ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1999 МАТЕМАТИКА № 5 (444)

УДК 519.612.2

Е.В. ЧИЖОНКОВ

ОБ АЛГОРИТМЕ ЭРРОУ–ГУРВИЦА С ПЕРЕМЕННЫМИ ИТЕРАЦИОННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

Введение. Рассмотрим вещественную систему линейных алгебраических уравнений $L_\varepsilon z = F$ с параметром $\varepsilon \geq 0$ следующего вида:

$$L_\varepsilon z = \begin{pmatrix} A & B \\ B^T & -\varepsilon C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} = F, \tag{1}$$

где $A = A^T > 0$, $C = C^T > 0$ — квадратные матрицы размеров $N_u \times N_u$ и $N_p \times N_p$, а B — прямоугольная, в общем случае, матрица размера $N_u \times N_p$. Далее будем предполагать невырожденность матрицы L_ε при любом $\varepsilon \geq 0$. Задачи такого типа возникают при численном решении систем линейных уравнений в теории упругости и гидродинамике (задача Стокса), а также при использовании смешанных аппроксимаций для эллиптических уравнений второго порядка (см., напр., [1], [2] и цитированную там литературу).

С точки зрения приложений одним из наиболее важных частных случаев задачи (1) является алгебраическая система типа Стокса — $L_0 z = F$ (случай $\varepsilon = 0$), а самым популярным подходом к ее решению — построение алгоритмов типа Удзавы [3], [4], среди которых наиболее эффективны методы, использующие переменные итерационные параметры. Краткое изложение этой идеи состоит в следующем. Сначала система $L_0 z = F$ переписывается в равносильном виде

$$\begin{gathered} A_0 p = G; \\ u = A^{-1}(f - B\,p), \end{gathered} \tag{2}$$

где $A_0 = B^T A^{-1} B$, $G = B^T A^{-1} f - g$. При этом условие $\det(L_0) \neq 0$ в силу очевидной факторизации (I — единичная матрица)

$$L_0 = \begin{pmatrix} A & 0 \\ B^T & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^{-1} & 0 \\ 0 & -B^T A^{-1} B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & I \end{pmatrix}$$

гарантирует положительную определенность матрицы A_0. Далее вводится спектрально-эквивалентный A_0 оператор C (не обязательно совпадающий с одноименным из (1)) такой, что

$$C = C^T > 0, \quad \sigma(C^{-1} A_0) \in [\gamma, \Gamma], \quad \gamma > 0.$$

Теперь для решения первого уравнения (2) можно использовать трехслойные методы следующего вида:

$$\begin{gathered} Cp^{k+1} = \widetilde{\alpha}_{k+1}(C - \widetilde{\tau}_{k+1} A_0) p^k + (1 - \widetilde{\alpha}_{k+1}) C p^{k-1} + \widetilde{\alpha}_{k+1} \widetilde{\tau}_{k+1} G, \\ Cp^1 = (C - \widetilde{\tau}_1 A_0) p^0 + \widetilde{\tau}_1 G, \end{gathered} \tag{3}$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 96-01-01394).

гарантирующие с произвольного начального приближения p^0 наилучшую для любого $k = 1, 2, \ldots$ оценку погрешности ([5], с. 318)

$$\|p^k - p\|_{D_p} \le \epsilon_k \, \|p^0 - p\|_{D_p}, \quad \epsilon_k = \frac{2q_0^k}{1 + q_0^{2k}}, \tag{4}$$

с $q_0 = (1 - \sqrt{\xi})/(1 + \sqrt{\xi})$, $\xi = \gamma/\Gamma$, в метрике, порождаемой оператором $D_p = D_p^T > 0$ таким, что $D_p C^{-1} A_0 = (D_p C^{-1} A_0)^T$. Принципиально различными с точки зрения задания априорной информации алгоритмами такого рода являются

