И З В Е С Т И Я   В Ы С Ш И Х   У Ч Е Б Н Ы Х   З А В Е Д Е Н И Й

2000 МАТЕМАТИКА № 9 (460)

УДК 519.3

С.Ф. МОРОЗОВ, А.В. СЕМЕНОВ

ОБОБЩЕННЫЕ КРИВЫЕ И НЕОБХОДИМЫЕ УСЛОВИЯ РАЗРЫВНОГО РЕШЕНИЯ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ВАРИАЦИОННОЙ ЗАДАЧИ

В статье рассматривается вариационная задача минимизации функционала

$$I[Y] = \int_a^b F(x, Y, Y')dx \tag{1}$$

при условии

$$\lim_{\|Z\|\to\infty} F(x, Y, Z)/\|Z\| = w(x, Y, \cos\gamma), \tag{2}$$

где w — непрерывная по совокупности своих аргументов функция ([1]–[9]).

Для установления теорем существования поставленной вариационной задачи в [5], [6] был введен специальный класс обобщенных спрямляемых кривых (ОСК), который является модификацией пространства Юнга–Макшейна ([10], [11]) и отличается от расширений Кротова разрывной вариационной задачи (1), (2), построенных на основе понятий (y, z)-линий и (y, z)-объектов ([7]–[9]).

Данная работа посвящена установлению условий экстремума задачи минимизации (1) в предположении выполнения условия (2) посредством исследования сопряженной параметрической вариационной задачи в классе ОСК. Полученные необходимые условия обобщают классические уравнения Дю Буа–Раймонда и Эйлера, угловые условия Вейерштрасса–Эрдмана и условия разрыва Размадзе.

1. Основные определения

1. *Допустимые кривые* C (*класс* П). Параметрическим представлением абсолютно непрерывной пространственной кривой C будем называть абсолютно непрерывное отображение $f(t) = (x(t), Y(t)) = (x(t), y_1(t), \dots, y_p(t))$ отрезка $[t_1, t_2] \subset R^1$ в R^{1+p}. Параметрические представления $f_1(t')$, $t' \in [t'_1, t'_2]$; $f_2(t'')$, $t \in [t''_1, t''_2]$ будем считать эквивалентными, если существуют такие абсолютно непрерывные возрастающие функции $t' = \varphi'(t)$, $t'' = \varphi''(t)$, $t \in [t_1, t_2]$, что $\varphi'(t_i) = t'_i$, $\varphi''(t_i) = t''_i$ $(i = 1, 2)$, $f_1[\varphi'(t)] = f_2[\varphi''(t)]$, $t \in [t_1, t_2]$. Кривой $C : \{f(t),\ t \in [t_1, t_2]\}$ назовем совокупность всех параметрических представлений, эквивалентных $f(t)$, $t \in [t_1, t_2]$. Легко видеть, что любую кривую всегда можно предполагать параметрически заданной на отрезке $[0, 1]$ ([12], с. 136–137). Носитель кривой $C : \{f(t),\ t \in [t_1, t_2]\}$ есть по определению множество значений функции $f(t)$, $t \in [t_1, t_2]$, и он, очевидно, не зависит от вида параметризации кривой.

Наделим множество всех абсолютно непрерывных кривых структурой метрического пространства, полагая $\rho(C_1, C_2) = \inf \max\limits_{[0,1]} \|f_1(t) - f_2(t)\|$, где точная нижняя грань берется по всевозможным парам параметрических представлений кривых C_1, C_2, определенных на $[0, 1]$ ([12], с. 136).

Пусть $\Omega = \{(x, Y) : x \in [a, b],\ |y_k| \le y_k^0,\ k = 1, \dots, p\}$ $(a < b,\ y_k^0 > 0)$ и $A = (a, A_1)$, $B = (b, B_1) \in \Omega$.

Абсолютно непрерывная кривая $C : \{f(t),\ t \in [0, 1]\}$ принадлежит классу допустимых кривых П, если

1) $(x(t), Y(t)) \in \Omega$, $t \in [0, 1]$;

2) $f(0)=A,\ f(1)=B$;

3) существует такая последовательность ломаных $\pi_n : \{f_n(x)=(x,Y_n(x)),\ x\in[a,b]\}$, что $\lim\limits_{n\to\infty}\rho(C,\pi_n)=0$.

