ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2004 МАТЕМАТИКА № 9 (508)

УДК 517.955:532.5

Л.Д. ЭСКИН

К ЗАДАЧЕ П.Я. ПОЛУБАРИНОВОЙ-КОЧИНОЙ ОБ ОПОРОЖНЕНИИ БАССЕЙНА

1. Уравнение нелинейной теплопроводности

$$u_t = (u^m u_x)_x \tag{1.1}$$

возникает при моделировании самых разнообразных процессов в механике сплошной среды. Сюда относятся процессы переноса тепла (массы) в среде с коэффициентом теплоемкости (диффузии), степенным образом зависящим от температуры (концентрации), фильтрации политропного газа в пористую среду. В последнем случае уравнение (1.1) называется уравнением Лейбензона, а при $m = 1$ — уравнением Буссинеска. Это же уравнение возникает и при моделировании динамики грунтовых вод. Уравнение (1.1) будет рассматриваться на полуоси $x > 0$ вместе с начальным и граничным условиями

$$u(x,0) = 1, \quad u(0,t) = 0 \tag{1.2}$$

(известная задача П.Я. Полубариновой-Кочиной [1] об опорожнении бассейна). Решение задачи (1.1), (1.2) при $m = 1$ было протабулировано в [1], а ее приближенное аналитическое решение построено в [2]. Цель данной статьи — построение асимптотики решения задачи (1.1), (1.2) вблизи границ $x = 0$ и $x = \infty$. Поскольку предлагаемая здесь методика связана с качественной теорией динамических систем и теорией нормальных форм обыкновенных дифференциальных уравнений, будем предполагать, что m — натуральное число. Задача (1.1), (1.2) рассматривается в п. 2–5. В п. 6 аналогичная методика используется для изучения процесса турбулентной фильтрации политропного газа в пористой среде.

2. Известно [1], [2], что решение задачи (1.1), (1.2) автомодельно и монотонно возрастает по x. Полагая $\xi = xt^{-1/2}$, $u = f(\xi)$, из (1.1), (1.2) получим для $f(\xi)$ обыкновенное дифференциальное уравнение

$$(f^m f_\xi)_\xi + 2^{-1}\xi f_\xi = 0 \tag{2.1}$$

и граничные условия

$$f(0) = 0, \quad f(\infty) = 1. \tag{2.2}$$

Следуя [3], [4], положим

$$f = \xi^{2/m}\phi(\xi), \quad \sigma = \xi\phi_\xi. \tag{2.3}$$

В результате подстановки (2.3) в (2.1) будем иметь обыкновенное дифференциальное уравнение для $\sigma = \sigma(\phi)$:

$$\sigma_\phi = Q/P, \quad Q = ((1+2/m)\phi^m + m\phi^{m-1}\sigma + 2^{-1})w + 2m^{-1}\phi^m\sigma, \tag{2.4}$$
$$P = -\phi^m\sigma, \quad w = \sigma + 2m^{-1}\phi,$$

причем $f_\xi = \xi^{-1+2/m} w$. Уравнение (2.4) удобно заменить динамической системой

$$\phi_\tau = P, \quad \sigma_\tau = Q. \tag{2.5}$$

Выбор независимой переменной τ роли не играет, т. к. нас будут интересовать лишь траектории динамической системы (2.5) в фазовой плоскости (ϕ, σ), а не закон движения по траектории. Отметим прежде всего, что, имея интегральную кривую уравнения (2.4), можно найти из второго уравнения (2.3) однопараметрическое семейство его решений $\phi = \phi(\xi, c)$, а затем с помощью первого из равенств (2.3) — однопараметрическое семейство автомодельных решений уравнения (1.1). Следствием неотрицательности и монотонного возрастания по x решения u задачи (1.1), (1.2) являются неотрицательность и монотонное возрастание по ξ функции $f(\xi)$. Поэтому будем рассматривать лишь траектории динамической системы (2.5), принадлежащие сектору I фазовой плоскости (ϕ, σ), который лежит в полуплоскости $\phi > 0$ и ограничен полуосями $\phi = 0$ $(\sigma > 0)$ и $w = 0$ $(\phi > 0)$. С помощью стандартной методики качественной теории динамических систем на плоскости [5] нетрудно исследовать поведение траекторий уравнения (2.5) в секторе I. Ограничимся тем, что приведем лишь необходимые для дальнейшего окончательные результаты проведенного анализа (см. рис. 1).