полуитерационный метод Чебышева

$$\widetilde{\tau}_k = \frac{2}{\gamma + \Gamma}, \quad \widetilde{\alpha}_{k+1} = \frac{4}{4 - q_1^2 \widetilde{\alpha}_k}, \quad k = 1, 2, \ldots, \tag{5}$$

где $\widetilde{\alpha}_1 = 2$, $q_1 = (1 - \xi)/(1 + \xi)$,

и методы сопряженных направлений

$$\begin{gathered} \widetilde{\tau}_{k+1} = \tfrac{(r^k, D_p w^k)}{(w^k, D_p w^k)}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, \\ \widetilde{\alpha}_{k+1} = \left(1 - \tfrac{\widetilde{\tau}_{k+1}}{\widetilde{\tau}_k} \tfrac{(r^k, D_p w^k)}{(r^{k-1}, D_p w^{k-1})} \tfrac{1}{\widetilde{\alpha}_k}\right)^{-1}, \quad k = 1, 2, \ldots, \end{gathered} \tag{6}$$

где $\widetilde{\alpha}_1 = 1$, $w^k = C^{-1} x^k$, $A_0 r^k = x^k$, $x^k = A_0 p^k - G$. При этом в первом случае выбор метрики достаточно произволен (напр., $D_p = C$ или $D_p = A_0$), а во втором — наиболее употребительным является оператор $D_p = A_0$ (метод сопряженных градиентов), с деталями использования которого можно ознакомиться в ([5], с. 354; [6]).

Отметим также приводящий к оценке (4) метод Ричардсона

$$C p^{n+1} = (C - \widetilde{\tau}_{n+1} A_0) p^n + \widetilde{\tau}_{n+1} G, \quad n = 0, 1, \ldots, k - 1, \tag{7}$$

с чебышевским набором параметров

$$\begin{gathered} \widetilde{\tau}_n = \frac{2}{(\gamma + \Gamma)(1 + q_1 \mu_n)}, \quad n = 1, 2, \ldots, k, \\ \mu_n \in \aleph_k = \left\{ -\cos \frac{2i - 1}{2k} \pi, \ \ i = 1, 2, \ldots, k \right\}. \end{gathered} \tag{8}$$

Однако необходимость построения множества $\aleph_k$ для заранее определенного количества итераций k, и кроме того, требование упорядоченности его элементов для вычислительной устойчивости делают его менее привлекательным с практической точки зрения по сравнению с приведенными выше трехслойными методами.

Наконец, после того, как с помощью методов (3) или (7) достигнута требуемая точность ϵ_k в оценке (4), определяется u^{k+1} из соотношения

$$A\, u^{k+1} + B\, p^k = f,$$

что приводит к оценке погрешности

$$\|u^{k+1} - u\|_{D_u} \le \|R\| \, \|p^k - p\|_{D_p}, \tag{9}$$

где $R = D_u^{1/2} A^{-1} B\, D_p^{-1/2}$, $D_u = D_u^T > 0$. При выборе $D_u = A$, $D_p = A_0$ справедлива оценка $\|R\| \le 1$, а при $D_u = A$, $D_p = C$ — соответственно $\|R\| \le \Gamma/\gamma$.

Таким образом, алгоритмы типа Удзавы осуществляют эффективное нахождение решения вспомогательной подсистемы $A_0 p = G$ с последующим определением недостающей компоненты решения u.

В данной работе рассматривается алгоритм Эрроу–Гурвица [3] (искусственной сжимаемости) с переменными итерационными параметрами τ_{k+1}, ν_{k+1} для решения алгебраической системы типа Стокса $L_0 z = F$

$$\begin{aligned} A\,\tfrac{u^{k+1}-u^k}{\tau_{k+1}} + Au^k + Bp^k = f, \\ -C\,\tfrac{p^{k+1}-p^k}{\nu_{k+1}} + B^T u^{k+1} = g. \end{aligned} \tag{10}$$

Основным результатом является конструктивный выбор параметров, при которых достигаются оценки (4), (9). Этот факт не является тривиальным, поскольку оператор перехода в методе (10) в общем случае несимметризуем. Отметим также, что ранее изучались вопросы сходимости и оптимизации метода только при постоянных значениях параметров [7]–[10].