В силу данного определения класс П является замкнутым множеством. Легко видеть, что для каждой кривой C класса П может существовать не более чем счетное число дуг χ_l, чьи носители целиком лежат в гиперплоскостях $x=x_l$ ([2], с. 48).

2. *Допустимый класс функций* (*класс НП*). Пусть $C\in\Pi$ и $\{C_k\}$ — проекция носителя кривой C на плоскость (x,y_k). Каждой точке $x\in[a,b]$ поставим в соответствие совокупность всех точек $P_k\in\{C_k\}$, имеющих x своей проекцией на ось $0x$. Тем самым получаем функцию $y_k(x)$, $x\in[a,b]$, вообще говоря, не однозначную. Очевидно, $y_k(x)$ $(k=1,\dots,p)$ не зависят от параметрического представления кривой C.

Совокупность всех вектор-функций $Y(x)=(y_1(x),\dots,y_p(x))$, $x\in[a,b]$, соответствующих всевозможным кривым $C\in\Pi$ по вышеуказанному правилу, назовем классом НП допустимых функций.

Вектор-функция $Y(x)\in$ НП может иметь в $[a,b]$ не более чем счетное число точек разрыва $x=x_l$ $(l=1,2,\dots)$ и является абсолютно непрерывной на каждом интервале однозначности (x_m,x_{m+1}) $(m=1,2,\dots)$.

3. *Классы* OK *и* OCK. Пусть подмножество $R_+^{1+p}\equiv\{U=(u^0,u^1,\dots,u^p)\in R^{1+p} : u^0\geq 0,\ -\infty<u^k<\infty\ (k=1,\dots,p)\}$ евклидова пространства R^{1+p} наделено относительной топологией. Обозначим через $\mathcal{B}$ борелевскую σ-алгебру пространства R_+^{1+p}.

Пусть $C : \{f(t),\ t\in[t_1,t_2]\}$ — кривая класса П, T — множество значений $t\in[t_1.t_2]$, для которых существуют конечные производные $\dot x$, $\dot y_k(t)$ $(\operatorname{mes}T=t_2-t_1)$.[1] Пусть, далее, для каждого $t\in T$ заданы меры $\mu(t)$, определенные на измеримом пространстве $(R_+^{1+p},\mathcal{B})$, удовлетворяющие условиям

A) для любой $\psi(U)=\psi(u^0,u^1,\dots,u^p)\in C(R_+^{1+p})$ функция

$$\varphi(t)=\int_{R_+^{1+p}}\psi(U)\mu(t)(dU)$$

является измеримой на $[0,1]$;

B) для каждого $t\in T$ $\mu(t)$ — положительная, конечная мера с ограниченным носителем и такая, что

$$\int_{R_+^{1+p}}u^0\mu(t)(dU)=\dot x(t),\quad \int_{R_+^{1+p}}u^k\mu(t)(dU)=\dot y_k(t)\quad (k=1,\dots,p).$$

Пару $\{f(t),\ t\in[t_1,t_2];\ \mu(t),\ t\in T\}$, где $C : \{f(t),\ t\in[t_1,t_2]\}$ — кривая класса П, $\mu(t)$, $t\in T$, — меры, удовлетворяющие условиям A), B), будем называть представлением некоторой обобщенной кривой.

Обозначим через $CH(\Omega\times R_+^{1+p})$ класс функций $\Phi(x,Y,U)$, положительно однородных первой степени относительно U и непрерывных по совокупности переменных $(x,Y)\in\Omega$, $U\in R_+^{1+p}$.

