B_0) - \lambda(\alpha A + 2B_0) + B_0\} g = 0.$$

Заметим, что справедливы неравенства

$$\Delta^{-1} \leq \frac{(Qg, g)}{(Ag, g)} \leq \delta^{-1}, \quad \gamma \leq \frac{(B_0 g, g)}{(Ag, g)} \leq \Gamma.$$

Поэтому собственные значения λ удовлетворяют квадратным уравнениям

$$\lambda^2(\alpha s^{-1}+t)-\lambda(\alpha+2t)+t=0,$$

где спектральные параметры s и t принимают значения из своих областей определения: $s\in[\delta,\Delta]$, $t\in[\gamma,\Gamma]$. Теперь, выписывая явные выражения (6) (соответствующие собственные векторы обозначим через $\{z^{(2,3)}\}$), приходим к искомому выражению для множества Λ, и остается показать, что таким способом найдены все собственные значения предобусловленного оператора.

Рассмотрим вначале более простой случай различных собственных значений $\lambda^{(2)}$ и $\lambda^{(3)}$ при фиксированных t и s. Или, точнее, пусть параметр α таков, что выражение $1+\frac{4t}{\alpha}(1-\frac{1}{s})$ не обращается в нуль ни при каких значениях t и s. Тогда величины $\varkappa^{(2)}$ и $\varkappa^{(3)}$ для любых t и s также будут различны, что следует из их явного представления. Напомним, что из теоремы 1 следует наличие N_p A-ортогональных собственных векторов g_j, а это означает, что найденная система собственных векторов $\{z_i^{(1,2,3)}\}_{i=1}^{N_u+N_p}$ задачи (5) удовлетворяет теореме 2, следовательно, все искомые собственные значения найдены.

Обобщим доказательство на случай кратных собственных значений, когда обращаются в нуль выражения $1+\frac{4t}{\alpha}(1-\frac{1}{s})$ при некоторых t и s. Пусть в данном случае ($\lambda^{(2)}=\lambda^{(3)}=\lambda$) имеется только один линейно независимый собственный вектор матрицы $R=\widetilde{L}^{-1}L_0$ с первой компонентой g: $z^{(2)}=\{g,\frac{\lambda-1}{\alpha\lambda}C^{-1}B^Tg\}$. Тогда для построения полной в Z системы функций достаточно добавить к нему в пару корневой вектор высоты два вида $z^{(3)}=\{g,\frac{\lambda-1+\lambda^{-1}}{\alpha\lambda}C^{-1}B^Tg\}$, удовлетворяющий уравнению $(R-\lambda I)^2z=0$, и, очевидно, линейно независимый с соответствующим собственным вектором. Теперь уточненная система собственных векторов $\{z_i^{(1,2,3)}\}_{i=1}^{N_u+N_p}$ удовлетворяет теореме 2.

Таким образом, полнота найденной системы векторов в пространстве Z, состоящей либо только из собственных векторов оператора R, либо с добавлением к ним корневых по указанной схеме, дает основание утверждать, что других собственных значений в задаче (5), отличных от указанных, не существует. $\square$

Впоследствии будем использовать следующие эквивалентные обозначения для полученных собственных значений:

$$\lambda^{(1)}(s)=s,$$
$$\lambda^{(2,3)}(s,t)=\frac{2t+\alpha}{2\left(\frac{\alpha}{s}+t\right)}\pm\sqrt{\frac{(2t+\alpha)^2}{4\left(\frac{\alpha}{s}+t\right)^2}-\frac{t}{\frac{\alpha}{s}+t}},\tag{7}$$

где знак $+$ относится к $\lambda^{(2)}$.

Заметим, что при $\alpha=0$ приведенные рассуждения некорректны, поэтому этот случай будет рассмотрен отдельно.

3. Исследование сходимости при $\alpha\neq 0$

3.1. Случай $\alpha>0$. Для удобства выкладок в этом разделе будем полагать, что постоянные эквивалентности δ, Δ матриц A и Q нормированы следующим образом: $1=\delta\leq\Delta$. Это не уменьшает общности проводимых рассуждений, но гарантирует вещественность и положительность всех собственных значений $\lambda^{(2,3)}(s,t)$. Заметим, что при этом матрица R является матрицей простой структуры, т. е. имеет базис только из собственных векторов.