1. *Преобразование алгоритма.* Обозначим погрешность метода на k-й итерации через

$$(v^k, r^k) = (u^k - u, p^k - p),$$

где (u, p) — точное решение задачи (1) при $\varepsilon = 0$, тогда из соотношений (10) имеем для $k = 0, 1, \ldots$

$$\begin{aligned} v^{k+1} = (1-\tau_{k+1})v^k - \tau_{k+1}A^{-1}B\,r^k, \\ r^{k+1} = (I - \tau_{k+1}\nu_{k+1}C^{-1}A_0)r^k + \nu_{k+1}(1-\tau_{k+1})C^{-1}B^T v^k. \end{aligned} \tag{11}$$

После исключения компоненты погрешности v из соотношений (11) имеем для $k = 1, 2, \ldots$

$$r^{k+1} = \mu_{k+1}(I - \rho_{k+1}C^{-1}A_0)r^k + (1-\mu_{k+1})r^{k-1}, \tag{12}$$

где

$$\mu_{k+1} = 1 + \frac{\nu_{k+1}}{\nu_k}(1-\tau_{k+1}), \quad \rho_{k+1} = \mu_{k+1}^{-1}\tau_{k+1}\nu_{k+1}. \tag{13}$$

Аналогично, после исключения компоненты погрешности r из соотношений (11) имеем для $k = 1, 2, \ldots$

$$v^{k+1} = \widetilde{\mu}_{k+1}(I - \widetilde{\rho}_{k+1}A^{-1}B_0)v^k + (1-\widetilde{\mu}_{k+1})v^{k-1}, \tag{14}$$

где $B_0 = BC^{-1}B^T$, а параметры имеют вид

$$\widetilde{\mu}_{k+1} = 1 + \frac{\tau_{k+1}}{\tau_k}(1-\tau_k), \quad \widetilde{\rho}_{k+1} = \widetilde{\mu}_{k+1}^{-1}\tau_{k+1}\nu_k. \tag{15}$$

Таким образом, для погрешности метода (10) совместная двухслойная формула (11) сводится к двум независимым трехслойным формулам (12) и (14), что при соответствующем выборе параметров и начального приближения может привести к получению искомых оценок.

Здесь же отметим исключительный случай $\tau_k = 1$, $k = 1, 2, \ldots$, упрощающий формулы (12) и (14) до двухслойных, т.к. $\mu_k = \widetilde{\mu}_k = 1$. Здесь выбор $\nu_n = \widetilde{\tau}_n$, $n = 1, 2, \ldots, k$, из (8) приводит к тождественному совпадению метода (10) с методом Ричардсона (7), что в свою очередь гарантирует выполнение оценок (4), (9).

2. *Вспомогательные результаты.* В этом разделе отмечаются полезные свойства формул итерационных параметров (5), (6), (13).

Лемма 1. *Итерационные параметры $\widetilde{\tau}_k$, $\widetilde{\alpha}_k$ в полуитерационном методе Чебышева* (3), (5) *удовлетворяют неравенствам для $k = 1, 2, \ldots$*

$$\widetilde{\tau}_k > 0, \quad 2 \geq \widetilde{\alpha}_k > 1,$$

причем только $\widetilde{\alpha}_1 = 2$.

