ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2005 МАТЕМАТИКА № 4 (515)

УДК 517.956

К.Б. САБИТОВ, М.Ф. МУГАФАРОВ

ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА РЕШЕНИЙ РАЗНОСТНОЙ ЗАДАЧИ ТРИКОМИ ДЛЯ ОДНОЙ СЕТОЧНОЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ СМЕШАННОГО ТИПА И ИХ ПРИМЕНЕНИЯ

1. Постановка задачи. Основные результаты

Рассмотрим систему

$$L_iU \equiv K(y)u_{ixx} + u_{iyy} + a_i(x,y)u_{ix} + b_i(x,y)u_{iy} + \sum_{j=1}^{n} c_{ij}(x,y)u_j = f_i(x,y), \tag{1}$$

где $K(y) = |y|^\beta \operatorname{sgn} y$, $\beta > 0$, $i = \overline{1,n}$, $n \geq 2$, $U = (u_1, u_2, \dots, u_n)$, в области D, ограниченной при $y < 0$ характеристиками AC, BC системы (1), исходящими из точек $A(0,0)$ и $B(l,0)$, $l > 0$, а при $y > 0$ — простой кривой σ с концами в точках A и B. Части области D, в которых $y > 0$ и $y < 0$, обозначим соответственно через D^+ и D^-.

Для системы (1) в области D рассмотрим следующую краевую задачу.

Задача Трикоми. Найти функцию $U(x,y)$, удовлетворяющую условиям

$$U(x,y) \in C(\overline{D}) \cap C^1(D) \cap C^2(D^+ \cup D^-); \tag{2}$$

$$L_iU(x,y) \equiv f_i(x,y), \quad (x,y) \in D^+ \cup D^-, \quad i = \overline{1,n}; \tag{3}$$

$$U(x,y) = \Phi(x,y), \quad (x,y) \in \sigma; \tag{4}$$

$$U(x,y)\big|_{AC} = \Psi(x), \quad 0 \leq x \leq l/2, \tag{5}$$

где $\Phi = (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)$ и $\Psi = (\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n)$ — заданные достаточно гладкие вектор-функции, $\varphi_i(0,0) = \psi_i(0)$.

Традиционно задача Трикоми для уравнений и систем смешанного типа изучалась аналитическими методами. Так, в [1], [2] был предложен новый аналитический метод решения задачи Трикоми для уравнения Лаврентьева–Бицадзе. В [3] установлен принцип максимума модуля $|U(x,y)| = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} u_i^2(x,y)}$ решения задачи Т для системы (1) при $K(y) = y$, $a_i(x,y) = b_i(x,y) \equiv 0$, $(c_{ik}(x,y))$, $i,k = \overline{1,n}$, $n \geq 2$, — отрицательно определенная матрица, компоненты которой в области D^+ удовлетворяют условиям $*$:

$$(n-1)(c_{ik}(x,y) + c_{ki}(x,y)) \leq 2(c_{ii}(x,y)c_{kk}(x,y))^{1/2}, \quad i \neq k,$$

а в области D^- достаточно малы, — из которого следует единственность решения задачи Т. На основе теоремы единственности методом интегральных уравнений получена теорема существования регулярного решения задачи Трикоми при ортогональном подходе кривой σ к оси абсцисс. Под регулярным решением задачи Т понимается функция $U(x,y)$, удовлетворяющая условиям (2)–(5).

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 02-01-97901.

Отметим, что в [4], [5] задачи Трикоми и Геллерстедта исследованы для систем уравнений смешанного типа первого порядка. Аналог задачи Трикоми для системы высшего порядка изучен в [6].

В [7] на основании [8], [9] были установлены экстремальные свойства решений задачи (2)–(5), с помощью которых были сняты ограничения (∗) малости коэффициентов $c_{ik}(x,y)$ в области гиперболичности и на подход кривой σ к оси изменения типа системы (1).

Приближенное решение краевых задач для уравнений смешанного типа методом конечных разностей изучалось в [10]–[26]. Так, например, в [10], [11] предложен метод конечных разностей для определения приближенного решения u_h задачи Трикоми для уравнения Лаврентьева–Бицадзе в области D при условии существования точного решения. При этом приближенное решение сводится к алгебраической системе с числом неизвестных, равным количеству узлов сетки в области D. В [12]–[15] задача Трикоми для уравнения Лаврентьева–Бицадзе приводится к эллиптической задаче, которая решается методом конечных разностей.

В [13] указывается на то, что "метод конечных разностей может быть использован и как вычислительный метод, и как метод доказательства теорем существования, и, наконец, как метод исследования дифференциальных свойств решений". Для доказательства существования решения задачи Трикоми для уравнения Лаврентьева–Бицадзе метод конечных разностей был впервые применен в [16].

В [17] изучена задача Трикоми для уравнения, которое получается из системы (1) при $K(y) = y$, $a_i = b_i = c_{ij} = 0$, $n = 1$, методом конечных разностей во всей смешанной области D. Аналогичный результат получен для более общего уравнения смешанного типа при $K(y) = \operatorname{sgn} y|y|^m$, $m > 0$, $n = 1$ в [18], [19].

Диссертации [20], [21] посвящены исследованию приближенного решения краевых задач для уравнения Лаврентьева–Бицадзе с отходом от характеристик или с условиями сопряжения Франкля. В [24]–[26] методом конечных разностей исследована задача типа Трикоми для уравнений смешанного типа с двумя перпендикулярными линиями вырождения.

Если кривая Γ из класса Ляпунова в точках A и B оканчивается сколь угодно малыми дугами "нормальной" кривой, $\Phi \in C^1(\sigma)$, $\Psi \in C^3[0, l/2]$, $\Psi(0) = \Phi(0,0) = \Phi(l,0) = 0$, то существует единственное регулярное решение задачи T. Если функция $\Phi \in C(\sigma)$, $\Psi \in C^3[0, l/2]$, $\Psi(0) = \Phi(0,0) = \Phi(l,0) = 0$, то существует единственное обобщенное решение задачи T при произвольном подходе кривой Γ к оси абсцисс, кроме случаев касания. Под обобщенным решением задачи T для системы (1) понимается равномерный в замыкании области D предел последовательности регулярных решений задачи T. Эти утверждения доказаны в [7].

В данной работе построен разностный аналог задачи Трикоми для системы уравнений (1), установлены принципы максимума для сеточной системы уравнений в областях эллиптичности, гиперболичности и, в целом, в смешанной области. На их основе доказано существование и единственность решения разностной задачи Трикоми.

2. Аппроксимация дифференциальной системы уравнений разностной. Постановка разностной задачи Трикоми

Построим сеточную область. Разделим отрезок AB на $N = 2^{N_1}$ равных частей длины h. Построим сетку при $y < 0$. Для этого через точки деления проведем характеристики

$$\xi = x - \frac{2}{\beta+2}(-y)^{(\beta+2)/2} = mh, \quad \eta = x + \frac{2}{\beta+2}(-y)^{(\beta+2)/2} = mh, \quad m = 1, 2, \ldots, N,$$

системы (1) (см. рис. 1).