Два представления $\{f_1(t),\ t\in[t_1,t_2];\ \mu_1(t),\ t\in T_1\}$, $\{f_2(\tau),\ \tau\in[\tau_1,\tau_2];\ \mu_2(\tau),\ \tau\in T_2\}$ будем считать эквивалентными, если для каждой функции $\Phi(x,Y,U)$ класса $CH(\Omega\times R_+^{1+p})$ из существования одного из интегралов

$$\int_{t_1}^{t_2}dt\int_{R_+^{1+p}}\Phi(x_1(t),Y_1(t),U)\mu_1(t)(dU),$$

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2}d\tau\int_{R_+^{1+p}}\Phi(x_2(\tau),Y_2(\tau),U)\mu_2(\tau)(dU)$$

следует существование другого и их равенство.

[1] $\operatorname{mes}T$ — мера Лебега множества T.

Обобщенной кривой $C^* : \{f(t),\ t \in [t_1, t_2];\ \mu(t),\ t \in T\}$ класса ОК назовем совокупность всех представлений, эквивалентных $\{f(t),\ t \in [t_1, t_2]; \mu(t),\ t \in T\}$. Кривая $C : \{f(t),\ t \in [t_1, t_2]\}$ класса П называется следом обобщенной кривой $C^* : \{f(t),\ t \in [t_1, t_2];\ \mu(t),\ t \in T\}$. Обобщенная кривая C^* принадлежит классу ОСК, если ее длина $L[C^*] \equiv \int\limits_{t_1}^{t_2} dt \int\limits_{R_+^{1+p}} \|U\| \mu(t)(dU)$ конечна.[1] В ([6], с. 21–22) показано, что для каждой обобщенной кривой $C^* \in$ ОСК существует такое представление $\{f(t),\ t \in [0,1];\ \mu(t),\ t \in T\}$, что $\mu(t)(R_+^{1+p}) = 1$, $t \in T$.

4. *Сопряженный параметрический функционал* $J[C^*]$. Пусть интегрант $F(x, Y, Z)$ функционала $I[Y]$ является непрерывно дифференцируемой функцией в области $(x, Y) \in \Omega$, $-\infty < z_k < \infty$ $(k = 1, \ldots, p)$ и удовлетворяет условию существования предела (2), где функция $w(x, Y, \cos\gamma)$ непрерывна вместе со своими производными w'_x, w'_y, $w'_{\cos\gamma_i}$ $(i = 1, \ldots, p)$ при $(x, y) \in \Omega$, $\|\cos\gamma\| \le 1$.[2]

Сопряженный параметрический интегрант G определяется соотношениями:

$$G(x, Y, \dot{x}, \dot{Y}) = \dot{x} F\left(x, Y, \frac{\dot{Y}}{\dot{x}}\right), \quad \dot{x} > 0; \quad G(x, Y, 0, 0) = 0.$$

Доопределим функцию G для $\dot{x} = 0$ следующим образом: $G(x, Y, 0, \dot{Y}) = \lim\limits_{\dot{x} \to +0} G(x, Y, \dot{x}, \dot{Y}) = \|\dot{Y}\| w(x, Y, \cos\gamma)$. Определенная таким образом функция $G(x, Y, \dot{x}, \dot{Y})$ принадлежит классу $CH(\Omega \times R_+^{1+p})$.

Первые производные параметрического интегранта G имеют вид:

$$G'_x = \dot{x} F'_x\left(x, Y, \frac{\dot{Y}}{\dot{x}}\right), \quad G'_{y_k} = \dot{x} F_{y_k}\left(x, Y, \frac{\dot{Y}}{\dot{x}}\right),$$

$$G'_{\dot{x}} = F\left(x, Y, \frac{\dot{Y}}{\dot{x}}\right) - \frac{\dot{y}_k}{\dot{x}} F_{y'_k}\left(x, Y, \frac{\dot{Y}}{\dot{x}}\right), \quad G'_{\dot{y}_k} = F_{y'_k}\left(x, Y, \frac{\dot{Y}}{\dot{x}}\right)$$

для $\dot{x} > 0$ и

$$G'_x = \|\dot{Y}\| w'_x(x, Y, \cos\gamma), \quad G'_{y_k} = \|\dot{Y}\| w_{y_k}(x, Y, \cos\gamma),$$
$$G'_{\dot{y}_k} = \cos\gamma_k w + w'_{\cos\gamma_k} - \cos\gamma_k \cos\gamma_i w_{\cos\gamma_i}$$

для $\dot{x} = 0$.