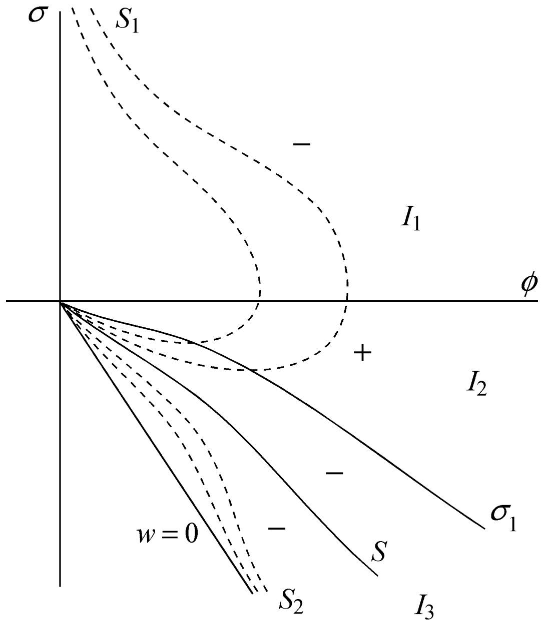

Рис. 1

Сектору I принадлежит ветвь изоклины нуля уравнения (2.4)

$$\sigma_1(\phi) = a(\phi) + b(\phi), \quad a(\phi) = -((3 + 4/m)\phi^m + 1/2)/(2m\phi^{m-1}),$$
$$b(\phi) = \{(1 + 4/m)^2\phi^{2m} + (4m^{-1} - 1)\phi^m + 1/4\}^{1/2}.$$

Эта ветвь расположена в четвертом квадранте фазовой плоскости (ϕ, σ), входит в начало координат в направлении с угловым коэффициентом $k_1 = -2/m$ (т. е. касается прямой $w = 0$), уходит в ∞ в направлении с угловым коэффициентом $k_2 = -1/m$. С координатными осями и прямой $w = 0$ эта ветвь пересекается лишь в начале координат. Ветвь σ_1 и координатная полуось ϕ $(\phi > 0)$ разбивают сектор I на три подсектора I_1, I_2, I_3, знаки "+', "–" на рис. 1 указывают знаки производной вдоль траектории в этих подсекторах. Все траектории в секторе I стремятся к положению равновесия в направлении с угловым коэффициентом k_1, причем имеется два однопараметрических семейства S_1 и S_2 траекторий. Кривые семейства S_1 переходят из подсектора I_3 в подсектор I_2, горизонтально пересекая ветвь изоклины нуля, затем вертикально пересекают координатную ось ϕ, входят в подсектор I_1 и приближаются на ∞ к полуоси $\sigma > 0$ по асимптотическому закону

$$\sigma \sim A\phi^{-m}, \quad \phi \to 0, \tag{2.6}$$

$A > 0$ — параметр семейства. Кривые семейства S_2 не пересекают ни изоклины нуля, ни прямой $w = 0$ и на всем протяжении принадлежат подсектору I_3. Для кривых семейства S_2 справедлива асимптотика при $\phi \to \infty$

$$\sigma \sim -2m^{-1}\phi + B\phi^{\alpha}, \quad \alpha = 1 - 2^{-1}m, \tag{2.7}$$

