Известия вузов. Математика *http://old.kpfu.ru/journals/izv_vuz/*
2012, №8, с. 43–52 *Гос. номер статьи по НТЦ "Информрегистр" 0421200123\0075*

М.Х. РУЗИЕВ

ЗАДАЧА С УСЛОВИЕМ ФРАНКЛЯ И БИЦАДЗЕ–САМАРСКОГО НА ЛИНИИ ВЫРОЖДЕНИЯ И НА ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ХАРАКТЕРИСТИКАХ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА

Аннотация. В работе изучается задача с условием Франкля и Бицадзе–Самарского на линии вырождения и на параллельных характеристиках для уравнения смешанного типа с сингулярным коэффициентом. Единственность решения задачи доказывается с помощью принципа экстремума, а существование решения доказывается методом интегральных уравнений.

Ключевые слова: принцип экстремума, единственность решения, существование решения, интегральные уравнения.

УДК: 517.956

1. Введение и постановка задачи

Пусть $D = D^+ \cup D^- \cup I$ — область комплексной плоскости $z = x + iy$, где D^+ — полуплоскость $y > 0$, D^- — конечная область полуплоскости $y < 0$, ограниченная характеристиками AC и BC уравнения

$$(\operatorname{sign} y)|y|^m u_{xx} + u_{yy} + \frac{\beta_0}{y} u_y = 0, \tag{1}$$

исходящими из точек $A(-1, 0)$, $B(1, 0)$, и отрезком AB прямой $y = 0$, $I = \{(x, y) : -1<x<1, y = 0\}$. В уравнении (1) предполагается, что m, β_0 — некоторые действительные числа, удовлетворяющие условиям $m > 0$, $-m/2 < \beta_0 < 1$.

Пусть D_R^+ — конечная область, отсекаемая от области D^+ дугой $A_R B_R$ нормальной кривой

$$x^2 + 4y^{m+2}/(m+2)^2 = R^2, \ -R \le x \le R, \ 0 \le y \le ((m+2)R/2)^{2/(m+2)}, \ \ A_R(-R, 0), \ B_R(R, 0).$$

Введем обозначения: $I_1 = \{(x, y) : -\infty < x < -1, \ y = 0\}$, $I_2 = \{(x, y) : 1 < x < \infty, \ y = 0\}$, C_0 (C_1) — точки пересечения характеристики AC (BC) с характеристикой, исходящей из точки $E(c, 0)$, где $c \in I$ — произвольное фиксированное число, $D_R = D_R^+ \cup D^-$, D_R — подобласть неограниченной области D.

Рассмотрим диффеоморфизм $q(x) \in C^1[c, 1]$, переводящий отрезок $[c, 1]$ в отрезок $[-1, c]$, причем $q'(x) < 0$, $q(c) = c$, $q(1) = -1$. Примером такой функции является $q(x) = p - kx$, где $k = (1 + c)/(1 - c)$, $p = 2c/(1 - c)$, $p - k = -1$, $p - kc = c$.

В работе [1] в ограниченной области была исследована задача, где характеристика AC была произвольным образом разбита на два куска (AC_0, C_0C) и на первом куске задавалось условие Трикоми ([2], с. 29), а на втором куске и параллельной ей характеристике — условие Бицадзе–Самарского [3].

Поступила 31.03.2011

Данная работа, посвященная исследованию задачи в неограниченной области, отличается от [1] тем, что здесь характеристика AC_0 освобождена от краевого условия (условия Трикоми), которое эквивалентно заменено нелокальным условием Франкля [4]–[10] на отрезке линии вырождения.

Задача FBS (**Франкля, Бицадзе–Самарского**). В области D требуется найти функцию $u(x,y)$, удовлетворяющую следующим условиям:

1) функция $u(x,y)$ непрерывна в любой подобласти $\overline{D}_R$ неограниченной области D;

2) $u(x,y)$ принадлежит пространству $C^2(D^+)$ и удовлетворяет уравнению (1) в этой области;

3) $u(x,y)$ является обобщенным решением класса R_1 ([7], с. 35) в области D^-;

4) выполняются равенства

$$\lim_{R\to\infty} u(x,y)=0, \quad y\geqslant 0, \quad R^2=x^2+4y^{m+2}/(m+2)^2; \tag{2}$$

5) $u(x,y)$ удовлетворяет краевым условиям

$$u(x,y)|_{y=0}=\tau_i(x) \ \ \forall x\in \overline{I}_i, \quad i=1,2, \tag{3}$$

$$(1+x)^\beta D^{1-\beta}_{-1,x}u[\theta(x)]=\mu(x)(x-c)^\beta D^{1-\beta}_{c,x}u[\theta^*(x)]+\psi(x), \quad c<x<1, \tag{4}$$

$$u(q(x),0)=\mu_0 u(x,0)+f(x), \quad c\leqslant x\leqslant 1, \tag{5}$$

и условию сопряжения

$$\lim_{y\to+0} y^{\beta_0}u_y=\lim_{y\to-0}(-y)^{\beta_0}u_y, \quad x\in I\setminus\{c\}. \tag{6}$$