Имеет место

Теорема 4. *При выполнении условия* А *и любом* $\alpha > 0$ *спектр матрицы* R *принадлежит отрезку* $[a, \Delta]$, *где*

$$a = \frac{1 + \frac{\alpha}{2\gamma} - \frac{\alpha}{2\gamma}\sqrt{1 + \frac{4\gamma}{\alpha}(1 - \frac{1}{\Delta})}}{1 + \frac{\alpha}{\Delta\gamma}}. \tag{8}$$

Доказательство. Принимая во внимание очевидное неравенство $0 < \lambda^{(3)}(s,t) < \lambda^{(2)}(s,t)$ для произвольных $s \geq 1$, $t, \alpha > 0$ и вводя для границ спектра матрицы R обозначения $[a, b]$, имеем

$$b = \max\{\Delta, \max_{s,t} \lambda^{(2)}(s,t)\}, \quad a = \min\{\delta, \min_{s,t} \lambda^{(3)}(s,t)\}.$$

Рассмотрим теперь явное выражение

$$\frac{\partial \lambda^{(2,3)}}{\partial s} = \frac{\alpha^2 + 2\alpha t}{2(\alpha + st)^2} \pm \frac{\alpha^3 s + 4\alpha^2 ts + 2st^2\alpha - 2\alpha^2 t}{2(\alpha + st)^2\sqrt{\alpha^2 s^2 + 4\alpha s^2 t - 4\alpha ts}}. \tag{9}$$

Числитель во втором слагаемом — линейная по s функция, которая обращается в нуль при $s^* = \frac{2\alpha t}{\alpha^2 + 4\alpha t + 2t^2} < 1$. Напомним, что $1 = \delta \leq s \leq \Delta$, поэтому $s > s^*$ и $\max_s \lambda^{(2)}(s,t) = \lambda^{(2)}(\Delta, t)$.

Покажем, что $\frac{\partial \lambda^{(3)}}{\partial s} < 0$. Предполагая противное, перенесем второе слагаемое (9) в правую часть и возведем в квадрат. После приведения подобных получим противоречивое неравенство $0 > t^2(st + \alpha)^2$. Отсюда следует $\min_s \lambda^{(3)}(s,t) = \lambda^{(3)}(\Delta, t)$. Это приводит к выражениям

$$b = \max\{\Delta, \max_t \lambda^{(2)}(\Delta,t)\}, \quad a = \min\{\delta, \min_t \lambda^{(3)}(\Delta,t)\}.$$

Далее заметим, что $\max_t \lambda^{(2)}(\Delta, t) \leq \Delta$. Действительно, предположив противное, т. е.

$$\lambda^{(2)}(\Delta, t) = \frac{2t + \alpha}{2(\frac{\alpha}{\Delta} + t)} + \sqrt{\frac{(2t+\alpha)^2}{4(\frac{\alpha}{\Delta} + t)^2} - \frac{t}{\frac{\alpha}{\Delta} + t}} > \Delta,$$

и учитывая, что первое слагаемое строго меньше правой части, сразу получаем ошибочное неравенство

$$t\frac{(\Delta - 1)^2}{\frac{\alpha}{\Delta} + t} < 0.$$

Аналогичным образом имеем $\min_t \lambda^{(3)}(\Delta, t) \leq 1$. Вспоминая, что $\delta = 1$, получим

$$b = \Delta, \quad a = \min_t \lambda^{(3)}(\Delta, t).$$

Для завершения доказательства проанализируем монотонность $\lambda^{(3)}(\Delta, t)$ относительно аргумента t

$$\frac{\partial \lambda^{(3)}(\Delta, t)}{\partial t} = \frac{\alpha\Delta(2 - \Delta)}{2(\alpha + \Delta t)^2} - \frac{\alpha^2\Delta(2\Delta - \Delta^2 - 2) + 2t\alpha\Delta^2(1 - \Delta)}{2(\alpha + \Delta t)^2\sqrt{\Delta^2\alpha^2 + 4\alpha t\Delta^2 - 4\alpha t\Delta}}.$$

В этом выражении второе слагаемое всегда отрицательное, поэтому при $\Delta \leq 2$ функция возрастает. Убедимся в этом при $\Delta > 2$. Предположим, что это выражение стало отрицательно. Если в получившемся неравенстве перенести первое слагаемое в правую часть и возвести в квадрат, то получим заведомо неверное неравенство $(\Delta - 1)^2(\alpha + \Delta t)^2 < 0$. Окончательно получаем (8). $\square$