$B > 0$ — параметр семейства. Семейства S_1 и S_2 разделяет кривая S — ветвь сепаратрисы седла на ∞ динамической системы (2.5) в направлении с угловым коэффициентом $k_3 = \lambda_1 = -\beta/m > -2/m$, $\beta = (m+2)/(m+1)$. Этот результат нетрудно получить, выполнив преобразование Пуанкаре

$$\phi = 1/y_1, \quad \sigma = (\lambda_1 + y_2)/y_1, \tag{2.8}$$

которое преобразует систему (2.5) в систему

$$y_{1\tau} = \lambda_1 y_1 + y_1 y_2, \quad y_{2\tau} = \lambda_2 y_2 + (m+1)(y_2)^2 + (2(m+1))^{-1}(y_1)^m + 2^{-1}(y_1)^m y_2, \tag{2.9}$$

$\lambda_2 = 1$, причем седло на ∞ системы (2.5) преобразуется в седло $y_1 = y_2 = 0$ ($\lambda_1\lambda_2 < 0$) системы (2.9), а кривая S — в одну из ветвей сепаратрисы этого седла. С помощью асимптотических формул

$$\sigma \sim -2m^{-1}\phi \ \ (\phi \to 0), \quad \sigma \sim \lambda_1\phi \ \ (\phi \to \infty)$$

для кривой S и аналогичных асимптотических формул (2.6), (2.7) для кривых семейств S_1 и S_2 с учетом соотношений (2.3) нетрудно показать, что только однопараметрическое семейство решений $f(\xi)$ уравнения (2.1), порожденное в силу (2.3) кривой S, удовлетворяет граничному условию (2.2) при $\xi = 0$ и условию $\lim f(\xi) = c < \infty$ при $\xi \to \infty$. При этом асимптотическое разложение $f(\xi)$ при $\xi \to 0$ определяется асимптотикой кривой S при $\phi \to \infty$, т. е. асимптотикой в окрестности седла на ∞, а асимптотическое разложение $f(\xi)$ при $\xi \to \infty$ — асимптотикой S при $\phi \to 0$, т. е. асимптотикой в окрестности положения равновесия $\phi = 0$, $\sigma = 0$. После получения этих асимптотик надо будет выбрать значение параметра семейства решений, порожденных в силу (2.3) кривой S, таким образом, чтобы выполнялось и граничное условие (2.2) на ∞.

3. Для вычисления асимптотического разложения для кривой S при $\phi \to \infty$ (в окрестности седла на ∞) приведем систему (2.9) к нормальной форме в окрестности седла $y_1 = y_2 = 0$. Система (2.9) при $m \geq 2$ имеет канонический вид, и в этом пункте будем предполагать это условие выполненным. Случай $m = 1$ рассмотрим в п. 4. Будем использовать обозначения и результаты из [6], полагая $Q = (d, e)$ $Z^Q = z_1^d z_2^e$. В ([6], с. 98) показано, что если $\lambda = \lambda_1/\lambda_2 = -r/s$, где r/s — несократимая рациональная дробь, то система (2.9) с помощью преобразования

$$y_i = z_i + h_i(Z), \quad i = 1, 2, \tag{3.1}$$

где $h_i(Z) = \sum\limits_Q h_{iQ} Z^Q$ — степенной ряд, не содержащий свободного и линейных слагаемых, в окрестности седла $y_1 = y_2 = 0$ приводится к нормальной форме

$$z_{i\tau} = z_i\biggl(\lambda_i + \sum_{k=1}^{\infty} g_{i(ks,kr)} z_1^{ks} z_2^{kr}\biggr). \tag{3.2}$$

В случае системы (2.9) и нечетного m имеем $r = m+2$, $s = m(m+1)$, а в случае четного $m = 2t$ имеем $r = t+1$, $s = t(2t+1)$. Седло $y_1 = y_2 = 0$ преобразование (3.1) переводит в седло $z_1 = z_2 = 0$ системы (3.2). Очевидно, сепаратриса этого седла имеет ветвь $z_1 = \exp(\lambda_1\tau)$, $z_2 = 0$ (она входит в седло при $\tau \to \infty$). С учетом преобразования (3.1) и того обстоятельства, что степенные ряды