Пределы (6) при $x=\pm1$, $x=c$ могут иметь особенности порядка ниже $1-2\beta$, где $\beta=(m+2\beta_0)/(2(m+2))$, $f(x)$, $\psi(x)$, $\tau_i(x)$ — заданные функции, причем $f(x)\in C[c,1]\cap C^{1,\alpha_0}(c,1)$, $f(c)=0$, $f(1)=0$, $\mu(x)$, $\psi(x)\in C^1[c,1]\cap C^{1,\delta_0}(c,1)$, $\mu_0=\mathrm{const}$, функции $\tau_i(x)$, $i=1,2$, удовлетворяют условию Гёльдера на любых отрезках $[-N,-1]$, $[1,N]$, $N>1$, и для достаточно больших $|x|$ удовлетворяют неравенству $|\tau_i(x)|\leq M|x|^{-\delta}$, где δ, M — положительные постоянные, $D^{1-\beta}_{-1,x}$ и $D^{1-\beta}_{c,x}$ — операторы дробного дифференцирования в смысле Римана–Лиувилля [11], точками пересечения характеристик C_0C (EC_1) с характеристикой, исходящей из точки $(x_0,0)$, $x_0\in(c,1)$, являются

$$\theta(x_0)=\frac{x_0-1}{2}-i\left(\frac{m+2}{4}(x_0+1)\right)^{2/(m+2)}, \quad \theta^*(x_0)=\frac{x_0+c}{2}-i\left(\frac{m+2}{4}(x_0-c)\right)^{2/(m+2)}.$$

Отметим, что условия (4) и (5) соответственно являются аналогами условий Бицадзе–Самарского [3] и Франкля ([4]–[7]).

2. Единственность решения задачи FBS

Имеет место

Теорема 1. *Пусть выполнены условия* $\tau_i(x)\equiv 0$, $i=1,2$, $\psi(x)\equiv0$, $f(x)\equiv 0$, $0<\mu_0<1$, $\mu(x)\leqslant 0$. *Тогда задача* FBS *в силу* (2) *имеет лишь тривиальное решение.*

Доказательство. По формуле Дарбу ([12], с. 277), дающей в области D^- решение видоизмененной задачи Коши с начальными данными $\lim\limits_{y\to-0}u(x,y)=\tau(x)$, $x\in\overline{I}$, $\lim\limits_{y\to-0}(-y)^{\beta_0}u_y(x,y)=\nu(x)$, $x\in I$, из краевого условия (4) после несложных вычислений получим

$$\nu(x)=\gamma\omega(x)\left[D^{1-2\beta}_{-1,x}\tau(x)-\mu(x)D^{1-2\beta}_{c,x}\tau(x)\right]+\Psi(x), \quad x\in(c,1), \tag{7}$$

где

$$\Psi(x) = -\gamma\frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(2\beta)}\omega(x)\psi(x), \quad \omega(x) = 1/(1-\mu(x)), \quad \gamma = \frac{2\Gamma(2\beta)\Gamma(1-\beta)}{\Gamma(\beta)\Gamma(1-2\beta)}\left(\frac{m+2}{4}\right)^{2\beta},$$

$\Gamma(z)$ — гамма-функция ([13], с. 4).

Равенство (7) является первым функциональным соотношением между неизвестными функциями $\tau(x)$ и $\nu(x)$, принесенным на интервал $(c,1)$ оси $y=0$ из области D^-.

Теперь докажем, что если

$$\tau_i(x) \equiv 0, \quad i=1,2, \quad \psi(x)\equiv 0, \quad f(x)\equiv 0, \quad 0<\mu_0<1, \quad \mu(x)\leqslant 0, \tag{8}$$

то решение задачи FBS в области $D^+\cup I_1\cup \overline{I}\cup I_2$ в силу (2) тождественно равно нулю.

Пусть (x_0,y_0) — точка положительного максимума функции $u(x,y)$ в области $\overline{D}_R^+$. В силу (2) $\forall\varepsilon>0$ существует такое $R_0=R_0(\varepsilon)$, что при $R>R_0(\varepsilon)$

$$|u(x,y)|<\varepsilon, \quad (x,y)\in A_RB_R. \tag{9}$$

Пусть $u(x,0)=\tau(x)$, $x\in\overline{I}$. Перепишем условие (5) в виде

$$\tau(q(x)) = \mu_0\tau(x)+f(x), \quad x\in[c,1]. \tag{10}$$

Отсюда при $x=c$, где $f(x)=0$, имеем $\tau(q(c))=\mu_0\tau(c)$. Тогда в силу равенства $q(c)=c$ получим $\tau(c)(1-\mu_0)=0$, т. е. $\tau(c)=0$.

По принципу Хопфа ([12], с. 25) функция $u(x,y)$ не достигает своего положительного максимума и отрицательного минимума во внутренних точках области $\overline{D}_R^+$. В силу (8) (где $0<\mu_0<1$) из (10) (где $f(x)\equiv 0$) следует, что их также нет и в интервале $(-1,c)$ оси $y=0$. Допустим, что искомая функция достигает своего положительного максимума и отрицательного минимума в точках интервала $(c,1)$ оси $y=0$.