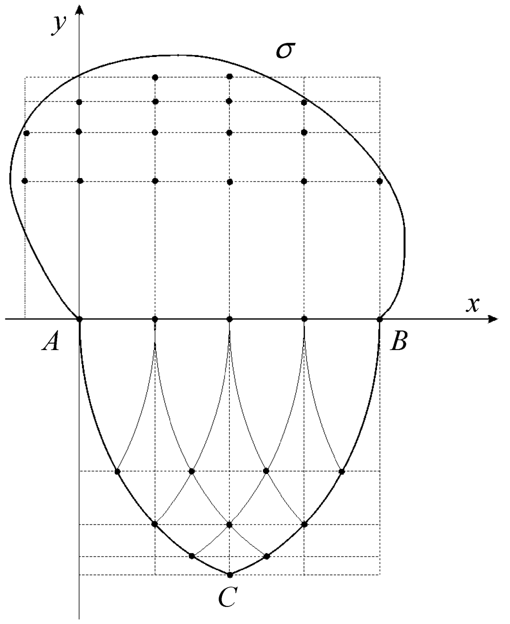

Рис. 1

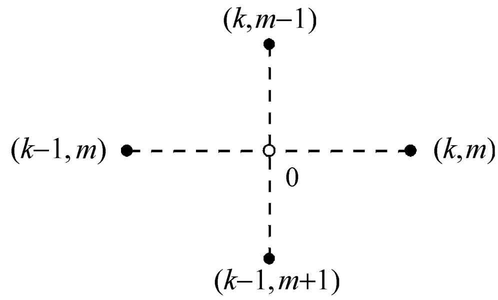

Рис. 2

При $y<0$ сетка состоит из точек пересечения этих линий. Пусть $H(x)=\left(\frac{\beta+2}{2}x\right)^{\frac{2}{\beta+2}}$, тогда уравнение характеристики AC можно представить в виде $y=-H(x)$. Через (k,m) обозначим узел $(x_{km},-y_m)$, $x_{km}=kh+mh/2$, $y_m=H(mh/2)$, $k,m=0,1,\ldots$, h — шаг сетки по x; l_m – шаг сетки по y; $l_m=y_m-y_{m-1}$. При $y\geq 0$ сетка прямоугольная. Здесь под (k,m) будем понимать узел (kh,y_m), $k=0,\pm 1,\ldots$, $m=0,1,\ldots$ Через $\overline{D}_h$, $\overline{D}_h^+$, $\overline{D}_h^-$ обозначим множество всех узлов, принадлежащих $\overline{D}$, $\overline{D}^+$, $\overline{D}^-$ соответственно.

Для функции $U(k,m)=(u_1(k,m),\ldots,u_n(k,m))$, определенной в сеточной области D_h, построим разностный оператор R. Заменив значения частных производных в узле $(k,m)\in D_h^-$ (см. рис. 2) на соответствующие разностные отношения

$$u_{ix}\big|_{(k,m)}\sim[u_i(k,m)-u_i(k-1,m)]/h,\quad u_{iy}\big|_{(k,m)}\sim[u_i(k,m-1)-u_i(k-1,m+1)]/(l_m+l_{m+1}),$$
$$u_{ixx}\big|_{(k,m)}\sim 4[u_i(k-1,m)-2u_{i0}+u_i(k,m)]/h^2,$$
$$u_{iyy}\big|_{(k,m)}\sim 2[l_mu_i(k-1,m+1)-(l_m+l_{m+1})u_{i0}+l_{m+1}u_i(k,m-1)]/((l_m+l_{m+1})l_ml_{m+1}),$$

получим

$$R_iU(k,m)=\frac{1}{l_ml_{m+1}}\left\{\frac{2l_{m+1}}{l_m+l_{m+1}}u_i(k,m-1)+\frac{2l_m}{l_m+l_{m+1}}u_i(k-1,m+1)-\right.$$
$$\left.-u_i(k-1,m)-u_i(k,m)\right\}+a_i(k,m)\frac{1}{h}[u_i(k,m)-u_i(k-1,m)]+$$
$$+b_i(k,m)\frac{1}{l_m+l_{m+1}}[u_i(k,m-1)-u_i(k-1,m+1)]+\sum_{j=1}^{n}c_{ij}(k,m)u_j(k,m).\quad(6)$$

Аналогично, для каждого узла $(k,m)\in D_h^+$ имеем

$$R_iU(k,m)=\frac{K(m)}{h^2}[u_i(k+1,m)-2u_i(k,m)+u_i(k-1,m)]+$$
$$+\frac{2}{l_m(l_m+l_{m+1})}u_i(k,m-1)-\frac{2}{l_ml_{m+1}}u_i(k,m)+\frac{2}{l_{m+1}(l_m+l_{m+1})}u_i(k,m+1)+$$
$$+a_i(k,m)\frac{1}{2h}[u_i(k+1,m)-u_i(k-1,m)]+$$

$$+\, b_i(k,m)\frac{1}{l_m+l_{m+1}}[u_i(k,m+1)-u_i(k,m-1)]+\sum_{j=1}^{n} c_{ij}(k,m)u_j(k,m). \quad (7)$$

Из условия (2) следует непрерывность функции $U(x,y)$ вместе с производной $U_y(x,y)$ на отрезке AB. Каждому узлу $(x,0)\in AB$ сопоставим систему

$$R_iU \equiv [u_i(x,y_2)-2u_i(x,0)+u_i(x,-y_2)]/y_2=0, \quad i=\overline{1,n}. \quad (8)$$

Назовем граничными точками сетки $\overline{D}_h$, во-первых, точки D_h, лежащие на AC, и, во-вторых, точки области D_h, лежащие в полуплоскости $y\geq 0$, для которых не все соседние точки принадлежат $\overline{D}_h$. Для точки $(k,m)\in D_h^+$ соседними назовем четыре точки, входящие в систему (7), а для точки $(x,0)$ — две точки (x,y_2) и $(x,-y_2)$, входящие в систему (8). Множество граничных точек сетки, принадлежащих полуплоскости $y\geq 0$, обозначим через σ_h.

Граничные условия (4)–(5) заменим следующими:

1) в точках сетки, лежащих на AC, положим $U=\Psi$;

2) продолжим функцию Φ по непрерывности на $\overline{D}^+$ и обозначим полученную функцию через Φ_D, в точках σ_h положим $U=\Phi_D$.

Пусть R — разностный оператор, действующий по закону, указанному в левых частях равенств (6)–(8), на любую функцию, определенную в $\overline{D}_h$. Тогда получим разностную задачу.

Задача T_h. Найти решение системы уравнений

$$RU(k,m)=F^*(k,m), \quad (k,m)\in D_h, \quad (9)$$

удовлетворяющее граничным условиям

$$U=\Phi_D \ \text{ на } \ \sigma_h, \quad U=\Psi \ \text{ на } \ AC, \quad (10)$$

где $F^*=(f_1,\ldots,f_n)$ в $D_h^+\cup D_h^-$, $F^*=0$ на AB.