$h_i(Z)$ не содержат свободного и линейных слагаемых, получаем для седла $y_1 = y_2 = 0$ ветвь сепаратрисы

$$y_1 = \exp(\lambda_1\tau) + \sum_{k=2}^{\infty} h_{1(k,0)} \exp(\lambda_1 k\tau), \quad y_2 = \sum_{k=2}^{\infty} h_{2(k,0)} \exp(\lambda_1 k\tau). \tag{3.3}$$

Коэффициенты $h_{i(k,0)}$ могут быть последовательно определены в результате подстановки формальных рядов (3.3) в систему (2.9) и применения метода неопределенных коэффициентов. Оказывается, что y_1, y_2 разлагаются в ряды по степеням $u = \exp m\lambda_1\tau$. А именно,

$$y_1 = u^{1/m}\left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k u^k\right), \quad y_2 = \sum_{k=1}^{\infty} b_k u^k, \tag{3.4}$$

где

$$\begin{gathered} a_1 = (2\beta(2m+3))^{-1}, \quad b_1 = -(2(2m+3))^{-1}, \\ a_2 = (m+1)^2/(8\beta^2(2m+3)^2(3m+5)), \\ b_2 = -(m^2 - m - 4)/(4\beta(2m+3)^2(3m+5)), \end{gathered} \tag{3.5}$$

а остальные коэффициенты a_k, b_k определяются из рекуррентных соотношений, которые ввиду их громоздкости не приводятся. Соотношения (3.4) задают параметрическое представление ветви сепаратрисы седла $y_1 = y_2 = 0$ системы (2.9), причем малой окрестности седла соответствуют малые значения параметра u. Полагая

$$\left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k u^k\right)^{-1} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} r_k u^k,$$

где коэффициенты r_k выражаются через a_s $(s = 1, \ldots, k)$ и могут последовательно определяться с помощью метода неопределенных коэффициентов, с учетом соотношений (2.8) получим параметрическое представление ветви сепаратрисы седла на ∞ системы (2.5)

$$\phi(u) = y_1^{-1} = u^{-1/m}\left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} r_k u^k\right), \tag{3.6}$$

$$\sigma(u) = (\lambda_1 + y_2)/y_1 = u^{-1/m}\left\{\lambda_1 + (\lambda_1 r_1 + b_1)u + \sum_{k=2}^{\infty}\left(\lambda_1 r_k + b_k + \sum_{s+t=k} r_s b_t\right)u^k\right\}.$$

В (3.6) $r_1 = -a_1$, $r_2 = a_1^2 - a_2$, для остальных коэффициентов получаются все более громоздкие формулы. Из (3.6) без труда находим, что при $u \to 0$ эта кривая стремится к седлу на ∞ системы (2.5) в направлении с угловым коэффициентом $k_3 = \lambda_1$, т. е. эта кривая совпадает с кривой S и формулы (3.6) дают искомое асимптотическое представление этой кривой в окрестности седла. Обозначим

$$d(u) = \lambda_1 u^{-1/m}(\sigma(u))^{-1} - 1 = \sum_{k=1}^{\infty} d_k u^k,$$

$$p(u) = \sum_{s=1}^{\infty} p_s u^s = d(u)\sum_{k=1}^{\infty} \beta^{-1} r_k (1 - km) u^{k-1}.$$

Из второго уравнения (2.3) получим

$$\xi = c\exp\int \sigma^{-1} d\phi = cu^{1/\beta}\exp\left\{\sum_{k=1}^{\infty}((1+k)^{-1} p_k u + (d_k + r_k(1-km))/(k\beta))u^k\right\}. \tag{3.7}$$