Пусть $(x_0,0)$ (где $x_0\in(c,1)$) — точка положительного максимума (отрицательного минимума) функции $u(x,0)=\tau(x)$. Тогда ([7], с. 74)

$$\nu(x_0)<0 \quad (\nu(x_0)>0). \tag{11}$$

Хорошо известно, что в точке положительного максимума (отрицательного минимума) функции $\tau(x)$ для операторов дробного дифференцирования имеет место неравенство $D^{1-2\beta}_{a,x_0}\tau(x)>0$ ($D^{1-2\beta}_{a,x_0}\tau(x)<0$). Отсюда в силу (7) (где $\Psi(x)\equiv 0$) имеем ([7], с. 21)

$$\nu(x_0)>0 \quad (\nu(x_0)<0). \tag{12}$$

Неравенства (11) и (12) противоречат условию сопряжения (6), поэтому $x_0\notin(c,1)$. Следовательно, нет точки положительного максимума (отрицательного минимума) функции $u(x,y)$ на интервале AB. Пусть $R>R_0$. Из принципа Хопфа и предыдущих рассуждений получаем $(x_0,y_0)\in A_RB_R$ и $|u(x_0,y_0)|<\varepsilon$ в силу (9). Следовательно, $|u(x,y)|<\varepsilon$ $\forall(x,y)\in\overline{D}_R^+$. Отсюда ввиду произвольности ε при $R\to+\infty$ заключаем, что $u(x,y)\equiv 0$ в области $D^+\cup I_1\cup\overline{I}\cup I_2$. Тогда

$$\lim_{y\to+0}u(x,y)=0, \quad x\in\overline{I}, \quad \lim_{y\to+0}y^{\beta_0}u_y=0, \quad x\in I. \tag{13}$$

С учетом (13), в силу непрерывности решения в области $\overline{D}_R^+$ и условия сопряжения (6), восстанавливая искомую функцию $u(x,y)$ в области D^- как решение видоизмененной задачи Коши с однородными данными, получим $u(x,y)\equiv 0$ в области $\overline{D}^-$. □

3. Существование решения задачи FBS

Справедлива

Теорема 2. *Пусть выполнены условия* $q(x) = p - kx$, $0 < \mu_0 < 1$, $\mu(x) \leqslant 0$, $\mu_0 k^{\frac{1}{2}-3\alpha}(1 + 2\sin(\beta\pi)\omega(c)) < 1$, $\beta_0 > -\frac{m-1}{3}$, *где* $p = 2c/(1-c)$, $k = (1+c)/(1-c)$, $\omega(c) = 1/(1-\mu(c))$, $\alpha = (1-2\beta)/4$. *Тогда решение задачи* FBS *существует.*

Доказательство. Решение задачи Дирихле, удовлетворяющее условиям (3) и $u(x,0) = \tau(x)$, $x \in \overline{I}$, представимо в виде

$$u(x,y) = k_2(1-\beta_0)y^{1-\beta_0}\int_{-1}^{1}\tau(t)(r_0^2)^{\beta-1}dt + F_1(x,y), \tag{14}$$

где

$$r_0^2 = (x-t)^2 + \frac{4}{(m+2)^2}y^{m+2},$$

$$F_1(x,y) = k_2(1-\beta_0)y^{1-\beta_0}\left[\int_{-\infty}^{-1}\tau_1(t)(r_0^2)^{\beta-1}dt + \int_{1}^{\infty}\tau_2(t)(r_0^2)^{\beta-1}dt\right],$$

$$k_2 = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{4}{m+2}\right)^{2-2\beta}\frac{\Gamma^2(1-\beta)}{\Gamma(2-2\beta)}.$$

Дифференцируя (14) по y и учитывая равенства

$$\frac{\partial}{\partial y}\left\{y^{1-\beta_0}\left[(x-t)^2 + \frac{4}{(m+2)^2}y^{m+2}\right]^{\beta-1}\right\} = \\ = \frac{m+2}{2}y^{-\beta_0}\frac{\partial}{\partial t}\left\{(x-t)\left[(x-t)^2 + \frac{4}{(m+2)^2}y^{m+2}\right]^{\beta-1}\right\},$$

получим

$$\frac{\partial u}{\partial y} = k_2(1-\beta_0)\frac{m+2}{2}y^{-\beta_0}\times \\ \times\int_{-1}^{1}\tau(t)\frac{\partial}{\partial t}\left\{(x-t)\left[(x-t)^2 + \frac{4}{(m+2)^2}y^{m+2}\right]^{\beta-1}\right\}dt + \frac{\partial F_1(x,y)}{\partial y}. \tag{15}$$

Выполнив операцию интегрирования по частям в правой части равенства (15), с учетом $\tau(-1) = 0$, $\tau(1) = 0$ после несложных вычислений имеем

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -k_2(1-\beta_0)\frac{m+2}{2}y^{-\beta_0}\int_{-1}^{1}\tau'(t)(x-t)\left[(x-t)^2 + \frac{4}{(m+2)^2}y^{m+2}\right]^{\beta-1}dt + \frac{\partial F_1(x,y)}{\partial y}. \tag{16}$$