Теперь для алгоритма (2) можно использовать результаты общей теории итерационных методов решения систем с симметризуемыми положительно определенными матрицами [10]. В частности, использование оптимальных (чебышевских) параметров τ_k

$$\widetilde{\tau}_n = \frac{2}{(a+b)(1+q_1\mu_n)}, \quad n = 1,2,\ldots,k, \quad q_1 = \frac{1-\xi}{1+\xi}, \;\; \xi = \frac{a}{b},$$
$$\mu_n \in \aleph_k = \left\{-\cos\frac{2i-1}{2k}\pi, \;\; i = 1,2,\ldots,k\right\},$$

гарантирует оценку скорости сходимости в достаточно произвольной метрике $D_z = D_z^T > 0$, $D_zR = (D_zR)^T$:

$$\|z^k - z\|_{D_z} \leq \varepsilon_k \, \|z^0 - z\|_{D_z},$$

где

$$\varepsilon_k = \frac{2q_0^k}{1+q_0^{2k}}, \quad q_0 = \frac{1-\sqrt{\xi}}{1+\sqrt{\xi}}.$$

Однако необходимость построения множества $\aleph_k$ для заранее определенного количества итераций k и, кроме того, требование упорядоченности его элементов для вычислительной устойчивости [10], [11] делают его менее привлекательным с практической точки зрения по сравнению с известными трехслойными методами такими, как метод сопряженных градиентов или трехслойный чебышевский, гарантирующими ту же неулучшаемую оценку погрешности для произвольного номера итерации k.

В завершение раздела обратим внимание на важное следствие теоремы 4. Из явной формулы для левой границы спектра оператора R следует монотонность его спектрального числа обусловленности относительно параметра α. В частности,

$$\mathrm{cond}(\widetilde{L}^{-1}L_0) = \frac{\Delta}{\lambda^{(3)}(\Delta,\gamma)}$$

стремится при $\alpha \to 0$ к точке минимума, равной Δ/δ.

3.2. Случай $\alpha < 0$. При анализе спектра для отрицательных значений α, чтобы обеспечить вещественность всех собственных значений $\lambda^{(2,3)}(s,t)$, удобно перенормировать постоянные эквивалентности δ, Δ матриц A и Q следующим образом: $0 < \delta \leq \Delta = 1$. Это не затрагивает существа дела, т. к. основная задача этого раздела — показать, что использование отрицательных α не приводит к ускорению сходимости метода.

Резко ограничить интересующую нас область изменения параметра α позволяет

Лемма 1.

1) *Матрица* $R = \widetilde{L}^{-1}L_0$ *однозначно определена при выполнении одного из неравенств:* $\alpha < -\Gamma\Delta$ *или* $-\gamma\delta < \alpha < 0$.
2) *При* $\alpha < -\Gamma\Delta$ *матрица* R *имеет собственные значения разных знаков.*
3) *При* $-\gamma\delta < \alpha < 0$ *матрица* R *имеет только положительные собственные значения.*

Доказательство. Однозначность определения матрицы R связана с обратимостью предобуславливателя $\widetilde{L}$ в алгоритме (2) и зависит только от обращения в нуль знаменателя формул для $\lambda^{(2,3)}$ в (7). Приведенные в первом утверждении леммы неравенства гарантируют, что $\alpha \neq -st$ ни при каких значениях параметров s и t.

При $\alpha < -\Gamma\Delta$ в (7) второе слагаемое по модулю строго больше первого, поэтому $\lambda^{(2)}$ и $\lambda^{(3)}$ имеют разные знаки.

Аналогично при $-\gamma\delta < \alpha < 0$ в (7) второе слагаемое по модулю строго меньше первого, поэтому $\lambda^{(2)} > \lambda^{(3)} > 0$. □

Заметим, что если спектр оператора R расположен по обе стороны от нуля, скорость сходимости метода (2) будет хуже, чем в знакоопределенном случае [12]. Поскольку $\lambda^{(1)}(s)$ всегда положительны, то далее может представлять интерес только диапазон $-\gamma\delta < \alpha < 0$.