Из (3.7) следует, что $\xi \to 0$ при $u \to 0$. Исключая u из (3.6) и (3.7), получим разложение $\phi(\xi)$ по дробным степеням ξ, т. е. асимптотическое разложение $\phi(\xi)$ при $\xi \to 0$, а затем с помощью первого из равенств (2.3) — и искомое разложение в ряд по дробным степеням ξ однопараметрического семейства решений $f(\xi, c)$ уравнения (2.1), удовлетворяющего граничному условию (2.2) при $\xi = 0$. Это разложение имеет вид

$$f(\xi) = c^{2/m}(\xi/c)^{1/(m+1)} \sum_{k=0}^{\infty} l_k (\xi/c)^{k\beta}, \tag{3.8}$$

$c > 0$ — параметр семейства. Коэффициенты l_k в (3.8) выражаются через коэффициенты a_s, b_s, r_s, d_s, p_s с $s \leq k$, т.е. через коэффициенты рядов (3.4). Получим разложение (3.8), попутно вычислим и его коэффициенты l_0, l_1, l_2, т.е. трехчленную асимптотику $f(\xi)$ при $\xi \to 0$. Будем иметь

$$d_1 = a_1 - (b_1/\lambda_1), \quad d_2 = a_2 + (b_1/\lambda_1)^2 - (a_1 b_1 + b_2)/\lambda_1, \quad p_1 = a_1 d_1 (m-1)/\beta,$$
$$\exp\left\{ \sum_{k=1}^{\infty} ((1+k)^{-1} p_k u + (d_k + r_k(1-km))/(k\beta)) u^k \right\} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} m_k u^k,$$
$$m_1 = (d_1 + (m-1)a_1)/\beta, \quad m_2 = 2^{-1}(p_1 + m_1^2) + (2\beta)^{-1}(d_2 + (1-2m)r_2),$$
$$(\xi/c)^\beta = u\left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} g_k u^k\right), \quad g_1 = m_1\beta, \quad g_2 = (m_2 + 2^{-1}m_1^2/(m+1))\beta,$$
$$u = (\xi/c)^\beta\left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} v_k (\xi/c)^{k\beta}\right), \quad v_1 = -g_1, \quad v_2 = 2g_1^2 - g_2,$$

откуда и следует разложение (3.8), причем

$$l_0 = 1, \quad l_1 = r_1 - m^{-1}v_1,$$
$$l_2 = ((m+1)v_1^2 - 2mv_2)(2m^2)^{-1} + m^{-1}(m-1)r_1 v_1 + r_2.$$

Нетрудно вычислить коэффициенты l_3, l_4, но для них получаются слишком громоздкие формулы, и мы их не приводим. Из приведенных формул следует, что коэффициенты l_1, l_2 выражаются только через коэффициенты a_1, b_1, a_2 и, следовательно, могут быть явно выражены через m с помощью соотношений (3.5). Значение параметра c, определяющее решение $f(\xi)$ уравнения (2.1), которое удовлетворяет обоим граничным условиям (2.2), находится из условия $f(\infty) = 1$. Оно зависит от m и для каждого конкретного значения m должно определяться в численном эксперименте. Наиболее удобно поступить следующим образом. Положим $f_1(\xi) = f(\xi, c)|_{c=1}$. С помощью асимптотики (3.8) нетрудно вычислить данные Коши f_1, $f_{1\xi}$ в точке $\xi_0 \ll 1$ (асимптотика производной получается дифференцированием асимптотики (3.8)) и, решая задачу Коши для уравнения (2.1) с этими начальными данными, вычислить $f_1(\infty)$. Полагая $f = f(\xi, c_0)$, где $c_0 = (f_1(\infty))^{-m/2}$, получим решение f уравнения (2.1), удовлетворяющее обоим граничным условиям (2.2).