Умножая обе части равенства (16) на y^{β_0}, затем переходя к пределу при $y \to +0$, получим

$$\nu(x) = -k_2(1-\beta_0)\frac{m+2}{2}\int_{-1}^{1}\frac{(x-t)\tau'(t)dt}{|x-t|^{2-2\beta}} + \Phi(x), \quad x \in (-1,1), \tag{17}$$

где

$$\Phi(x) = \lim_{y\to+0}y^{\beta_0}\frac{\partial F_1(x,y)}{\partial y} = k_2(1-\beta_0)^2\left(\int_{-\infty}^{-1}\frac{\tau_1(t)dt}{(x-t)^{2-2\beta}} + \int_{1}^{\infty}\frac{\tau_2(t)dt}{(t-x)^{2-2\beta}}\right).$$

Второе функциональное соотношение (17) между неизвестными функциями $\nu(x)$ и $\tau(x)$ (принесенными на интервал I оси $y=0$ из верхней полуплоскости) справедливо для всего промежутка I.

Разбивая $(-1,1)$ на промежутки $(-1,c)$ и $(c,1)$, а затем в интегралах с пределом $(-1,c)$ сделав замену переменного интегрирования $t=q(s)=p-ks$, с учетом равенства (10) из (17) имеем

$$\nu(x)=-k_2(1-\beta_0)\frac{m+2}{2}\Bigg[-\mu_0\int_c^1\frac{\tau'(s)ds}{(x-q(s))^{1-2\beta}}-\int_c^1\frac{f'(s)ds}{(x-q(s))^{1-2\beta}}+$$
$$+\int_c^x\tau'(t)(x-t)^{2\beta-1}dt-\int_x^1\tau'(t)(t-x)^{2\beta-1}dt\Bigg]+\Phi(x),\quad x\in(c,1).\qquad(18)$$

С учетом (6), исключая функцию $\nu(x)$ из (7) и (18), получим

$$\frac{-2\gamma\omega(x)}{k_2(1-\beta_0)(m+2)}\left[D^{1-2\beta}_{-1,x}\tau(x)-\mu(x)D^{1-2\beta}_{c,x}\tau(x)\right]+F_0(x)=$$
$$=-\mu_0\int_c^1\frac{\tau'(s)ds}{(x-q(s))^{1-2\beta}}+\int_c^x\frac{\tau'(t)dt}{(x-t)^{1-2\beta}}-\int_x^1\frac{\tau'(t)dt}{(t-x)^{1-2\beta}},\quad x\in(c,1),\qquad(19)$$

где

$$F_0(x)=-\frac{2(\Psi(x)-\Phi(x))}{k_2(1-\beta_0)(m+2)}+\int_c^1\frac{f'(s)ds}{(x-q(s))^{1-2\beta}}.$$

Применив оператор $\Gamma(1-2\beta)D^{2\beta-1}_{c,x}$ к обеим частям равенства (19) и выполнив некоторые преобразования, получим сингулярное интегральное уравнение относительно неизвестной функции $\tau(x)$

$$\tau(x)-\lambda\int_c^1\left(\frac{x-c}{t-c}\right)^{1-2\beta}\frac{\tau(t)dt}{t-x}=$$
$$=-\lambda\mu_0(1+2\sin(\pi\beta)\omega(x))\int_c^1\left(\frac{x-c}{c-q(t)}\right)^{1-2\beta}\frac{\tau(t)q'(t)dt}{x-q(t)}+R[\tau]+F_2(x),\quad x\in[c,1],\qquad(20)$$

где

$$R[\tau]=-2\mu_0\lambda\sin(\beta\pi)\Bigg\{\frac{\omega(c)-\omega(x)}{(x-c)^{2\beta}}\int\limits_c^1\frac{\tau(t)q'(t)dt}{(c-q(t))^{1-2\beta}}+$$
$$+\int_c^1\tau(t)q'(t)dt\int_c^x\left[\frac{\omega'(s)}{(x-s)^{2\beta}}+\frac{2\beta\,(\omega(s)-\omega(x))}{(x-s)^{1+2\beta}}\right]\frac{ds}{(s-q(t))^{1-2\beta}}\Bigg\}$$

— регулярный оператор,

$$F_2(x)=-\frac{\pi\lambda}{\cos(\beta\pi)}F_1(x)+\lambda\Gamma(1-2\beta)D^{2\beta-1}_{c,x}F_0(x),$$

$$F_1(x)=\frac{\sin(2\beta\pi)}{\pi}\Bigg\{\frac{\omega(c)-\omega(x)}{(x-c)^{2\beta}}\int_c^1\frac{f(t)q'(t)dt}{(c-q(t))^{1-2\beta}}+\int_c^1 f(t)q'(t)dt\times$$
$$\times\int_c^x\left[\frac{\omega'(s)}{(x-s)^{2\beta}}+\frac{2\beta\,(\omega(s)-\omega(x))}{(x-s)^{1+2\beta}}\right]\frac{ds}{(s-q(t))^{1-2\beta}}+\omega(x)\int_c^1\left(\frac{x-c}{c-q(t)}\right)^{1-2\beta}\frac{f(t)q'(t)dt}{x-q(t)}\Bigg\},$$

$F_2(c)=0$, $\lambda=\cos(\beta\pi)/(\pi(1+\sin(\beta\pi)))$, $F_2(x)\in C[c,1]\cap C^{0,\overline{\gamma}}(c,1)$, $\overline{\gamma}>1-\beta$.