На классе ОСК обобщенных спрямляемых кривых C^* определим сопряженный параметрический функционал

$$J[C^*] = \int_0^1 dt \int_{R_+^{1+p}} G(x, Y, U) \mu(t)(dU).$$

При отождествлении кривой $C : \{f(t),\ t \in T\}$ класса П с обобщенной спрямляемой кривой $C^* : \{f(t),\ t \in [0,1];\ \delta_{(\dot{x}(t), \dot{Y}(t))},\ t \in T\}$ имеем[3]

$$J[C^*] = \int_0^1 dt \int_{R_+^{1+p}} G(x(t), Y(t), u^0, u^1, \ldots, u^p) \delta_{(\dot{x}(t), \dot{Y}(t))}(dU) =$$
$$= \int_0^1 G(x(t), Y(t), \dot{x}(t), \dot{Y}(t)) dt = J[C]. \quad (3)$$

[1] $\|U\| = (u^i, u^i)^{1/2}$, где по повторяющемуся индексу i идет суммирование от 0 до p.

[2] $\cos\gamma = (\cos\gamma_1, \ldots, \cos\gamma_p)$, $\cos\gamma_k = \frac{z_k}{\|Z\|}$, $\|Z\| = (z_k z_k)^{1/2}$ (суммирование по k от 1 до p).

[3] δ_M — мера Дирака в точке M.

5. *Функционал* $I[y]$ *на классе функций* НП. На классе существенно разрывных функций НП определим функционал

$$I[y]=\sum_m\int_{x_m}^{x_{m+1}}F(x,Y,Y')dx+\sum_l\int_{\chi_l}w(x_l,Y,\cos\gamma)ds, \tag{4}$$

где x_m, x_l — точки разрыва функции $y(x)\in$ НП. В случае, когда $y(x)$ абсолютно непрерывна в $[a,b]$, функционал (4) принимает свой обычный вид (1). Нетрудно видеть ([1], с. 25; [2]; [3]), что $I[y]=J[C]$, где $C:\{f(t),\ t\in[0,1]\}$ — кривая класса П, соответствующая $y(x)\in H\Pi$, и, следовательно, $I[y]=J[C^*]$, $C^*:\{f(t),\ t\in[0,1];\ \delta_{(\dot x,\dot Y)},\ t\in T\}$.

2. Построение семейства обобщенных спрямляемых кривых сравнения класса ОСК

Пусть $C_0^*:\{f_0(t)=(x_0(t),Y_0(t)),\ t\in[0,1];\ \mu_0(t),\ t\in T\}$ — обобщенная спрямляемая кривая такая, что $\mu_0(t)(R_+^{1+p})=1$, след C_0 лежит целиком внутри Ω и содержит одну дугу $\chi_l:\{x=x_l,\ Y=Y_0(t),\ t\in[t_1,t_2]\}$, носитель которой лежит в гиперплоскости, ортогональной оси $0x$. Пусть $\varphi(t)$, $\Psi(t)=(\psi_1(t),\ldots,\psi_p(t))$ — произвольные абсолютно непрерывные на $[0,1]$ функции, удовлетворяющие условиям $\varphi(0)=\Psi(0)=\varphi(1)=\Psi(1)=0$, $\varphi(t)=\varphi_0$, $t\in[t_1,t_2]$ (φ_0 — const); производные $\dot\varphi(t)$, $\dot\psi_k(t)$ конечны при $t\in T$.