Доказательство. Первое неравенство вытекает из явного представления $\widetilde{\tau}_k = 2/(\gamma + \Gamma)$, $k = 1, 2, \ldots$, и свойств спектра $\sigma(C^{-1}A_0) \in [\gamma, \Gamma]$, $\gamma > 0$, а второе следует из представления ([5], гл. 7, § 3, с. 322)

$$\widetilde{\alpha}_{k+1} = \frac{2q_0(1+q_0^{2k})}{q_1(1+q_0^{2k+2})}, \quad k = 1, 2, \ldots, \quad \text{и} \quad \widetilde{\alpha}_1 = 2.$$

Действительно, т.к.

$$q_0 = \frac{1-\sqrt{\xi}}{1+\sqrt{\xi}}, \ \ \xi = \frac{\gamma}{\Gamma} < 1, \quad \text{и} \quad q_1 = \frac{1-\xi}{1+\xi} = \frac{2q_0}{1+q_0^2},$$

то

$$2 > \widetilde{\alpha}_{k+1} = 1 + \frac{q_0^2 + q_0^{2k}}{1+q_0^{2k+2}} > 1.$$

Напомним, что $\widetilde{\alpha}_1 = 2$. □

Лемма 2. *Итерационные параметры $\widetilde{\tau}_k, \widetilde{\alpha}_k$ в методе сопряженных направлений* (3), (6) *удовлетворяют неравенствам для $k = 1, 2, \ldots$*

$$\widetilde{\tau}_k > 0, \quad \widetilde{\alpha}_k \geq 1,$$

причем только $\widetilde{\alpha}_1 = 1$.

Доказательство. Справедливость первого неравенства следует из преобразования первой формулы (6). Поскольку $w^k = C^{-1}x^k = C^{-1}A_0r^k$, имеем

$$\widetilde{\tau}_{k+1} = \frac{(r^k, D_pw^k)}{(w^k, D_pw^k)} = \frac{(r^k, D_pC^{-1}A_0r^k)}{(w^k, D_pw^k)}.$$

Далее, в силу $D_p = D_p^T > 0$ и $D_pC^{-1}A_0 = (D_pC^{-1}A_0)^T > 0$ получаем $\widetilde{\tau}_k > 0$ для всех $k = 1, 2, \ldots$

Для доказательства неравенства $\widetilde{\alpha}_{k+1} > 1$ при $k = 1, 2, \ldots$ перепишем вторую формулу (6) в виде

$$\widetilde{\alpha}_{k+1} = 1 + \frac{\widetilde{\alpha}_{k+1}\widetilde{\tau}_{k+1}}{\widetilde{\alpha}_k\widetilde{\tau}_k}\frac{(r^k, D_pC^{-1}A_0r^k)}{(r^{k-1}, D_pC^{-1}A_0r^{k-1})}.$$

Теперь искомое неравенство легко доказывается по индукции, т.к. все сомножители во втором слагаемом положительны. Напоминание о том, что $\widetilde{\alpha}_1 = 1$, завершает доказательство леммы. □

Лемма 3. *Пусть для итерационных параметров μ_k, ρ_k, определяемых формулами* (13) *для соотношения* (12), *справедливы неравенства при $k = 1, 2, \ldots$*

$$\mu_{k+1} > 1, \quad \rho_{k+1} > 0.$$

Тогда обратное преобразование к параметрам τ_k, ν_k исходного алгоритма (10) *однозначно определяется формулами*

$$\begin{gathered} \nu_{k+1} = \nu_k(\mu_{k+1} - 1) + \mu_{k+1}\rho_{k+1} > 0, \\ 1 > \tau_{k+1} = \mu_{k+1}\rho_{k+1}/\nu_{k+1} > 0 \end{gathered} \tag{16}$$

для $k = 1, 2, \ldots$, если $\nu_1 > 0$.