Докажем, что ряд (3.8) сходится в некоторой окрестности точки $\xi = 0$. Очевидно, для этого достаточно доказать, что в некоторой окрестности точки $u = 0$ сходятся ряды (см. формулы (3.4))

$$x_1 = u^{-1}y_1^m = \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k u^k\right)^m = \sum_{k=0}^{\infty} \zeta_k u^k, \quad \zeta_0 = 1,$$
$$x_2 = u^{-1}y_2 = \sum_{k=0}^{\infty} \mu_k u^k, \quad \mu_k = b_{k+1}, \quad \mu_0 = -(2(2m+3))^{-1},$$
$$u = \exp(m\lambda_1\tau), \quad \lambda_1 = -(m+2)/(m(m+1)).$$

Из уравнений (2.9) для y_1, y_2 получаем уравнения для x_1, x_2

$$x_{1u} = -m(m+1)(m+2)^{-1}x_1x_2,$$
$$ux_{2u} = -(m+2)^{-1}((2m+3)x_2 + 2^{-1}x_1 + 2^{-1}(m+1)ux_1x_2 + (m+1)^2ux_2^2).$$

Из этих уравнений для коэффициентов ζ_k, μ_k получаем рекуррентные соотношения

$$(k+1)\zeta_{k+1} = -m(m+1)(m+2)^{-1}\sum_{p+s=k}\zeta_p\mu_s, \tag{3.9}$$
$$((k+1)(m+2)+2m+3)\mu_{k+1} = -\left(2^{-1}\left(\zeta_{k+1} + (m+1)\sum_{p+s=k}\zeta_p\mu_s\right) + (m+1)^2\sum_{p+s=k}\zeta_p\mu_s\right).$$

Из соотношений (3.9), положив $k = 0$, находим $\zeta_1 = m(m+1)(2(m+2)(2m+3))^{-1}$, $\mu_1 = -(m+1)(m^2-m-4)(4(3m+5)(m+2)(2m+3)^2)^{-1}$, откуда следует справедливость оценок

$$|\zeta_1| \le 1/4, \quad |\mu_1| \le (32(m+1))^{-1}. \tag{3.10}$$

При любом k из (3.9) получаем

$$|\zeta_{k+1}| \le m(m+1)((m+2)(k+1))^{-1}\sum_{p+s=k}|\zeta_p|\,|\mu_s|, \tag{3.11}$$
$$|\mu_{k+1}| \le ((m+2)(k+1)+2m+3)^{-1}\Biggl(2^{-1}\Biggl(|\zeta_{k+1}| +$$
$$+(m+1)\sum_{p+s=k}|\zeta_p|\,|\mu_s|\Biggr) + (m+1)^2\sum_{p+s=k}|\zeta_p|\,|\mu_s|\Biggr).$$

Предположение индукции

$$|\zeta_p| \le 1/4, \quad |\mu_p| \le (4(m+1))^{-1}, \quad p = 1,2,\ldots,k, \tag{3.12}$$

в силу оценок (3.10) выполняется при $k = 1$, а также и для μ_0. С помощью предположения индукции (3.12)из первого неравенства в (3.11) получаем

$$|\zeta_{k+1}| \le m(m+1)((m+2)(k+1))^{-1}(|\mu_k| + k/(16(m+1))) \le$$
$$\le m(k+4)(16(m+2)(k+1))^{-1} \le 1/4,$$

после чего из второго неравенства в (3.11) следует

$$|\mu_{k+1}| \le (32((m+2)(k+1)+2m+3))^{-1}(3k+10) \le (4(m+1))^{-1}.$$

Таким образом, по индукции доказана справедливость оценок (3.12) при всех $p \ge 1$, а из этих оценок следует сходимость рядов (3.4) в некоторой окрестности точки $u = 0$, следовательно, и ряда (3.8) в некоторой окрестности точки $\xi = 0$.