Интегральный оператор правой части (20) не является регулярным, так как подинтегральное выражение при $x=c$, $t=c$ имеет изолированную особенность первого порядка, поэтому это слагаемое в (20) выделено отдельно.

Уравнение (20) примет вид

$$\tau(x)-\lambda\int_c^1\left(\frac{x-c}{t-c}\right)^{1-2\beta}\frac{\tau(t)dt}{t-x}=g_0(x),\quad x\in[c,1], \tag{21}$$

где

$$g_0(x)=-\lambda\mu_0(1+2\sin(\beta\pi)\omega(x))\int_c^1\left(\frac{x-c}{c-q(t)}\right)^{1-2\beta}\frac{\tau(t)q'(t)dt}{x-q(t)}+R[\tau]+F_2(x). \tag{22}$$

Полагая $(x-c)^{2\beta-1}\tau(x)=\rho(x)$, $(x-c)^{2\beta-1}g_0(x)=g_1(x)$, уравнение (21) запишем в виде

$$\rho(x)-\lambda\int_c^1\frac{\rho(t)dt}{t-x}=g_1(x). \tag{23}$$

Решение уравнения (23) будем искать в классе функций, удовлетворяющих условию Гёльдера на $(c,1)$, ограниченных при $x\to 1$, и при $x\to c$ возможно обращающихся в бесконечность порядка меньше $1-2\beta$. В этом классе индекс уравнения (23) равен нулю, а его решение методом Карлемана–Векуа ([14], с. 320) находится в явном виде

$$\rho(x)=\frac{1+\sin(\beta\pi)}{2}g_1(x)+\frac{\cos(\beta\pi)}{2\pi}\left(\frac{1-x}{x-c}\right)^{(1-2\beta)/4}\int_c^1\left(\frac{t-c}{1-t}\right)^{(1-2\beta)/4}\frac{g_1(t)dt}{t-x}.$$

Отсюда, возвращаясь к прежним функциям, имеем

$$\tau(x)=\cos^2(\pi\alpha)g_0(x)+\frac{\sin(2\pi\alpha)}{2\pi}\int_c^1\left(\frac{(1-x)(x-c)^3}{(1-t)(t-c)^3}\right)^{\alpha}\frac{g_0(t)dt}{t-x}, \tag{24}$$

где $\alpha=(1-2\beta)/4$.

Подставляя (22) в (24), после некоторых преобразований получим

$$\begin{aligned}\tau(x)=-\lambda\mu_0(1+2\sin(\beta\pi)\omega(x))\cos^2(\pi\alpha)\int_c^1\left(\frac{x-c}{c-q(t)}\right)^{4\alpha}\frac{\tau(t)q'(t)dt}{x-q(t)}-\\ -\lambda\mu_0\frac{\sin(2\pi\alpha)}{2\pi}(1-x)^{\alpha}(x-c)^{3\alpha}\int_c^1\frac{\tau(s)q'(s)ds}{(c-q(s))^{4\alpha}}\int_c^1\left(\frac{t-c}{1-t}\right)^{\alpha}\frac{(1+2\sin(\beta\pi)\omega(t))dt}{(t-q(s))(t-x)}+\\ +R_1[\tau]+F_3(x),\quad x\in[c,1],\end{aligned} \tag{25}$$

где

$$R_1[\tau]=\cos^2(\pi\alpha)R[\tau]+\frac{\sin(2\pi\alpha)}{2\pi}\int_c^1\left(\frac{1-x}{1-t}\right)^{\alpha}\left(\frac{x-c}{t-c}\right)^{3\alpha}\frac{R[\tau]dt}{t-x},$$

$$F_3(x)=\cos^2(\pi\alpha)F_2(x)+\frac{\sin(2\pi\alpha)}{2\pi}\int_c^1\left(\frac{1-x}{1-t}\right)^{\alpha}\left(\frac{x-c}{t-c}\right)^{3\alpha}\frac{F_0(t)dt}{t-x},$$

$F_3(c)=0$.

Уравнение (25) преобразуем к виду

$$\tau(x) = -\lambda\mu_0(1+2\sin(\beta\pi)\omega(x))\cos^2(\pi\alpha)\int_c^1\left(\frac{x-c}{c-q(t)}\right)^{4\alpha}\frac{\tau(t)q'(t)dt}{x-q(t)}-$$
$$-\lambda\mu_0\frac{\sin(2\pi\alpha)}{2\pi}(1+2\sin(\beta\pi)\omega(x))(1-x)^{\alpha}(x-c)^{3\alpha}\times$$
$$\times\int_c^1\frac{\tau(s)q'(s)ds}{(c-q(s))^{4\alpha}}\int_c^1\left(\frac{t-c}{1-t}\right)^{\alpha}\frac{dt}{(t-q(s))(t-x)}+R_2[\tau]+F_3(x), \quad (26)$$

где

$$R_2[\tau] = R_1[\tau]-\lambda\mu_0\frac{\sin(2\pi\alpha)\sin(\beta\pi)(1-x)^{\alpha}(x-c)^{3\alpha}}{\pi}\times$$
$$\times\int_c^1\frac{\tau(s)q'(s)ds}{(c-q(s))^{4\alpha}}\int_c^1\left(\frac{t-c}{1-t}\right)^{\alpha}\frac{\omega(t)-\omega(x)}{(t-x)(t-q(s))}dt$$

— регулярный оператор.