Доказательство. Вторая формула в (13) дает

$$\tau_{k+1}\nu_{k+1} = \mu_{k+1}\rho_{k+1}.$$

Теперь для некоторого $\nu_k > 0$ (напомним, что по предположению $\nu_1 > 0$) из первой формулы в (13) имеем

$$\nu_{k+1} = \nu_k(\mu_{k+1} - 1) + \mu_{k+1}\rho_{k+1}.$$

Отсюда в силу условия леммы получаем $\nu_{k+1} > 0$, и соответственно $\tau_{k+1} = \mu_{k+1}\rho_{k+1}/\nu_{k+1} > 0$. Подстановка в полученную формулу явного вида для ν_{k+1} приводит к неравенству $\tau_{k+1} < 1$. □

3. *Выбор параметров для p.* Для произвольного начального приближения (u^0, p^0) выберем итерационные параметры τ_k, ν_k в методе (10) следующим образом:

$$\begin{gathered}\tau_1 = 1, \quad \nu_1 = \widetilde{\tau}_1, \quad \nu_{k+1} = \nu_k(\widetilde{\alpha}_{k+1} - 1) + \widetilde{\alpha}_{k+1}\widetilde{\tau}_{k+1}, \\ \tau_{k+1} = \widetilde{\alpha}_{k+1}\widetilde{\tau}_{k+1}/\nu_{k+1}, \quad k = 1, 2, \dots,\end{gathered} \tag{17}$$

где $\widetilde{\tau}_k$, $\widetilde{\alpha}_k$ определяются формулами (5) или (6).

Теорема 1. *Для произвольного* $k = 1, 2, \dots$ *приближения* p^k*, получаемые по формулам* (10) *с параметрами* (17)*, удовлетворяют оценке погрешности* (4).

Доказательство. В силу справедливости лемм 1, 2 параметры полуитерационного метода Чебышева (3), (5) и метода сопряженных направлений (3), (6) удовлетворяют неравенствам

$$\widetilde{\tau}_k > 0, \quad \widetilde{\alpha}_k > 1, \quad k = 2, 3, \dots,$$

и, следовательно, допускают обратное преобразование (16). Поэтому выбор параметров по формулам (17) в методе (10) в силу леммы 3 порождает для погрешности $r^k = p^k - p$ соотношение (12) с $\mu_{k+1} = \widetilde{\alpha}_{k+1}$, $\rho_{k+1} = \widetilde{\tau}_{k+1}$ для $k = 1, 2, \dots$ и $r^1 = (I - \nu_1 C^{-1} A_0) r^0$, что и приводит к искомой оценке погрешности [5]. □

Следует отметить, что если дополнительно имеется ограничение $\widetilde{\alpha}_{k+1} < 2$ (как в полуитерационном методе Чебышева), то формулы (17) устойчивы к ошибкам округлений.

Далее, при необходимости определить u^{k+1}, удовлетворяющее оценке (9), достаточно взять $\tau_{k+1} = 1$ и после этого завершить вычисления. Таким образом, формулы (10), (17) иллюстрируют обобщение алгоритмов типа Удзавы в случае использования переменных итерационных параметров.

4. *Особенность выбора* $\tau_1 = 1$. Проанализируем следствие первого шага при $\tau_1 = 1$ с произвольного начального приближения (u^0, p^0) для использования формулы (12). Из (11) имеем

$$v^1 = -A^{-1} B\, r^0, \quad v^2 = (I - \tau_2 \nu_1 A^{-1} B_0) v^1. \tag{18}$$

Отсюда следует, что начальное приближение u^0 фактически не участвует в вычислениях и, следовательно, v^0 — в оценках погрешности. Другими словами, можно считать, что в методе (10) величина u^1 выбирается специальным образом

$$A\, u^1 + B\, p^0 = f. \tag{19}$$

Далее нам потребуется информация о спектре матрицы $A^{-1}B_0$ (напомним, что $B_0 = BC^{-1}B^T$).

Лемма 4. *Ненулевые собственные значения матрицы* $A^{-1}B_0$ *положительны и с учетом кратностей совпадают с собственными значениями матрицы* $C^{-1}A_0$*. При этом имеется ровно* $N_u - N_p \geq 0$ *нулевых собственных значений.*

Доказательство. Заметим, что имеет место ограничение на размерности подсистем: $N_u - N_p \geq 0$ (в противном случае $\ker(B)$ не пусто, т.е. матрица исходной системы L_ε вырождена).