Зафиксируем произвольное $t\in T$. Так как носитель $\operatorname{supp}\mu_0(t)$ — ограниченное множество, то найдется такая постоянная $\alpha(t)>0$, что $\operatorname{supp}\mu_0(t)\subset S_{\alpha(t)}\equiv\{U\in R_+^{1+p}:\|U\|\le\alpha(t)\}$. На классе функций $\Phi(U)\in C(S_{\alpha(t)})$ определим непрерывный функционал $V_t(\Phi)=\int\limits_{S_{\alpha(t)}}\Phi^*(U)\mu_0(t)(dU)$, где $\Phi^*(U)=\Phi(u^0+\varepsilon\dot\varphi(t),u^1+\varepsilon\dot\psi_1(t),\ldots,u^p+\varepsilon\dot\psi_p(t))$. Семейство $\mathcal{B}(S_{\alpha(t)})\equiv\{E'\in\mathcal{B}:E'=E\cap S_{\alpha(t)},\ E\in\mathcal{B}\}$ является борелевской σ-алгеброй подмножеств множества $S_{\alpha(t)}$ ([13], с. 30). По теореме Рисса ([14], с. 228) существует такая конечная положительная регулярная мера $\widetilde\mu_\varepsilon(t)$, определенная на измеримом пространстве $(S_{\alpha(t)},\mathcal{B}(S_{\alpha(t)}))$, что

$$V_t(\Phi)=\int_{S_{\alpha(t)}}\Phi(U)\widetilde\mu_\varepsilon(t)(dU).$$

Тогда функция множеств $\mu_\varepsilon(t)$, определенная на измеримом пространстве $(R_+^{1+p},\mathcal{B})$ равенством $\mu_\varepsilon(t)(E)=\widetilde\mu_\varepsilon(t)(E\cap S_{\alpha(t)})$, $E\in\mathcal{B}$, является положительной конечной регулярной мерой ($\operatorname{supp}\mu_\varepsilon(t)\subset S_{\alpha(t)}$).

Положим $x_\varepsilon(t)=x_0(t)+\varepsilon\varphi(t)$, $Y_\varepsilon(t)=Y_0(t)+\varepsilon\Psi(t)$, $t\in T$. Тогда

$$\int_{R_+^{1+p}}u^0\mu_\varepsilon(t)(dU)=\int_{R_+^{1+p}}(u^0+\varepsilon\dot\varphi(t))\mu_0(t)(dU)=\dot x_0(t)+\varepsilon\dot\varphi(t)=\dot x_\varepsilon(t),\quad t\in T,$$

аналогично,

$$\int_{R_+^{1+p}}u^k\mu_\varepsilon(t)(dU)=\dot y_{\varepsilon k}(t),\quad t\in T.$$

Следовательно, $C_\varepsilon^*:\{f_\varepsilon(t)=(x_\varepsilon(t),\ Y_\varepsilon(t)),\ t\in[0,1];\ \mu_\varepsilon(t),\ t\in T\}$ принадлежит классу OK, кроме того, используя неравенство Минковского, легко убедиться, что C^* является спрямляемой обобщенной кривой. Таким образом, C^* оказывается включенной в семейство обобщенных кривых сравнения $\{C_\varepsilon^*\}$ при $\varepsilon=0$.

3. Необходимые условия экстремума функционала $J[C^*]$ в классе ОСК и их следствия

Определение 1. Обобщенная спрямляемая кривая C_0^* доставляет функционалу $J[C^*]$ абсолютный минимум в классе ОСК, если $J[C_0^*]\le J[C^*]$ для всех $C^*\in$ ОСК.

Определение 2. Обобщенная спрямляемая кривая C_0^* доставляет функционалу $J[C^*]$ сильный относительный минимум, если существует такое $\delta>0$, что $J[C_0^*]\le J[C^*]$ для всех C^*, следы C которых удовлетворяют неравенству $\rho(C_0,C)<\delta$.

Пусть $C_0^* \in$ ОСК доставляет сильный относительный минимум функционалу $J[C^*]$. Предположим, что C_0^* удовлетворяет условиям § 2 и $\{C_\varepsilon^*\}$ — построенное семейство кривых сравнения.