В линейной системе уравнений (9) число уравнений равно числу неизвестных (неизвестными являются значения компонент функции U в точках сетки D_h). Далее докажем, что задача (9), (10) имеет единственное решение. Исследуем прежде всего точность аппроксимации. Пусть $\varepsilon>0$ — произвольно малое число. Введем множества $D^{\varepsilon+}=\{(x,y)\in D^+ \mid y>\varepsilon\}$, $D^{\varepsilon-}=\{(x,y)\in D^- \mid y<-\varepsilon\}$. Через $D_h^{\varepsilon+}$, $D_h^{\varepsilon-}$ обозначим множество узлов, принадлежащих $D^{\varepsilon+}$, $D^{\varepsilon-}$.

Лемма 1. *Пусть функция $U(x,y)$ принадлежит классу $C^2(\overline{D}^{\varepsilon+}\cup\overline{D}^{\varepsilon-})$. Тогда $R_iU\to L_iU$ равномерно при $h\to 0$ в узлах $D_h^{\varepsilon+}\cup D_h^{\varepsilon-}$.*

Доказательство. Достаточно показать, что

$$\max_i \max_{\overline{D}_h^{\varepsilon+}\cup\overline{D}_h^{\varepsilon-}} |L_iU-R_iU|\to 0 \quad \text{при} \quad h\to 0.$$

1) Пусть $\max\limits_i \max\limits_{\overline{D}_h^{\varepsilon+}} |L_iU-R_iU|=|L_pU(Q)-R_pU(Q)|$, $1\leq p\leq n$, $Q=(k,m)\in D_h^+$. В силу гладкости функции $U(x,y)$ разложим ее компоненты, входящие в (7), по формуле Тейлора в окрестности точки Q. Тогда получим

$$R_pU(Q)=\frac{K(m)}{2}[u_{pxx}(k-\theta_1,\,m)+u_{pxx}(k+\theta_3,\,m)]+\frac{1}{l_m+l_{m+1}}[l_{m+1}\,u_{pyy}(k,\,m+\theta_4)+$$
$$+l_m\,u_{pyy}(x,\,m-\theta_2)]+a_p(Q)u_{px}(Q)+a_p(Q)\frac{h}{4}[u_{pxx}(k+\theta_3,\,m)-u_{pxx}(k-\theta_1,\,m)]+$$
$$+b_p(Q)u_{py}(Q)+\frac{b_p(Q)}{l_m+l_{m+1}}[l_{m+1}^2\,u_{pyy}(k,\,m+\theta_4)-l_m^2\,u_{pyy}(k,\,m-\theta_2)]+\sum_{j=1}^{n} c_{pj}(Q)u_j(Q),$$

где $0 < \theta_i < 1$, $i = 1, \ldots, 4$. Если $h \to 0$, то все $\theta_i \to 0$, а значит, и $|L_p U(Q) - R_p U(Q)| \to 0$.

2) Если $\max\limits_i \max\limits_{\overline{D}_h^{\varepsilon -}} |L_i U - R_i U| = |L_p U(Q) - R_p U(Q)|$, $1 \le p \le n$, $Q = (k, m) \in D_h^-$, то аналогично получим

$$|L_p U(Q) - R_p U(Q)| \le \left| K u_{pxx}(Q) + \frac{h^2}{2 l_m l_{m+1}} u_{pxx}(k - \theta_1, m) - \frac{h^2}{4(l_m + l_{m+1}) l_m l_{m+1}} \times \right.$$
$$\left. \times [l_{m+1} u_{pxx}(k, m - \theta_2) + l_m u_{pxx}(k - 1, m + \theta_4)] \right| + \frac{h}{l_m + l_{m+1}} |u_{pxy}(k, m - \theta_2) - u_{pxy}(k - 1, m + \theta_4)| +$$
$$+ \left| u_{pyy} - \frac{1}{l_m + l_{m+1}} [l_m u_{pxx}(k, m - \theta_2) + l_{m+1} u_{pxx}(k - 1, m + \theta_4)] \right| + |a_p(Q) u_{pxx}(k - \theta_1, m)| \frac{h}{2} +$$
$$+ |b_p(Q)[u_{pxx}(k, m - \theta_2) - u_{pxx}(k, m + \theta_4)]| \frac{h^2}{8(l_m + l_{m+1})} +$$
$$+ |b_p(Q)[u_{pxy}(k, m - \theta_2) l_{m+1} - u_{pxy}(k, m + \theta_4) l_m]| \frac{h}{2(l_m + l_{m+1})} +$$
$$+ |b_p(Q)[u_{pyy}(k, m - \theta_2) l_m^2 - u_{pyy}(k, m + \theta_4) l_{m+1}^2]| \frac{h}{2(l_m + l_{m+1})}.$$

Докажем, что

$$\left| K + \frac{h^2}{4 l_m l_{m+1}} \right| \to 0 \quad \text{при} \quad h \to 0.$$

Поскольку $H'(x) = 1/\sqrt{-K(y)}$ и

$$l_m = y_m - y_{m-1} = H\left(\frac{mh}{2}\right) - H\left(\frac{mh - h}{2}\right) = \frac{h}{2} H'\left(\frac{mh - \theta h}{2}\right), \quad 0 < \theta < 1,$$

то

$$K(-y_m) + \frac{h^2}{4 l_m l_{m+1}} = K(-y_m) + \sqrt{-K(-y_m - \theta_1 l_{m+1})} \sqrt{-K(-y_m + \theta_2 l_m)}, \tag{11}$$

где $0 < \theta_i < 1$, $i = 1, 2$. В силу непрерывности $K(y)$ и (11) получаем требуемое. $\square$

3. Принцип максимума в области эллиптичности

Для дальнейших рассуждений удобно преобразовать систему (7) к виду

$$R_i U \equiv K(m) u_{ix\overline{x}} + (1 + t_m) u_{iy\overline{y}} + a_i(k, m)(u_{ix} + u_{i\overline{x}})/2 +$$
$$+ b_i(k, m)[(1 - t_m) u_{iy} + (1 + t_m) u_{i\overline{y}}]/2 + \sum_{j=1}^{n} c_{ij}(k, m) u_j = f_i(k, m),$$

где $t_m = (l_m - l_{m+1})/(l_m + l_{m+1})$, $i = \overline{1, n}$; u_{ix}, $u_{i\overline{x}}$, $u_{ix\overline{x}}$ — разделенные разности компоненты u_i функции U по x, u_{iy}, $u_{i\overline{y}}$, $u_{iy\overline{y}}$ — по y, т. е.

$$u_{iy} = [u_i(k, m + 1) - u_i(k, m)]/l_{m+1}, \quad u_{i\overline{y}} = [u_i(k, m) - u_i(k, m - 1)]/l_m,$$
$$u_{iy\overline{y}} = [u_{iy}(k, m) - u_{iy}(k, m - 1)]/l_m.$$

Теорема 1. *Пусть* 1) $R_i U \ge 0$ *в* D_h^+; 2) *условия*

$$|a_i| h < 2K, \tag{12}$$
$$|b_i| l_m < 2, \tag{13}$$
$$c_{ij} \ge 0 \quad \textit{при} \quad i \ne j, \quad c_{ii} + \sum_{j \ne i}^{n} c_{ij} \le 0 \tag{14}$$

выполнены в D_h^+ *для всех* $i = \overline{1,n}$. *Если* $\max\limits_i \max\limits_{\overline{D}_h^+} u_i \geq 0$, *то этот максимум достигается на* $\sigma_h \cup AB$.