Уравнение (26) в силу $q(x) = p - kx$, где $k = (1+c)/(1-c)$, $p = 2c/(1-c)$, запишем в виде

$$\tau(x) = \lambda\mu_0(1+2\sin(\beta\pi)\omega(x))k^{1-4\alpha}\cos^2(\pi\alpha)\int_c^1\left(\frac{x-c}{t-c}\right)^{4\alpha}\frac{\tau(t)dt}{x+kt-p}+$$
$$+\lambda\mu_0k^{1-4\alpha}\frac{\sin(2\pi\alpha)}{2\pi}(1+2\sin(\beta\pi)\omega(x))(1-x)^{\alpha}(x-c)^{3\alpha}\int_c^1\frac{\tau(s)ds}{(s-c)^{4\alpha}}\times$$
$$\times\int_c^1\left(\frac{t-c}{1-t}\right)^{\alpha}\frac{dt}{(t-x)(t+ks-p)}+R_2[\tau]+F_3(x), \quad x\in[c,1]. \quad (27)$$

В (27) вычислим внутренний интеграл

$$A(x,s) = \int_c^1\left(\frac{t-c}{1-t}\right)^{\alpha}\frac{dt}{(t-x)(t+ks-p)}.$$

Разлагая рациональный множитель подинтегрального выражения на простые дроби и выполнив несложные вычисления, имеем

$$A(x,s) = \frac{1}{x+ks-p}\Bigg[-\pi\operatorname{ctg}(\pi\alpha)\frac{(x-c)^{\alpha}}{(1-x)^{\alpha}}-\Gamma(-\alpha)\Gamma(1+\alpha)-$$
$$-\frac{1-c}{1+ks-p}\Gamma(1+\alpha)\Gamma(1-\alpha)F\left(1-\alpha,1,2;\frac{1-c}{1+ks-p}\right)\Bigg], \quad (28)$$

где $F(a,b,c;z)$ — гипергеометрическая функция Гаусса ([13], с. 8).

Подставляя (28) в (27), после несложных вычислений получим

$$\tau(x) = \lambda\int_c^1\frac{K(x,s)\tau(s)ds}{x+ks-p}+R_2[\tau]+F_3(x), \quad x\in[c,1], \quad (29)$$

где

$$K(x,s) = -\mu_0k^{1-4\alpha}(1+2\sin(\beta\pi)\omega(x))\frac{\sin(2\pi\alpha)}{2\pi}\frac{(1-x)^{\alpha}(x-c)^{3\alpha}}{(s-c)^{4\alpha}}\times$$
$$\times\left[\Gamma(-\alpha)\Gamma(1+\alpha)+\frac{1-c}{1+ks-p}\Gamma(1+\alpha)\Gamma(1-\alpha)F\left(1-\alpha,1,2;\frac{1-c}{1+ks-p}\right)\right].$$

Применив формулу Больца ([13], с. 11) для гипергеометрической функции $F(1-\alpha, 1, 2; \frac{1-c}{1+ks-p})$ и учитывая формулы $F(a,b,b;z) = (1-z)^{-a}$ ([13], с. 13), $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$, $\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}$ ([13], с. 5), запишем

$$K(x,s) = \mu_0 k^{1-3\alpha}\left(1 + 2\sin(\beta\pi)\omega(x)\right)\cos(\pi\alpha)\left(\frac{1-x}{1-q(s)}\right)^{\alpha}\left(\frac{x-c}{s-c}\right)^{3\alpha}. \quad (30)$$

Подставляя (30) в (29), получим

$$\tau(x) = \lambda\mu_0 k^{1-3\alpha}(1 + 2\sin(\beta\pi)\omega(x))\cos(\pi\alpha)\int_c^1 \left(\frac{1-x}{1-q(s)}\right)^{\alpha}\left(\frac{x-c}{s-c}\right)^{3\alpha}\frac{\tau(s)ds}{x+ks-p} + \\ + R_2[\tau] + F_3(x), \quad x \in [c,1]. \quad (31)$$

В (31) выделяя характеристическую часть, имеем

$$\tau(x) = \lambda\mu_0 k^{1-3\alpha}(1 + 2\sin(\beta\pi)\omega(c))\cos(\pi\alpha)\int_c^1 \left(\frac{x-c}{s-c}\right)^{3\alpha}\frac{\tau(s)ds}{x+ks-p} + \\ + R_3[\tau] + F_3(x), \quad x \in [c,1], \quad (32)$$

где

$$R_3[\tau] = \lambda\mu_0 k^{1-3\alpha}\cos(\pi\alpha)\int_c^1 \left(\frac{x-c}{s-c}\right)^{3\alpha}\frac{\tau(s)ds}{x+ks-p}\times \\ \times\left[\left(\frac{1-x}{1-q(s)}\right)^{\alpha}(1 + 2\sin(\beta\pi)\omega(x)) - (1 + 2\sin(\beta\pi)\omega(c))\right]ds + R_2[\tau]$$

— регулярный оператор.