Применяя для вычисления первой вариации $\delta J = \lim\limits_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon}\{J[C_\varepsilon^*] - J[C_0^*]\}$ рассуждения, аналогичные ([4]; [1], с. 26–30), легко получаем для нее следующее выражение[1]:

$$\delta J = \int_0^{t_1} dt \int_{R_+^{1+p}} \{G'_x\varphi + G'_{\dot x}\dot\varphi + G'_{y_k}\psi_k + G'_{\dot y_k}\dot\psi_k\}\mu_0(t)(dU) +$$
$$+ \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{R_+^{1+p}} \{G'_x\varphi_0 + G'_{y_k}\psi_k + G_{\dot y_k}\dot\psi_k\}\mu_0(t)(dU) +$$
$$+ \int_{t_2}^{1} dt \int_{R_+^{1+p}} \{G'_x\varphi + G'_{\dot x}\dot\varphi + G'_{y_k}\psi_k + G_{\dot y_k}\dot\psi_k\}\mu_0(t)(dU),$$

которое равняется нулю в силу экстремального свойства кривой C_0^*.

Принимая во внимание произвольность выбора функций $\varphi(t)$ ($\varphi(t) = \mathrm{const}$, $t \in [t_1, t_2]$), $\psi_k(t)$ ($k = 1, \ldots, p$), получаем следующие необходимые условия экстремума:

$$\int_{R_+^{1+p}} G'_{\dot x}\mu_0(t)(dU) - \int_0^t dt \int_{R_+^{1+p}} G'_x\mu_0(t)(dU) = c_0 \quad \text{для п. в. } t \in (0, t_1) \cup (t_2, 1); \tag{5}$$

$$\int_{R_+^{1+p}} G'_{\dot y_k}\mu_0(t)(dU) - \int_0^t dt \int_{R_+^{1+p}} G'_{y_k}\mu_0(t)(dU) = c_k \quad \text{для п. в. } t \in (0, 1), \quad k = 1, 2, \ldots, p; \tag{6}$$

$$\int_{R_+^{1+p}} G'_{\dot x|_{t=t_1}}\mu_0(t_1)(dU) - \int_{R_+^{1+p}} G'_{\dot x|_{t=t_2}}\mu_0(t_2)(dU) + \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{R_+^{1+p}} G'_x\mu_0(t)(dU) = 0 \tag{7}$$

(c_0, c_k — const). Уравнения (5), (6) представляют собой обобщения необходимых условий Дю Буа–Раймонда.

Если экстремальная кривая C_0^* имеет представление $\{f_0(t),\ t \in [0, 1];\ \delta_{(\dot x_0(t), \dot Y_0(t))},\ t \in T\}$, что, принимая во внимание (3), соответствует случаю минимизации следом C_0 функционала $J[C]$ в классе П, то условия (5)–(7) принимают вид

$$G'_{\dot x} - \int_0^t G'_x dt = c_0 \quad \text{для п. в. } t \in (0, t_1) \cup (t_2, 1); \tag{8}$$

$$G'_{\dot y_k} - \int_0^t G'_{y_k} dt = c_k \quad \text{для п. в. } t \in (0, 1); \tag{9}$$

$$G'_{\dot x|_{t=t_1}} - \int_{t^*}^{t_1} \|\dot Y\| w'_x dt = G'_{\dot x|_{t=t_2}} - \int_{t^*}^{t_2} \|\dot Y\| w'_x dt, \tag{10}$$

c_0, c_k — const; t^* — произвольная точка из (t_1, t_2).

Предположим, далее, что минимизирующая кривая $C_0 \in$ П является кусочно-гладкой. Тогда из уравнений Дю Буа–Раймонда в параметрической форме (8), (9) следует выполнение на участках непрерывной дифференцируемости необходимых условий Эйлера

$$\begin{gathered} G'_x - \frac{d}{dt}G'_{\dot x} = 0, \\ G'_{y_k} - \frac{d}{dt}G'_{\dot y_k} = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots, p), \end{gathered} \tag{11}$$

а в точках излома t_s — "угловых" соотношений Вейерштрасса–Эрдмана

$$G_{\dot y_k|t_s - 0} = G_{\dot y_k|t_s + 0}. \tag{12}$$

[1] Аргументами в подинтегральных функциях являются $x_0(t)$, $Y_0(t)$, U.