Доказательство. Пусть $\max\limits_i \max\limits_{D_h^+} u_i = u_j(k,m) \geq 0$. Допустим, что точка $Q = (k,m) \notin \sigma_h \cup AB$. Эта точка не является граничной, поэтому найдутся четыре ее соседние точки, в которых $u_i \leq u_j(Q)$, $i = \overline{1,n}$. Но не во всех из этих соседних точек $u_i = u_j(Q)$. В силу условий (12)–(14) вычислим

$$R_jU(Q) = K(m)u_{jx\overline{x}}(Q) + (1+t_m)u_{jy\overline{y}}(Q) + a_j(Q)(u_{jx}(Q) + u_{j\overline{x}}(Q))/2 +$$
$$+b_j(Q)[(1-t_m)u_{jy}(Q) + (1+t_m)u_{j\overline{y}}(Q)]/2 + \sum_{k=1}^{n} c_{ik}(Q)u_k(Q) =$$
$$= \frac{K(m)}{h^2}[u_j(k+1,m) - 2u_j(Q) + u_j(k-1,m)] + \frac{2}{l_m(l_m+l_{m+1})}u_j(k,m-1) -$$
$$-\frac{2}{l_ml_{m+1}}u_j(k,m) + \frac{2}{l_{m+1}(l_m+l_{m+1})}u_j(k,m+1) + \sum_{k=1}^{n} c_{jk}(k,m)u_j(Q) +$$
$$+a_j(Q)\frac{1}{2h}[u_j(k+1,m) - u_j(k-1,m)] + b_j(Q)\frac{1}{l_m+l_{m+1}}[u_j(k,m+1) - u_j(k,m-1)] <$$
$$< \frac{2K(m)}{h^2}[u_j(k+1,m) - u_j(Q)] + \frac{2}{l_ml_{m+1}}[u_j(k,m+1) - u_j(Q)] +$$
$$+\sum_{k\neq j}^{n} c_{jk}[u_k(Q) - u_j(Q)] + u_j(Q)\left(c_{jj} + \sum_{k\neq j}^{n} c_{jk}\right) \leq 0,$$

но, с другой стороны, $R_jU(Q) \geq 0$. Полученное противоречие и доказывает принцип максимума. Если предположить, что во всех соседних с точкой Q узлах выполняется $u_i = u_j(Q)$, то, проводя аналогичные действия для этих узлов, придем к противоречию или к тому, что функция $U(k,m)$ постоянна в области D_h^+. $\square$

Заметим, что принцип максимума для общего сеточного уравнения эллиптического типа приведен во многих работах, например, ([22], с. 226).

Лемма 2. *Пусть выполнены условия* 1), 2) *теоремы* 1 *и, кроме того,* $u_i(k,m) \leq 0$ *на* σ_h, $u_i(x,0) \leq M$, $M = \mathrm{const} > 0$, *на* AB. *Если* $u_j(Q) = M$, $Q = (x_q,0) \in AB$, *то* $u_j(x_q,0) > u_j(x_q,y_2)$.

Доказательство. Согласно теореме 1 имеем $u_i(k,m) \leq M$, $i = \overline{1,n}$, в D_h^+. Если точка $(x_q,y_2) \in \sigma_h$, то утверждение очевидно. Пусть $(x_q,y_2) \in D_h^+$, $u_j(x_q,y_2) = M$. Тогда из (7) с учетом (12), (13) получим $R_jU(Q) < 0$, что противоречит условию $R_jU(Q) \geq 0$ или тому, что $u_j = M$ в четырех соседних с узлом (x_q,y_2) точках. В частности, $u_j(x_q,y_4) = M$. Продолжая подобные рассуждения конечное число раз, придем к противоречию с $R_jU(Q) \geq 0$ в D_h^+ или получим $u_j = M$ в некоторой точке из σ_h, что противоречит одному из условий леммы. $\square$

Замечание 1. Если коэффициенты a_i, b_i системы (1) в области D^+ непрерывны, ограничены и

$$y^{1-\beta/2}a_i \to 0 \ \text{ равномерно при } \ y \to 0, \tag{15}$$

то при достаточно малом шаге h коэффициенты системы (9) в области $\overline{D}_h^+$ удовлетворяют условиям (12), (13) теоремы 1.

Действительно, условие (13) очевидно выполняется в силу ограниченности b_i и малости l_m. При условии (12) имеем

$$y_m = r(mh)^s \in D_h^+, \quad r = (2s)^{(-s)}, \quad s = \frac{2}{\beta+2}.$$

Тогда

$$2K(y_m) \pm a_i h = 2K(y_m)\left(1 \pm \frac{a_i h}{2(y_m)^\beta}\right) =$$
$$= 2K(y_m)\left(1 \pm (y_m)^{1-\beta/2}\frac{a_i h}{2(y_m)^{1/s}}\right) = 2K(y_m)\left[1 \pm (y_m)^{1-\beta/2}\frac{a_i s}{m}\right].$$

Докажем, что выражение в квадратных скобках больше 1/2. Действительно, в силу выполнения условия (15) существует такое $\delta > 0$, что при $0 < y_m < \delta$ справедливо

$$1 \pm (y_m)^{1-\beta/2}\frac{a_i s}{m} > \frac{1}{2} \Leftrightarrow \pm(y_m)^{1-\beta/2}a_i > -\frac{m}{2s}.$$

При $y_m \geq \delta$ и достаточно малых h условие (12) справедливо в силу ограниченности $K(y_m)$ снизу положительной постоянной и ограниченности a_i.

Заметим, что условие (15) автоматически выполняется при $\beta < 2$ и ограниченных a_i. Но при $\beta \geq 2$ это условие накладывает дополнительные ограничения на коэффициенты a_i.

4. Принцип максимума в области гиперболичности

В области D^- перейдем к характеристическим координатам (ξ,η). В этих координатах система (1) имеет вид

$$N_i U \equiv u_{i\xi\eta} + a_i(\xi,\eta)u_{i\xi} + b_i(\xi,\eta)u_{i\eta} + \sum_{j=1}^{n} c_{ij}(\xi,\eta)u_j = f_i(\xi,\eta), \qquad (16)$$