Уравнение (32) запишем в виде

$$\tau(x) = \lambda\mu_0 k^{1-3\alpha}(1 + 2\sin(\beta\pi)\omega(c))\cos(\pi\alpha)\times \\ \times\int_c^1 \left(\frac{x-c}{s-c}\right)^{3\alpha}\frac{\tau(s)ds}{(s-c)\left(k + \frac{x-c}{s-c}\right)} + R_3[\tau] + F_3(x), \quad x \in [c,1]. \quad (33)$$

В (33) делая замену переменных $x = c + (1-c)e^{-\xi}$, $s = c + (1-c)e^{-t}$ и обозначая $\rho(\xi) = \tau\left(c + (1-c)e^{-\xi}\right)e^{(3\alpha-\frac{1}{2})\xi}$, получим

$$\rho(\xi) = \lambda\mu_0 k^{1-3\alpha}(1 + 2\sin(\beta\pi)\omega(c))\cos(\pi\alpha)\int_0^{\infty}\frac{\rho(t)dt}{ke^{\frac{\xi-t}{2}} + e^{-\frac{\xi-t}{2}}} + \\ + R_4[\rho(\xi)] + F_4(\xi), \quad \xi \in (0,\infty), \quad (34)$$

где $R_4[\rho(\xi)] = R_3[\tau(c + (1-c)e^{-\xi})]e^{(3\alpha-\frac{1}{2})\xi}$, $F_4(\xi) = F_3(c + (1-c)e^{-\xi})e^{(3\alpha-\frac{1}{2})\xi}$.

Заметим, что в силу условия $\beta_0 > -\frac{m-1}{3}$ имеет место неравенство $3\alpha - \frac{1}{2} < 0$.

Введем обозначение $H(\zeta) = \lambda\mu_0 k^{1-3\alpha}(1 + 2\sin(\beta\pi)\omega(c))\cos(\pi\alpha)\frac{1}{ke^{\zeta/2}+e^{-\zeta/2}}$. Тогда уравнение (34) запишем в виде

$$\rho(\xi) = \int_0^{\infty} H(\xi - t)\rho(t)dt + R_4[\rho(\xi)] + F_4(\xi), \quad \xi \in (0,\infty). \quad (35)$$

Уравнение (35) является интегральным уравнением Винера–Хопфа ([15], с. 55). Функции $H(\xi)$, $F_4(\xi)$ имеют показательный порядок убывания на бесконечности, причем $H'(\xi) \in$

$C(0,\infty)$, $F_4(\xi) \in H_{\alpha_1}(0,\infty)$. Следовательно, $H(\xi), F_4(\xi) \in L_2 \cap H_{\alpha_1}$, а решение уравнения (35) ищется в классе $\{0\}$ ([15], с. 12).

Уравнение (35) с помощью преобразования Фурье, подобно известному характеристическому особому интегральному уравнению с ядром Коши, приводится к краевой задаче Римана и тем самым решается в квадратурах.

Если сингулярность ядра Коши $\frac{1}{t-\xi}$ заключается в разрыве при $t = \xi$, то сингулярность ядра $H(t-\xi)$ интегрального уравнения типа свертки вызвана неограниченностью промежутка интегрирования, и это ядро не убывает, если двигаться к бесконечности вдоль прямых $t = \xi + \mathrm{const}$.

Теоремы Фредгольма для интегральных уравнений типа свертки будут выполняться лишь в одном частном случае, когда индекс этих уравнений равен нулю.

Вычислим индекс выражения $1 - H^\wedge(\xi)$, где

$$H^\wedge(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi t} H(t)dt = \lambda\mu_0 k^{1-3\alpha}(1 + 2\sin(\beta\pi)\omega(c))\cos(\pi\alpha)\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\xi t}dt}{ke^{t/2} + e^{-t/2}}. \tag{36}$$

С помощью теории вычетов нетрудно показать, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\xi t}dt}{ke^{t/2} + e^{-t/2}} = \frac{\pi e^{-i\xi \ln k}}{\sqrt{k}\,\mathrm{ch}(\pi\xi)}. \tag{37}$$

Подставляя (37) в (36), с учетом $\pi\lambda\cos(\pi\alpha) = \pi\frac{\cos(\beta\pi)}{\pi(1+\sin(\beta\pi))}\cos(\alpha\pi) = \sin(\alpha\pi)$ имеем

$$H^\wedge(\xi) = \mu_0 k^{\frac{1}{2}-3\alpha}(1 + 2\sin(\beta\pi)\omega(c))\sin(\pi\alpha)\frac{e^{-i\xi\ln k}}{\mathrm{ch}(\pi\xi)}.$$