Теперь, если ввести обозначения $R = C^{-1}B^T$, $S = A^{-1}B$, то матрицы $C^{-1}A_0$ и $A^{-1}B_0$ представимы в виде RS и SR соответственно. В терминах характеристического многочлена $\Phi_T(\lambda) = \det(\lambda I - T)$ квадратной матрицы T это приводит к равенству

$$\Phi_{A^{-1}B_0}(\lambda) = \lambda^{N_u - N_p}\Phi_{C^{-1}A_0}(\lambda)$$

на основании теоремы 1.3.20 из [12]. Поскольку $\sigma(C^{-1}A_0) \in [\gamma, \Gamma]$, $\gamma > 0$, то отсюда сразу следует искомое утверждение. □

Обозначим через U и P евклидовы пространства векторов размерностей N_u и N_p соответственно. Поскольку в общем случае $N_u \geq N_p$, то удобно обозначить $\ker(A^{-1}B_0)$ (множество векторов размерности $\dim(H) = N_u - N_p$) через H. Ясно, что

$$H = \{u \in U : B^T u = 0\}.$$

Далее будем использовать разложение пространства U в прямую сумму $U = H \oplus G$, где G — ортогональное дополнение к H. Покажем, что метод (10) при выборе начального приближения вида (19) эквивалентен итерированию ошибки v^k в подпространстве G.

Лемма 5. *Для любой итерации k первая компонента v^k погрешности итерационного метода* (10)*, стартующего с начального приближения вида* (19)*, является элементом подпространства G (т.е. $(Av^k, h) = 0\ \forall h \in H$).*

Доказательство. Из соотношения (19) следует, что начальная погрешность (v^1, r^0) удовлетворяет равенству

$$A\,v^1 + B\,r^0 = 0$$

и, следовательно, v^1 является элементом G. Действительно, для произвольного элемента $h \in H$ справедливо $B^T h = 0$, поэтому

$$(Av^1, h) = -(Br^0, h) = -(r^0, B^T h) = 0.$$

Далее покажем, что если $v^k \in G$, то и $v^{k+1} \in G$. Компонента v^k удовлетворяет соотношению

$$v^{k+1} = (1 - \tau_{k+1})v^k - \tau_{k+1}A^{-1}Br^k,$$

поэтому имеем

$$(Av^{k+1}, h) = \big((1 - \tau_{k+1})Av^k - \tau_{k+1}Br^k, h\big) = (1 - \tau_{k+1})(Av^k, h) \ \ \forall h \in H.$$

Таким образом, индуктивный переход и начальное условие гарантируют, что для любой итерации k вектор $v^k \in G$. $\square$

Отсюда на основании лемм 4, 5 можно сделать вывод, что метод (10) для решения задачи (1), стартующий с начального приближения (19), эквивалентен, с точки зрения соотношений для погрешности, методу (18), (14) решения уравнения $A^{-1}B_0\,u = A^{-1}B\,C^{-1}g,\ u \in G$. При этом оператор $A^{-1}B_0$ симметризуем и $\gamma(y, y) \leq (A^{-1}B_0 y, y) \leq \Gamma(y, y)\ \forall y \in G,\ \gamma > 0$. Если ввести оператор $D_u = D_u^T > 0$ такой, что $D_u A^{-1}B_0 = (D_u A^{-1}B_0)^T$, то аналогично (6) можно определить формулы методов сопряженных направлений

$$\begin{aligned} \widetilde{\tau}_{k+1} &= \frac{(v^k, D_u w^k)}{(w^k, D_u w^k)}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, \\ \widetilde{\alpha}_{k+1} &= \left(1 - \frac{\widetilde{\tau}_{k+1}}{\widetilde{\tau}_k}\frac{(v^k, D_u w^k)}{(v^{k-1}, D_u w^{k-1})}\frac{1}{\widetilde{\alpha}_k}\right)^{-1}, \quad k = 1, 2, \ldots, \end{aligned} \tag{20}$$

где $\widetilde{\alpha}_1 = 1$, $w^k = C^{-1}x^k$, $B_0 v^k = x^k (v^k \in G)$, $x^k = B_0 u^k - BC^{-1}g$.