где коэффициенты системы (16) и f_i известным образом выражаются через коэффициенты исходной системы (1)

$$\left.\begin{array}{l} a_i(\xi,\eta) = \widetilde{a}_i(\xi,\eta) \\ b_i(\xi,\eta) = \widetilde{b}_i(\xi,\eta) \end{array}\right\} = -\frac{s}{\eta-\xi} \mp \frac{1}{4}\left(\frac{4}{\beta+2}\right)^{4s}\frac{a_i}{(\eta-\xi)^{4s}} \pm \frac{1}{4}\left(\frac{4}{\beta+2}\right)^{2s}\frac{b_i}{(\eta-\xi)^{2s}},$$

$$c_{ij}(\xi,\eta) = \widetilde{c}_{ij}(\xi,\eta) = -\frac{1}{4}\left(\frac{4}{\beta+2}\right)^{4s}\frac{c_{ij}}{(\eta-\xi)^{4s}}, \quad f_i(\xi,\eta) = \widetilde{f}_i(\xi,\eta) = -\frac{1}{4}\left(\frac{4}{\beta+2}\right)^{4s}\frac{f_i}{(\eta-\xi)^{4s}},$$

$$0 < s = \frac{\beta}{2(\beta+2)} < \frac{1}{2}, \quad i = \overline{1,n}.$$

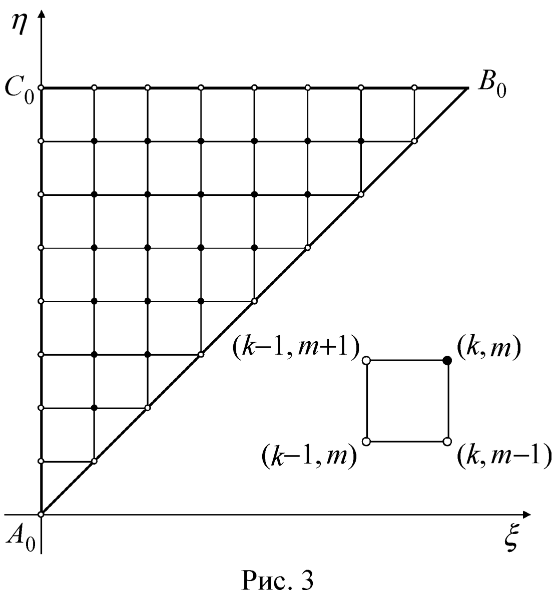

Рис. 3

Область D^- преобразуется в $\Delta = \{(\xi,\eta) : 0 < \xi < \eta < 1\}$. Пусть $A_0 = (0,0)$, $B_0 = (1,1)$, $C_0 = (0,1)$ — вершины треугольника Δ.

Ячейки сетки D_h^- становятся квадратными с длиной стороны $h\sqrt{2}$. Множество узлов, принадлежащих $\overline{\Delta}$ (Δ), обозначим $\overline{\Delta}_h$ (Δ_h). Пронумеруем узлы $\overline{\Delta}_h$ следующим образом: сначала узлы, лежащие на A_0C_0 в порядке возрастания η: $(0,0),(0,1),(0,2),\ldots,(0,N)$; затем узлы, лежащие на $\xi = h$ в том же порядке: $(1,0),(1,1),(1,2),\ldots,(1,N-1)$ и т. д. В дальнейшем, под значением какой-либо функции в узле (k,m) будем понимать ее значение в точке с координатами $(kh,(m+k)h)$.

Заменим значения частных производных в узле $(k,m) \in \Delta_h$ на соответствующие разностные отношения

$$u_{i\eta}\big|_{(k,m)} \sim [u_i(k,m) - u_i(k,m-1)]/h,$$
$$u_{i\xi}\big|_{(k,m)} \sim [u_i(k,m) - u_i(k-1,m+1)]/h,$$
$$u_{i\xi\eta}\big|_{(k,m)} \sim [u_i(k,m) - u_i(k-1,m+1) - u_i(k,m-1) + u_i(k-1,m)]/h^2.$$

Получаем систему разностных уравнений

$$R_i^* U(k,m) \equiv [(1 + a_i h + b_i h) u_i(k,m) - (1 + a_i h) u_i(k-1,m+1) -$$
$$- (1 + b_i h) u_i(k,m-1) + u_i(k-1,m)]/h^2 + \sum_{j=1}^{n} c_{ij} u_j(k,m) = f_i, \quad i = \overline{1,n}, \quad (17)$$

где через a_i, b_i, c_{ij}, f_i обозначены значения соответствующих коэффициентов системы уравнений (16) в узле (k,m).

Система разностных уравнений (17) аппроксимирует систему дифференциальных уравнений (16), т. е. если $U(\xi,\eta) \in C^2(\Delta)$, то

$$\max_i \max_{\Delta_h} |N_i U - R_i^* U| \to 0 \quad \text{при} \quad h \to 0.$$

Утверждение доказывается аналогично лемме 1.

Теорема 2. *Пусть*

1) *функция* $U(k,m)$ *определена в* $\overline{\Delta}_h$ *и* $R_i^* U(k,m) \geq 0$ *в* Δ_h, $i = \overline{1,n}$;

2) *коэффициенты системы* (17) *в области* Δ_h *удовлетворяют условию*

$$c_{ij}(k,m) \leq 0, \quad i \neq j, \quad \sum_{i=1}^{n} c_{ij}(k,m) \geq 0; \quad (18)$$

3) *существует такое* $h_0 > 0$, *что для всех* $0 < h < h_0$ *в* Δ_h *выполняются неравенства*

$$1 + a_i(k,m)h \geq 0, \quad 1 + b_i(k,m)h \geq 0, \quad (19)$$

$$(1 + a_i(k+1,m-1)h)(1 + b_i(k,m)h) \geq 1 + a_i(k,m)h + b_i(k,m)h + h^2 \sum_{j=1}^{n} c_{ij}(k,m) > 0; \quad (20)$$

4) $u_i(0,m) \geq 0$, $[1 + a_i(1,m)h] u_i(0,m+1) \geq u_i(0,m)$ *на* A_0C_0, *где* $m = \overline{1,N-1}$, $i = \overline{1,n}$; $u_i(k,k) \geq 0$ *на* A_0B_0, *где* $k = \overline{1,N-1}$, $i = \overline{1,n}$.

Тогда все компоненты функции $U(k,m)$ *неотрицательны в* Δ_h.

Следствие 1. Пусть выполнены условия 2), 3) теоремы 2 и $U(k,m)$ — решение системы (17), равное нулю на характеристике A_0C_0, $f_i(k,m) \leq 0$, $(k,m) \in \Delta_h$, $i = \overline{1,n}$. Если $\max\limits_i \max\limits_{\overline{\Delta}_h} u_i(k,m) > 0$, то этот максимум достигается на A_0B_0.

Доказательство теоремы 2 и следствия 1 приведено в [27].

Замечание 2. Если коэффициенты a_i, b_i, c_{ij} и $a_{i\xi}$ системы (16) непрерывны в области $\overline{\Delta}$ и

$$IL_i \equiv a_{i\xi} + a_i b_i - \sum_{j=1}^{n} c_{ij} \geq 0, \quad c_{ij} \leq 0, \quad i \neq j, \quad \sum_{i=1}^{n} c_{ij} \geq 0,$$

то при достаточно малом шаге h коэффициенты системы (17) в области Δ_h удовлетворяют условиям 2), 3) теоремы 2.

Действительно, рассмотрим условие (20). Для его выполнения достаточно неравенства

$$ILH_i \equiv [a_i(k+1,m-1) - a_i(k,m)]/h + a_i(k+1,m-1)b_i(k,m) - \sum_{j=1}^{n} c_{ij}(k,m) \geq 0,$$

которое справедливо в силу $IL_i \geq 0$ и

$$\max_i \max_{\Delta_h} |IL_i - ILH_i| \to 0 \quad \text{при} \quad h \to 0.$$

Остальные условия выполняются в силу малости h и ограниченности указанных коэффициентов.