Лемма 2. *При выполнении неравенства $-\gamma\delta < \alpha < 0$ спектр матрицы R принадлежит отрезку*

$$\left[\delta,\ \frac{1+\frac{\alpha}{2\gamma}+\frac{\alpha}{2\gamma}\sqrt{1+\frac{4\gamma}{\alpha}(1-\frac{1}{\delta})}}{1+\frac{\alpha}{\delta\gamma}}\right].$$

Доказательство этого утверждения аналогично доказательству теоремы 4 и опирается только на выписанные там формулы для производных $\lambda^{(2,3)}$, обеспечивающие искомую монотонность.

Поэтому сразу обратим внимание на следствие леммы 2. Из явной формулы для правой границы спектра оператора R следует монотонность его спектрального числа обусловленности относительно параметра α. В частности,

$$\operatorname{cond}(\widetilde{L}^{-1}L_0)=\frac{\lambda^{(2)}(\delta,\gamma)}{\delta}$$

стремится при $\alpha\to 0$ к точке минимума, равной Δ/δ. Точно такая же ситуация имела место при положительных значениях α, т. е. случай $\alpha<0$ не порождает ничего нового в плане сходимости алгоритма и рассматриваться далее не будет.

4. Исследование сходимости при $\alpha = 0$

Обозначим погрешность метода на k-й итерации через $\{v^k, r^k\} = \{u^k-u, p^k-p\}$, где $\{u,p\}$ — точное решение задачи (1), и выберем начальное приближение $z^0=\{u^0,p^0\}$ из условия

$$\begin{cases} Qu^0+Bp^0=f,\\ B^Tu^0=\varphi. \end{cases} \tag{10}$$

Лемма 3. *Для любой итерации k первая компонента v^k погрешности метода (2) при $\alpha=0$, стартующего с начального приближения вида (10), является элементом подпространства H.*

Доказательство. Запишем алгоритм (2) в покомпонентной форме

$$\begin{cases} Q\dfrac{u^{k+1}-u^k}{\tau_{k+1}}+B\dfrac{p^{k+1}-p^k}{\tau_{k+1}}+Au^k+Bp^k=f,\\ B^T\dfrac{u^{k+1}-u^k}{\tau_{k+1}}+B^Tu^k=\varphi. \end{cases}$$

Второе уравнение приводит к соотношению

$$B^T\frac{v^{k+1}-v^k}{\tau_{k+1}}+B^Tv^k=0$$

только для погрешности v^k при $k=0,1,\ldots$ Выбор начального приближения гарантирует $B^Tv^0=0$, т. е. $v^0\in H$. Переписывая полученное соотношение в виде

$$B^Tv^{k+1}=(1-\tau_{k+1})B^Tv^k,$$

получаем, что $v^k\in H$ для любого $k=1,2,\ldots$ $\square$

Продолжим изучение структуры погрешности. Справедлива

Лемма 4. *Для любой итерации k погрешность $\{v^k,r^k\}$ метода (2) при $\alpha=0$, стартующего с начального приближения вида (10), удовлетворяет соотношениям*

$$Q\frac{v^{k+1}-v^k}{\tau_{k+1}}+Av^k=0,\qquad \frac{r^{k+1}-r^k}{\tau_{k+1}}+r^k=0.$$

Доказательство. Запишем первое уравнение метода (2) для ошибки

$$Q\frac{v^{k+1}-v^k}{\tau_{k+1}}+B\frac{r^{k+1}-r^k}{\tau_{k+1}}+Av^k+Br^k=0. \tag{11}$$

Применим к нему матрицу Q^{-1} и после скалярного умножения на вектор Ah, где h — произвольный элемент из H, будем иметь

$$\left(\frac{v^{k+1}-v^k}{\tau_{k+1}}+Q^{-1}Av^k,Ah\right)+\left(Q^{-1}B\frac{r^{k+1}-r^k}{\tau_{k+1}}+Q^{-1}Br^k,Ah\right)=0. \tag{12}$$

Принимая во внимание симметричность матрицы Q^{-1}, выполнение условия А и принадлежность $h\in H=\ker(B^T)$, получаем, что второе скалярное произведение в (12) равно нулю. Отсюда на основании леммы 3 и обращения в нуль первого скалярного произведения в (12) имеем первое соотношение леммы $Qv_t+Av=0$.