Далее определим последовательность итерационных параметров τ_k, α_k, приводящую к оценке погрешности для любого k

$$\|u^{k+1} - u\|_{D_u} \leq \epsilon_k\, \|u^1 - u\|_{D_u}, \tag{21}$$

где ϵ_k определены в (4).

5. *Выбор параметров для u.* Используя свойства полушага с $\tau_1 = 1$, для произвольного p^0 определим u^1. Это дает возможность определить $\widetilde{\tau}_2$ по формулам (5) или (20). В соответствии с (18) получаем $\nu_1\tau_2 = \widetilde{\tau}_2$, что порождает некоторый произвол в выборе ν_1 (необходимо, чтобы $\tau_2 \neq 1$). Зафиксировав каким-либо образом ν_1, сразу же по формулам (10) имеем возможность вычислить p^1 и u^2. Это в свою очередь порождает значения $\widetilde{\alpha}_{k+1}$, $\widetilde{\tau}_{k+1}$ при $k=2$ по формулам (5) или (20). Теперь, используя обратное преобразование формул (15), получим

$$\tau_{k+1}=\frac{(\widetilde{\mu}_{k+1}-1)\tau_k}{1-\tau_k},\quad \nu_k=\frac{\widetilde{\mu}_{k+1}\widetilde{\rho}_{k+1}}{\tau_{k+1}}, \tag{22}$$

где $\widetilde{\mu}_{k+1}=\widetilde{\alpha}_{k+1}$, $\widetilde{\rho}_{k+1}=\widetilde{\tau}_{k+1}$ из (5) или (20). Это приводит к получению p^k и u^{k+1} для $k=2$, и далее этот процесс может быть продолжен сколь угодно долго.

Из формул (22) следует, что их применимость определяется условием $0<\tau_k<1$, $k=2,3,\dots$, что в свою очередь зависит от выбора ν_1.

Лемма 6. *Для произвольного $k=2,3,\dots,k_0$ существует $0<\tau_2=\tau_2(k_0)<1$ такое, что если $1<\widetilde{\mu}_{k+1}<2$, то все τ_{k+1} из (22) удовлетворяют неравенству $0<\tau_{k+1}<1$.*

Доказательство. Введем обозначения $y_k=\tau_k^{-1}$ и $\delta_{k+1}=(\widetilde{\mu}^{k+1}-1)^{-1}$. Обратим внимание, что все $\delta_{k+1}>1$, и перепишем первую формулу (22) в виде

$$y_{k+1}=\delta_{k+1}(y_k-1),\quad k=2,3,\dots,k_0.$$

Это дает

$$y_{k_0+1}=\Big(\prod_{j=3}^{k_0+1}\delta_j\Big)y_2-\sum_{j=3}^{k_0+1}\prod_{s=j}^{k_0+1}\delta_s=\Big(\prod_{j=3}^{k_0+1}\delta_j\Big)\Big(y_2-1-\sum_{j=3}^{k_0}\prod_{s=j}^{k_0}\delta_s^{-1}\Big).$$

Пусть

$$y_2\geq 2+\sum_{j=3}^{k_0}\prod_{s=j}^{k_0}\delta_s^{-1},$$

тогда для любого $k=2,3,\dots,k_0$ справедливо

$$y_{k+1}\geq\prod_{j=3}^{k+1}\delta_j>1,$$

или $0<\tau_{k+1}<1$. Добиться же выполнения искомого неравенства для y_2 несложно, взяв, например, $\tau_2=\tau_2(k_0)=y_2^{-1}=k_0^{-1}$. □