5. Принцип максимума в смешанной области

Теорема 3. *Пусть*
1) *коэффициенты системы* (7) *в области* D_h^+ *удовлетворяют условиям* (12)–(14);
2) *в области* Δ_h *коэффициенты системы* (17) *удовлетворяют условиям* (18)–(20);
3) $U(k,m)$ — *решение системы* (9), *равное нулю на характеристике* AC, $RU \geq 0$ *в* D_h.
Если $\max\limits_i \max\limits_{D_h} u_i > 0$, *то этот максимум достигается на* σ_h.

Доказательство. Пусть $\max\limits_i \max\limits_{\overline{D}_h} u_i = u_j(Q) > 0$. Тогда в силу следствия 1 из теоремы 2 точка $Q \in \overline{D}_h^+$. На основании теоремы 1 точка Q также не принадлежит D_h^+.

Пусть $Q = (x,0) \in AB$, $M = \max\limits_i \max\limits_{\overline{\sigma}_h} u_i(k,m)$ и $u_j(Q) > M$. Тогда для функции $V = (u_1 - M, \ldots, u_n - M)$ выполнены все условия леммы 2. Действительно, $RV \geq 0$ в D_h, $v_i \leq 0$ на σ_h и $v_i \leq u_j(Q) - M$ на AB, причем $u_j(Q) - M > 0$. Следовательно, $v_j(x,y_2) < u_j(x,0) - M$, а значит,

$$R_jU(Q) = [u_j(x,y_2) - 2u_j(x,0) + u_j(x,-y_2)]/y_2 < 0,$$

что противоречит условию $RU \geq 0$ в D_h. Итак, $Q \in \sigma_h$. □

Следствие 2. Если выполнены условия теоремы 3, то задача T_h имеет единственное решение.

Доказательство. Пусть $W = (w_1, \ldots, w_n)$ — решение однородной системы уравнений

$$RW = 0 \;\; \text{в} \;\; D_h, \quad w_i = 0 \;\; \text{на} \;\; AC \cup \sigma_h.$$

Для функций W и $V = -W$ в $\overline{D}_h$ выполнены все условия теоремы 3. Отсюда следует $W \equiv 0$ в D_h. Значит, определитель системы (9) не равен нулю, поэтому задача T_h имеет единственное решение. □

Следствие 3. Пусть выполнены условия теоремы 3 и $U = (u_1, \ldots, u_n)$ — произвольная функция, определенная в сеточной области $\overline{D}_h$, для которой величины

$$B_1 = \max_i \max_{\sigma_h} |u_i|, \quad B_2 = \max_i \max_{AC} |[u_i(0,m) - u_i(0,m+1)]/l_{m+1}|, \quad B_3 = \max_i \max_{D_h} |R_iU|$$

конечны. Тогда для достаточно малых h в области D_h справедлива оценка

$$|u_i| \leq B_1 + C(B_2 + B_3), \quad i = \overline{1,n}, \tag{21}$$

где $C \geq 0$ — постоянная, зависящая от размеров области D и коэффициентов b_i и c_{ij}.

Доказательство. Пусть $Y = \sup\limits_D |y|$. В области D_h определим сеточную функцию E следующим образом:

$$E(-y_m) = (1 - \mu l_m)E(-y_{m-1}) \quad \text{в} \quad D_h^-,$$
$$E(y_m) = (1 + 2\mu\, l_m)E(y_{m-1}) \quad \text{в} \quad D_h^+,$$
$$E(0) = \exp(2\mu Y),$$

где μ — положительная постоянная. Возьмем h настолько малым, чтобы для всех m выполнялось неравенство

$$1-\mu l_m \geq \frac{1}{1+2\mu l_m} > \exp(-2\mu l_m).$$

Оно справедливо при $\mu l_m \leq 1/2$. Таким образом, в узлах сетки из D_h^- имеем соотношение

$$E(-y_m) = \exp(2\mu Y)\prod_{i=1}^{m}(1-\mu l_i) > 1.$$

В узлах из D_h^+ справедлива оценка

$$E(y_m) = \exp(2\mu Y)\prod_{i=1}^{m}(1+2\mu l_i) < \exp(4\mu Y).$$

Таким образом, E — положительная, неубывающая, равномерно (относительно h) ограниченная функция. Дополнительно положим h настолько малым, чтобы выполнялось соотношение

$$\frac{1}{y_2} \geq \frac{b_i(x,0)}{2}, \quad i=\overline{1,n},$$

тогда в D_h справедлива оценка

$$R_i E \geq \mu^2 - 3\,|b_i|\,\mu + 2\sum_{j=1}^{n} c_{ij}.$$

В узлах, лежащих на характеристике AC, имеем оценку

$$[E(0,m)-E(0,m+1)]/l_{m+1} = \mu E(-y_m) \geq \mu.$$

Выберем μ настолько большим, чтобы для малых h выполнялось $R_iE \geq 1$, $i=\overline{1,n}$, в D_h и $[E(0,m)-E(0,m+1)]/l_{m+1} \geq 1$ на AC.

Теперь определим функции $V=(v_1,\dots,v_n)$ и $W=(w_1,\dots,w_n)$ в области D_h следующим образом:

$$v_i = u_i + B_1 + (B_2+B_3)E, \quad w_i = -u_i + B_1 + (B_2+B_3)E.$$

Поскольку для введенных функций выполняются все условия принципа максимума, то $\max\limits_i \max\limits_{D_h} v_i$ и $\max\limits_i \max\limits_{D_h} w_i$ неотрицательны и достигаются на σ_h. Следовательно, оценка (21) справедлива при $C \geq \exp(4\mu Y) - 1$. □

Следствие 4. Пусть $U=(u_1,u_2,\dots,u_n)$ — решение задачи Трикоми для системы (1), $\widetilde{U} = (\widetilde{u}_1,\widetilde{u}_2,\dots,\widetilde{u}_n)$ — решение задачи (9), (10). Тогда, если выполнены условия теоремы 3, то

$$\lim_{h\to 0}\max_i \max_{D_h} |u_i - \widetilde{u}_i| = 0.$$

Доказательство. В силу гладкости функции $U(x,\,y)$ и леммы 1 для любого $\varepsilon>0$ можно выбрать такое малое h_1, что при $h<h_1$ для всех $i=\overline{1,n}$ в области D_h

$$|L_iU - R_iU| < \varepsilon, \tag{22}$$

где U — решение задачи Трикоми для системы (1). Пусть $\widetilde{U}$ — решение задачи T_h. Поскольку $L_iU = R_i\widetilde{U} = f_i$ в D_h, то из (22) следует

$$\max_i |R_i(\widetilde{U}-U)| < \varepsilon. \tag{23}$$

Кроме того, поскольку $\widetilde{U} = \Phi_D$ на σ_h, $U=\Phi$ на σ и Φ_D — непрерывное продолжение Φ, то существует такое малое $h_2>0$, что при $h<h_2$ в узлах из σ_h

$$\max_i |\widetilde{u}_i - u| < \varepsilon. \tag{24}$$

На A_0C_0 выполняется $\widetilde{u}_i - u = 0$, поэтому из (22)–(24) в силу следствия 3 получаем, что при $h < \min\{h_0, h_1, h_2\}$ в D_h

$$\max_i |\widetilde{u}_i - u| < C\varepsilon, \quad C = \text{const} > 0. \quad \square$$