Далее, подставляя полученное равенство в уравнение (11), будем иметь

$$B\frac{r^{k+1}-r^k}{\tau_{k+1}}+Br^k=0.$$

Умножим это соотношение скалярно на $Q^{-1}Ag$, где g — произвольный элемент из $G=H^{\perp}$. Получим

$$\left(\frac{r^{k+1}-r^k}{\tau_{k+1}}+r^k,\ B^TQ^{-1}Ag\right)=0.$$

В этом случае использование условия А и теоремы 1 приводит ко второму соотношению леммы. $\square$

Теперь реализация алгоритма (2) с $\alpha=0$ выглядит следующим образом: выбираем начальное приближение вида (10), затем делаем первый шаг с $\tau_1=1$ с целью обнуления второй компоненты погрешности $r^k=p^k-p$ для произвольного $k\geq 1$. Далее использование чебышевских параметров на отрезке $[\delta,\Delta]$ приводит в метрике, порождаемой оператором $D_u=D_u^T>0$, $D_uQ^{-1}A=(D_uQ^{-1}A)^T$, к оценке для первой компоненты погрешности

$$\|u^k-u\|_{D_u}\leq\varepsilon_k\|u^0-u\|_{D_u},$$

где

$$\varepsilon_k=\frac{2q_0^k}{1+q_0^{2k}},\quad q_0=\frac{1-\sqrt{\xi}}{1+\sqrt{\xi}},\quad \xi=\frac{\delta}{\Delta}.$$

Оценка, полученная для $\alpha=0$, совпадает с оценкой для погрешности решения задачи $Au=b$ при использовании предобуславливателя Q и поэтому является неулучшаемой.

В заключение отметим, что результаты работы могут быть обобщены на случай системы $L_\varepsilon z=F$ вида

$$L_\varepsilon z\equiv\begin{pmatrix}A & B\\ B^T & -\varepsilon D\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u\\ p\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}f\\ \varphi\end{pmatrix}\equiv F$$

с параметром $\varepsilon\geq 0$ и матрицей $D=D^T>0$.

Литература

1. Дьяконов Е.Г. *Минимизация вычислительной работы. Асимптотически оптимальные алгоритмы для эллиптических задач.* – М.: Наука, 1989. – 272 с.
2. Brezzi F., Fortin M. *Mixed and hybrid finite element methods.* – New York: Springer-Verlag, 1991. – 350 p.
3. Василевский Ю.В. *Методы решения краевых задач с использованием нестыкующихся сеток* // В кн. “Труды Математического центра им. Н.И. Лобачевского”. – Т. 2. – Итерационные методы решения линейных и нелинейных сеточных задач. – Казань: УНИПРЕСС, 1999. – С. 94–121.
4. Дьяконов Е.Г. *О некоторых классах седловых градиентных методо*в // Вычисл. процессы и системы. – 1987. – Т. 5. – С. 101–115.
5. Braess D., Sarazin R. *An efficient smoother for the Stokes problem* // Appl. Numer. Math. – 1997. – V. 23. – P. 3–19.
6. Bank R.E., Welfert B.D., Yserentant H. *A class of iterative methods for solving saddle point problems* // Numer. Math. – 1990. – V. 56. – P. 645–666.
7. Vassilevski P.S., Lazarov R.D. *Preconditioning mixed finite element saddle-point elliptic problems* // Numer. Lin. Alg. with Appl. – 1994. – V. 1. – P. 1–20.
8. Zulehner W. *Analysis of iterative methods for saddle point problems*: *a unified approach.* – Report № 538 (February 1998), Department Numer. Anal. Johannes Kepler Univ. – Linz, Austria. – 33 p.
9. Чижонков Е.В. *О сходимости алгоритма Эрроу–Гурвица для алгебраической системы типа Стокса* // Докл. РАН. – 1998. – Т. 361. – № 5. – С. 600–602.
10. Самарский А.А., Николаев Е.С. *Методы решения сеточных уравнений.* – М.: Наука, 1978. – 592 с.
11. Лебедев В.И., Финогенов С.А. *О порядке выбора итерационных параметров в чебышевских циклических итерационных методах* // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. – 1971. – Т. 11. – № 2. – С. 425–438.
12. Лебедев В.И. *Об итерационных методах решения операторных уравнений со спектром, лежащим на нескольких отрезках* // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. – 1969. – Т. 9. – № 6. – С. 1247–1254.
13. Wathen A., Fischer B., Silvester D. *The convergence of iterative solution methods for symmetric and indefinite linear systems.* In: Griffits D., Higman D., Watson G. (eds.). – Num. Anal., 1997, Pitman Res. Notes Math. Ser. 380, Addison Wesley Longman, 1998. – P. 230–243.

Московский государственный университет

Поступила 19.06.2001