С помощью полученных результатов покажем, что справедлива

Теорема 2. *Для произвольного $k=1,2,\dots$ существует набор итерационных параметров $\tau_1=1$, $\tau_2\nu_1=\widetilde{\tau}_2$, далее по формулам (22) с $\widetilde{\mu}_{k+1}=\widetilde{\alpha}_{k+1}$ $(1<\widetilde{\mu}_{k+1}<2)$, $\widetilde{\rho}_{k+1}=\widetilde{\tau}_{k+1}$ из (5) или (20), такой, что метод (10) генерирует приближения u^k, удовлетворяющие оценке погрешности (21).*

Доказательство. Зафиксируем некоторое k_0 и положим $\nu_1=\widetilde{\tau}_2k_0$. Тогда в силу леммы 6 формулы (22) корректны и порождают набор параметров τ_{k+1}, ν_k при $k=2,3,\dots,k_0$ для (10). В свою очередь это приводит к соотношению (14) для ошибки $v^k=u^k-u$ с параметрами (15), гарантирующему для любого $k=1,2,\dots,k_0$ оценку (21). □

Прокомментируем полученные результаты. Ранее для решения задачи $L_0z=F$ были известны алгоритмы (типа Удзавы), приводящие для погрешности $r^k=p^k-p$ к наилучшей при заданной информации оценке (4). Выше было показано (см. теорему 1), что все они могут быть представлены в форме алгоритма Эрроу–Гурвица (10) при соответствующем выборе итерационных параметров. Кроме того, если известны границы спектра $0<\gamma,\Gamma$ матрицы $C^{-1}A_0$, то можно также, пользуясь только формулами (10), добиться аналогичной оценки (21) для погрешности $v^k=u^k-u$ за счет специального выбора параметров (22). В дальнейшем представляется интересным проанализировать вычислительную корректность этого подхода, если параметры вычисляются из вариационных принципов.

Литература

1. Дьяконов Е.Г. *Минимизация вычислительной работы. Асимптотически оптимальные алгоритмы для эллиптических задач.* – М.: Наука, 1989. – 272 с.
2. Brezzi F., Fortin M. *Mixed and Hybrid Finite Element Methods.* – New York: Springer-Verlag, 1991. – 350 p.
3. Arrow K., Hurwicz L., Uzawa H. *Studies in Nonlinear Programming.* – Stanford, CA: Stanford University Press, 1958. – 334 p.
4. Langer U., Queck W. *On the convergence factor of Uzawa's algorithm* // J. Comp. and Appl. Math. – 1986. – V. 15. – P. 191–202.
5. Самарский А.А., Николаев Е.С. *Методы решения сеточных уравнений.* – М.: Наука, 1978. – 592 с.
6. Heusser C. *Conjugate gradient-type algorithms for a finite-element discretization of the Stokes equations* // J. Comp. and Appl. Math. – 1992. – V. 39. – P. 23–37.
7. Temam R. *Navier–Stokes Equations. Theory and Numerical Analysis.* – Amsterdam: North Holland, 1979. – 408 p.
8. Girault V., Raviart P.A. *Finite element methods for Navier–Stokes equations. Theory and algorithms.* – Berlin: Springer, 1986. – 374 p.
9. Queck W. *The convergence factor of preconditioned algorithms of the Arrow–Hurwicz type* // SIAM J. Numer. Anal. – 1989. – V. 26. – № 4. – P. 1016–1030.
10. Чижонков Е.В. *К сходимости метода искусственной сжимаемости* // Вестн. Моск. ун-та. Сер. матем., механ. – 1996. – № 2. – С. 13–20.
11. Bramble J.H., Pasciak J.E., Vassilev A.T. *Analysis of the inexact Uzawa algorithm for saddle point problems* // SIAM J. Numer. Anal. – 1997. – V. 33. – № 4. – P. 1072–1092.
12. Хорн Р., Джонсон Ч. *Матричный анализ.* – М.: Мир, 1989. – 655 с.

Московский государственный университет

Поступила 21.07.1998