Покажем, что задачу (9), (10) можно решать методом последовательных приближений. Для этого занумеруем все внутренние узлы сетки D_h следующим образом. Выберем узлы области D_h^+ с наибольшей ординатой и занумеруем их в произвольном порядке, затем выберем узлы с наибольшей ординатой из оставшихся и вновь занумеруем их в произвольном порядке и т. д. Наконец, занумеруем все точки AB также в произвольном порядке. После этого будем нумеровать узлы D_h^-, сначала точки $(1, m)$ в порядке возрастания m, затем точки $(2, m)$ в том же порядке и т. д. Общее количество получившихся точек обозначим через P.

Разрешим каждое уравнение системы (9) относительно значений u_i в одной из точек: уравнения вида (6) и (7) относительно $u_i(k, m)$, а вида (8) — относительно $u_i(x, 0)$. Входящие в эти уравнения значения u_i в точках $\sigma_h \cup AC$ заменим известными значениями согласно (10). Тогда система (9) примет вид

$$u_i(p) = \sum_{j \neq p}^{P} r_{pj} u_i(j) + \sum_{j \neq i}^{n} e_{pj} u_j(p) + s_p, \quad i = \overline{1, n}, \quad p = \overline{1, P}, \tag{25}$$

где через $u_i(p)$ обозначено значение компоненты u_i вектор-функции U в узле с номером p.

Замечание 3. Решение задачи (9), (10) может быть получено итерационным процессом Зейделя, т. е. если обозначить через $u_i^{(m)}(p)$, $i = \overline{1, n}$, $p = \overline{1, P}$, m-е приближение решения системы (25), задать нулевое приближение произвольно, а дальнейшие приближения вычислять по формуле

$$u_i^{(m+1)}(p) = \sum_{j=1}^{p-1} r_{pj} u_i^{(m+1)}(j) + \sum_{j=p+1}^{P} r_{pj} u_i^{(m)}(j) + \sum_{j \neq i}^{n} e_{pj} u_j^{(m)}(p) + s_p, \quad i = \overline{1, n}, \quad p = \overline{1, P}, \tag{26}$$

то при $m \to \infty$ получим $u_i^{(m)} \to u_i$, где U_p — решение системы (25).

Доказательство. Введем функцию "ошибки" m-го приближения

$$v_i^m = u_i - u_i^{(m)}, \quad i = \overline{1, n}.$$

Данная функция является решением однородной системы

$$v_i^{(m+1)}(p) = \sum_{j=1}^{p-1} r_{pj} v_i^{(m+1)}(j) + \sum_{j=p+1}^{P} r_{pj} v_i^{(m)}(j) + \sum_{j \neq i}^{n} e_{pj} v_j^{(m)}(p), \quad i = \overline{1, n}, \quad p = \overline{1, P}.$$

Таким образом, $v_i^{(m)}$ является и m-м приближением решения однородной системы

$$RV(k, m) = 0, \quad (k, m) \in D_h,$$
$$V = 0 \ \text{ на } \ \sigma_h, \quad V = 0 \ \text{ на } \ AC.$$

Предположим

$$v_i^{(m)}(p) \leq M, \quad i = \overline{1, n}, \quad p = \overline{1, P}. \tag{27}$$

Из (7) выразим значение в точке (k, m) через остальные

$$\left(\frac{2K}{h^2} + \frac{2}{l_m l_{m+1}} - c_{ii}\right) u_i(k, m) = u_i(k-1, m) \frac{2K - a_i h}{2h^2} + u_i(k+1, m) \frac{2K + a_i h}{2h^2} +$$
$$+ u_i(k, m+1) \frac{2 + b_i l_{m+1}}{l_{m+1}(l_m + l_{m+1})} + u_i(k, m-1) \frac{2 - b_i l_m}{l_m(l_m + l_{m+1})} + \sum_{j \neq i}^{n} c_{ij} u_j(k, m) - f_i.$$

Значение $v_i^{m+1}(1)$ согласно введенной нумерации точек и однородности системы зависит лишь от значений в узлах $(k-1,m)$, $(k+1,m)$, $(k,m-1)$, которые согласно (27) не превосходят M. Тогда справедлива оценка

$$v_i^{m+1}(1) \le M\left(\frac{2K}{h^2} + \frac{2-b_il_m}{l_m(l_m+l_{m+1})} + \sum_{j\neq i}^{n} c_{ij}\right)\Big/\left(\frac{2K}{h^2} + \frac{2}{l_ml_{m+1}} - c_{ii}\right) =$$
$$= \left[1 - \left(\frac{2+b_il_{m+1}}{l_{m+1}(l_m+l_{m+1})} - \sum_{j=1}^{n} c_{ij}\right)\Big/\left(\frac{2K}{h^2} + \frac{2}{l_ml_{m+1}} - c_{ii}\right)\right]M.$$

Выберем шаг сетки настолько малым, чтобы отношение в квадратных скобках было больше или равно некоторой константе ρ, $0<\rho<1$. Тогда будем иметь оценку

$$v_i^{(m+1)}(1) \le (1-\rho)M. \tag{28}$$

Аналогичная оценка верна для всех p узлов “верхнего” ряда. Теперь рассмотрим $(p+1)$-й узел. Значение $v_i^{(m+1)}(p+1)$ определяется через значение $(m+1)$-й итерации в “верхнем” узле и m-й итерации в остальных. Принимая во внимание (27), (28), получим

$$v_i^{m+1}(p+1) \le M\left(\frac{2K}{h^2} + \frac{2-b_il_m}{l_m(l_m+l_{m+1})} + \sum_{j\neq i}^{n} c_{ij} + \frac{2+b_il_{m+1}}{l_{m+1}(l_m+l_{m+1})}(1-\rho)\right)\Big/\left(\frac{2K}{h^2} + \frac{2}{l_ml_{m+1}} - c_{ii}\right) =$$
$$= \left[1 - \left(\frac{2+b_il_{m+1}}{l_{m+1}(l_m+l_{m+1})}\rho - \sum_{j=1}^{n} c_{ij}\right)\Big/\left(\frac{2K}{h^2} + \frac{2}{l_ml_{m+1}} - c_{ii}\right)\right]M \le$$
$$\le \left[1 - \left(\frac{2+b_il_{m+1}}{l_{m+1}(l_m+l_{m+1})} - \sum_{j=1}^{n} c_{ij}\right)\Big/\left(\frac{2K}{h^2} + \frac{2}{l_ml_{m+1}} - c_{ii}\right)\rho\right]M = (1-\rho^2)M.$$

Так как $1-\rho<M$, то подобные рассуждения справедливы для всех точек “второго” ряда. Продолжая этот процесс, для точек “последнего” в D_h^+ r-го ряда получим оценку

$$v_i^{(m+1)} \le (1-\rho^r)M.$$

Используя последнюю оценку и соотношения на AB, для всех узлов $D_h^+ \cup AB$ получим

$$v_i^{(m+1)} \le (1-\rho^r/2)M. \tag{29}$$

Применить данные рассуждения к точкам области D_h^- не удается, потому что в этом случае из-за выбранного шаблона аппроксимации и нумерации точек в (26) второй суммы не будет. Однако в силу того, что в данном случае $v_i^{(m+1)}$ удовлетворяет разностной системе $RV^{(m+1)}=0$ в D_h^-, $V^{(m+1)}=0$ на AC, $\max\limits_i \max\limits_{D_h} v_i^{(m+1)}$ достигается на AB. Значит, оценка (29) выполняется и в точках D_h^-, а следовательно, и в D_h.