Следовательно, принимая во внимание (10)–(12), существенно разрывная функция $Y(x) \in$ НП, соответствующая кривой C_0, и, значит, минимизирующая функционал (4), должна на участках однозначности удовлетворять уравнениям

$$F'_{y_k} - \frac{d}{dt} F_{y'_k} = 0, \quad F'_x - \frac{d}{dx}(F - y'_k F'_{y'_k}) = 0,$$

а в точках разрыва x_l — условиям

$$F'_{y'_k | x_l - 0} = (\cos\gamma_k^* w + w'_{\cos\gamma_k} - \cos\gamma_k^* \cos\gamma_j^* w_{\cos\gamma_j})|_{x_l-0},$$
$$F'_{y'_k | x_l + 0} = (\cos\gamma_k^{**} w + w'_{\cos\gamma_k} - \cos\gamma_k^{**} \cos\gamma_j^{**} w_{\cos\gamma_j})|_{x_l+0},$$
$$\Big(F - y'_k F'_{y'_k} - \int_{(x,Y^*)}^{(x,Y(x))} w'_x ds\Big)\Big|_{x_l-0} = \Big(F - y'_k F'_{y'_k} - \int_{(x,Y^*)}^{(x,Y(x))} w'_x ds\Big)\Big|_{x_l+0},$$

где $\cos\gamma_k^*$, $\cos\gamma_k^{**}$ — направляющие косинусы касательной к дуге χ_l соответственно в точках $(x_l, Y(x_l-0))$, $(x_l, Y(x_l+0))$ (см. [1], [4]). Последние три соотношения являются обобщениями на случай существенно разрывных функций “угловых” условий Вейерштрасса–Эрдмана и необходимых условий разрыва Размадзе.

Литература

1. Морозов С.Ф. *Введение в теорию разрывных задач вариационного исчисления.* – Н. Новгород: изд-во Нижегородск. ун-та, 1996. – 102 с.
2. Кошелев В.Н., Морозов С.Ф. *Теоремы существования разрывных решений в пространственных вариационных задачах.* I // Изв. вузов. Математика. – 1970. – № 5. – С. 47–52.
3. Кошелев В.Н., Морозов С.Ф. *Теоремы существования разрывных решений в пространственных вариационных задачах.* II // Изв. вузов. Математика. – 1977. – № 2. – С. 49–59.
4. Кошелев В.Н., Морозов С.Ф. *О необходимых условиях экстремума вариационных задач в непараметрической форме на совокупности разрывных функций* // Изв. вузов. Математика. – 1970. – № 12. – С. 37–46.
5. Морозов С.Ф., Семенов А.В. *О существовании обобщенных и разрывных решений пространственных вариационных задач* // Вестн. Нижегородск. ун-та. Сер. матем. моделир. и оптимал. управление. – 1998. – № 2. – С. 166–173.
6. Морозов С.Ф., Семенов А.В. *Обобщенные решения разрывных задач вариационного исчисления* // Нижегородск. ун-т. – Н. Новгород, 1997. – 26 с. – Деп. в ВИНИТИ 26.03.97, № 923-В97.
7. Кротов В.Ф. *Разрывные решения вариационных задач* // Изв. вузов. Математика. – 1960. – № 5. – С. 86–98.
8. Кротов В.Ф. *Основная задача вариационного исчисления для простейшего функционала на совокупности разрывных функций* // ДАН СССР. – 1961. – Т. 137. – № 1. – С. 31–34.
9. Кротов В.Ф., Букреев В.В., Гурман В.И. *Новые методы вариационного исчисления в динамике полета.* – М.: Машиностроение, 1969. – 288 с.
10. Young L.C. *Generalized curves and the existence of an attained absolute minimum in the calculus of variations* // C. R. Sci. Letters Varsovie. C.III. – 1937. – V. 30. – P. 212–234.
11. Янг Л. *Лекции по вариационному исчислению и теории оптимального управления.* – М.: Мир, 1974. – 488 с.
12. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. *Элементы теории функций и функционального анализа.* – М.: Наука, 1989. – 624 с.
13. Халмош П.Р. *Теория меры.* – М.: Ин. лит., 1953. – 292 с.
14. Данфорд Н., Шварц Дж.Т. *Линейные операторы. Общая теория.* I. – М.: Ин. лит., 1962. – 895 с.

Нижегородский государственный университет

Поступила
25.01.1999