Так как

$$\mathrm{Re}\, H^\wedge(\xi) = \mathrm{Re}\left(\mu_0 k^{\frac{1}{2}-3\alpha}(1 + 2\sin(\beta\pi)\omega(c))\sin(\pi\alpha)\frac{e^{-i\xi\ln k}}{\mathrm{ch}(\pi\xi)}\right) =$$
$$= \mu_0\sin(\alpha\pi)k^{\frac{1}{2}-3\alpha}(1 + 2\sin(\beta\pi)\omega(c))\cos(\xi\ln k)\frac{1}{\mathrm{ch}(\pi\xi)} < \mu_0 k^{\frac{1}{2}-3\alpha}(1 + 2\sin(\beta\pi)\omega(c)) < 1$$

в силу условия

$$\mu_0 k^{\frac{1}{2}-3\alpha}(1 + 2\sin(\beta\pi)\omega(c)) < 1,$$

то $\mathrm{Re}\,(1 - H^\wedge(\xi)) > 0$. Следовательно, индекс уравнения (35) $\chi = -\,\mathrm{Ind}\,(1 - H^\wedge(\xi)) = 0$, т. е. изменение аргумента выражения $1 - H^\wedge(\xi)$ на действительной оси, выраженное в полных оборотах, равно нулю ([15], с. 56). Следовательно, уравнение (35) редуцируется к интегральному уравнению Фредгольма второго рода, однозначная разрешимость которого следует из единственности решения задачи FBS. □

Литература

[1] Мирсабуров М. *Краевая задача для одного класса уравнений смешанного типа с условием Бицадзе–Самарского на параллельных характеристиках*, Дифференц. уравнения **37** (9), 1281–1284 (2001).

[2] Трикоми Ф. *О линейных уравнениях в частных производных второго порядка смешанного типа* (Гостехиздат, М.–Л., 1947).

[3] Бицадзе А.В., Самарский А.А. *О некоторых простейших обобщениях линейных эллиптических краевых задач*, ДАН СССР **185** (4), 739–740 (1969).

[4] Франкль Ф.И. *Обтекание профилей потоком дозвуковой скорости со сверхзвуковой зоной, оканчивающейся прямым скачком уплотнения*, ПММ **20** (2), 196–202 (1956).

[5] Линь Цзянь-бин. *О некоторых задачах Франкля*, Вестн. ЛГУ. Сер. матем.-мех. и астр., № 3, 28–39 (1961).

[6] Девингталь Ю.В. *О существовании и единственности решения одной задачи Ф.И. Франкля*, Изв. вузов. Матем., № 2, 39–51 (1958).
[7] Салахитдинов М.С., Мирсабуров М. *Нелокальные задачи для уравнений смешанного типа с сингулярными коэффициентами* (Изд-во НУУз, Ташкент, 2005).
[8] Салахитдинов М.С., Мирсабуров М. *Задача с нелокальным граничным условием на характеристике для одного класса уравнений смешанного типа*, Матем. заметки **86** (5), 748–760 (2009).
[9] Мирсабуров М., Рузиев М.Х. *Об одной краевой задаче для одного класса уравнений смешанного типа в неограниченной области*, Дифференц. уравнения **47** (1), 112–119 (2011).
[10] Рузиев М.Х. *О нелокальной задаче для уравнения смешанного типа с сингулярным коэффициентом в неограниченной области*, Изв. вузов. Матем., № 11, 41–49 (2010).
[11] Нахушев А.М. *О некоторых краевых задачах для гиперболических уравнений и уравнений смешанного типа*, Дифференц. уравнения **5** (1), 44–59 (1969).
[12] Бицадзе А.В. *Некоторые классы уравнений в частных производных* (Наука, М., 1981).
[13] Смирнов М.М. *Уравнения смешанного типа* (Высш. школа, М., 1985).
[14] Мусхелишвили Н.И. *Сингулярные интегральные уравнения. Граничные задачи теории функций и некоторые их приложения к математической физике* (Наука, М., 1968).
[15] Гахов Ф.Д., Черский Ю.И. *Уравнения типа свертки* (Наука, М., 1978).

М.Х.Рузиев

старший научный сотрудник, отдел дифференциальных уравнений,
Институт математики и информационных технологий АН РУз,
ул. Дурман йули, д. 29, г. Ташкент, 100125, Республика Узбекистан,

`e-mail:` mruziev@mail.ru

M.Kh. Ruziev

A problem with the Frankl and Bitsadze–Samarskii condition on the line of degeneracy and on parallel characteristics for a mixed-type equation

Abstract. In this paper we study a boundary-value problem with the Frankl and Bitsadze–Samarskii condition on the line of degeneracy and on parallel characteristics for a mixed-type equation with a singular coefficient. We prove the existence of a solution by the method of integral equations, and we do its uniqueness with the help of the extremum principle.

Keywords: extremum principle, unique solvability, existence of solution, integral equations.

M.Kh. Ruziev

Senior Researcher, Department of Differential Equations,
Institute of Mathematics and Information Technologies,
National Academy of Sciences of Republic of Uzbekistan,
29 Durman yuli str., Tashkent, 100125 Republic of Uzbekistan,

`e-mail:` mruziev@mail.ru