Выполняя данную процедуру для $-v_i^{(m+1)}$, получим

$$|v_i^{(m+1)}| \le (1-\rho^r/2)M.$$

Если теперь произвольно определить нулевое приближение $u_i^{(0)}$, то получим

$$|v_i^{m+1}| \le (1-\rho^r/2)^m M_0,$$

где $M_0 = \max\limits_p \max\limits_i |u_i(p) - u_i^{(0)}(p)|$.

Таким образом доказано, что $v_i^{(m)}(p) \to 0$ при $m\to\infty$. □

Литература

1. Чибрикова Л.И. *Новый метод решения одной краевой задачи смешанного типа* // Учен. зап. Казанск. ун-та. – Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1957. – Т. 117. – № 9. – С. 44–47.
2. Чибрикова Л.И *К решению краевой задачи Трикоми для уравнения* $u_{xx} + \operatorname{sgn} y u_{yy} = 0$ // Учен. зап. Казанск. ун-та. – Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1957. – Т. 117. – № 9. – С. 48–51.
3. Майоров И.В. *Об одной нелинейной системе уравнений смешанного типа* // ДАН СССР. – 1968. – Т. 183. – № 2. – С. 280–283.
4. Ганеев Р.М. *Задача Трикоми для систем уравнений смешанного типа* // Тр. семин. по краев. задачам. – Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1977. – Вып. 13. – С. 42–51.
5. Теут О.М. *Одна краевая задача для системы уравнений в частных производных смешанного типа* // Краев. задачи теории функц. комплек. перемен. – Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1962. – С. 40–58.
6. Жегалов В.И. *Об одной системе смешанного типа высшего порядка* // Изв. вузов. Математика. – 1975. – № 6. – С. 25–35.
7. Сабитов К.Б., Мугафаров М.Ф. *К вопросу о существовании решения задачи Трикоми для одного класса систем уравнений смешанного типа* // Сиб. матем. журн. – 2002. – Т. 43. – № 3. – С. 710–727.
8. Сабитов К.Б. *Принцип максимума для систем уравнений смешанного типа второго порядка* // ДАН СССР. – 1989. – Т. 309. – № 6. – С. 1321–1324.
9. Сабитов К.Б. *К вопросу о существовании решения задачи Трикоми* // Дифференц. уравнения. – 1992. – Т. 28. – № 12. – С. 2092–2101.
10. Халилов З.И. *Решение задачи для уравнения смешанного типа методом сеток* // Докл. АН АзССР. – 1953. – Т. 9. – № 4. – С. 189–190.
11. Карманов В.Г. *Об одной граничной задаче для уравнения смешанного типа* // ДАН СССР. – 1954. – Т. 95. – № 3. – С. 439–442.
12. Ладыженская О.А. *Об одном способе приближенного решения задачи Лаврентьева–Бицадзе* // УМН. – 1954. – Т. 9. – Вып. 4. – С. 187–189.
13. Ладыженская О.А. *Метод конечных разностей в теории уравнений с частными производными* // УМН. – 1957. – Т. 12. – № 5. – С. 123–148.
14. Волков Е.А. *К численному решению задачи Лаврентьева–Бицадзе* // ДАН СССР. – 1955. – Т. 103. – № 5. – С. 755–758.
15. Ивлева А.И., Хе Кан Чер. *Численное решение задачи Трикоми для уравнения Лаврентьева–Бицадзе* // Сб. научн. трудов НИИ КТ по математике. Хабаровск: Изд-во Хабаровск. гос. техн. ун–та, 1997. – Вып. 2. – С. 58–64.
16. Карманов В.Г. *О существовании решений некоторых краевых задач для уравнения смешанного типа* // Изв. АН СССР. Сер. матем. – 1958. – Т. 22. – № 1. – С. 117–134.
17. Филиппов А.Ф. *О разностном методе решения задачи Трикоми* // Изв. АН СССР. Сер. матем. – 1957. – Т. 21. – № 1. – С. 73–88.
18. Ogawa H. *On difference methods for the solution of a Tricomi problem* // Trans. Amer. Math. Soc. – 1961. – V. 100. – № 3. – P. 404–424.
19. Коваленко Л.И. *Разностный метод и единственность обобщенного решения для задачи Трикоми* // ДАН СССР. – 1965. – Т. 162. – № 4. – С. 751–754.
20. Ву Ван Тхоа. *Приближенное решение некоторых краевых задач для уравнения Лаврентьева–Бицадзе*: Автореф. дисс. … канд. физ.-матем. наук. – Инст. кибернетики Аз.ССР. – Баку, 1990. – 15 с.
21. Ивлева А.И. *Исследование разностных схем для задач Трикоми и Геллерстедта*: Автореф. дисс. … канд. физ.-матем. наук. – ВЦ Дальневосточного отделения РАН. – Хабаровск, 1999. – 16 с.
22. Самарский А.А. *Теория разностных схем.* – М.: Наука, 1989. – 616 с.
23. Гафаров Дж.Н., Досиев А.А. *Некоторые замечания о численном решении задачи Трикоми для одного уравнения смешанного типа* // Изв. АН Аз.ССР. Сер. физ.-техн. и мат. наук. –

1980. – № 1. – С. 108–115.
24. Кязимов Т.Г. *О решении двух задач для уравнения Лаврентьева–Бицадзе* // Изв. вузов. Математика. – 1981. – № 10. – С. 41–46.
25. Тагиев Ф.А., Гусейнов А.М. *К численному решению задачи типа Трикоми для уравнения с двумя линиями вырождения с непрерывными коэффициентами* // Дифференц. уравн. – 1990. – Т. 26. – № 7. – С. 1275–1277.
26. Тагиев Ф.А. *Приближенное решение задачи Трикоми для уравнений смешанного типа методом конечных разностей* // Вестн. Моск. ун-та. – Сер. 15. Вычисл. матем. и киберн. – 1992. – № 2. – С. 20–24.
27. Мугафаров М.Ф. *Принцип максимума для одной сеточной системы уравнений гиперболического типа и его применения* // Дифференц. уравн. – 2003. – Т. 39. – № 8. – С. 1137–1139.

Стерлитамакский государственный педагогический институт

Стерлитамакский филиал Академии наук Республики Башкортостан

Поступила
25.11.2003