4. В случае $m = 1$ (уравнение Буссинеска) система (2.9) не является канонической, но легко приводится к каноническому виду

$$v_{1\tau} = \lambda_1 v_1 - 0{,}1v_1^2 + v_1v_2, \quad v_{2\tau} = v_2 - 0{,}04v_1^2 + 0{,}2v_1v_2 + 2v_2^2, \quad \lambda_1 = -3/2, \tag{4.1}$$

линейным преобразованием

$$y_1 = v_1, \quad y_2 = -0{,}1v_1 + v_2. \tag{4.2}$$

Повторяя рассуждения предыдущего пункта, найдем, что ветвь сепаратрисы седла $v_1 = v_2 = 0$ системы (4.1), в которую переходит кривая S в результате преобразований (2.8) и (4.2), допускает параметрическое представление

$$v_1 = u\left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k u^k\right), \quad v_2 = \sum_{k=2}^{\infty} b_k u^k,$$

$a_1 = 1/15$, $a_2 = 1/900$, $b_2 = 0{,}01$, $b_3 = 1/1650$. Остальные коэффициенты могут быть определены с помощью рекуррентных соотношений

$$k\lambda_1 a_k = -0{,}2a_{k-1} - 0{,}1 \sum_{s+r=k-1} a_s a_r + b_k + \sum_{s+r=k} a_s b_r,$$
$$(k\lambda_1 - 1)b_k = -0{,}08a_{k-2} - 0{,}04 \sum_{s+r=k-2} a_s a_r + 0{,}2b_{k-1} + 0{,}2 \sum_{s+r=k-1} a_s b_r + 2 \sum_{s+r=k} b_s b_r$$

(a_k определяется вслед за b_k). Опуская выкладки, аналогичные проведенным в п. 3, укажем, что степенное разложение семейства решений уравнения (2.1), удовлетворяющего граничному условию $f(0) = 0$, получается в виде

$$f(\xi) = c^2(\xi/c)^{1/2}\Big(1 + \sum_{k=1}^{\infty} l_k(\xi/c)^{3k/2}\Big),$$

где $l_1 = -1/15$, $l_2 = 1/300$. Параметр c снова определяется из условия $f(\infty) = 1$ с помощью приема, указанного в конце п. 3 в случае произвольного m.

5. Перейдем к изучению асимптотики решения граничной задачи (2.1), (2.2) при $\xi \to \infty$. Динамическую систему (2.5) теперь удобно переписать в виде системы

$$y_{1\tau} = \lambda_1 y_1 + y_1 f_1, \quad y_{2\tau} = \lambda_2 y_2 + y_2 f_2, \tag{5.1}$$

где $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1/2$, $y_1 = \phi$, $y_2 = w$,

$$f_1 = 2m^{-1}y_1^m - y_1^{m-1}y_2, \quad f_2 = (2m^{-1} - 1)y_1^m + my_1^{m-1}y_2. \tag{5.2}$$

Система (5.1) каноническая. В ([6], с. 97) показано, что система вида (5.1) с $\lambda_1 = 0$ и $\lambda_2 \neq 0$ преобразованием (3.1), где снова формальные степенные ряды $h_i(Z)$ не имеют свободного и линейных слагаемых, приводится к нормальной форме

$$z_{1\tau} = z_1 g_1(z_1), \quad z_{2\tau} = z_2 g_2(z_1), \tag{5.3}$$

$g_1(z_1) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} g_{1(k,0)} z_1^k$, $g_2(z_1) = \lambda_2 + \sum\limits_{k=1}^{\infty} g_{2(k,0)} z_1^k$. Обозначим $h_i(Z) = z_i h^{(i)}(Z)$. Коэффициенты $g_{i(k,0)}$ степенных рядов (5.2) и коэффициенты h_{iQ} ($Q = (q_1, q_2)$) степенных рядов

$$h^{(1)}(Z) = \sum_Q h_{1Q} Z^Q \ \ (q_1 \geq -1, \ \ q_2 \geq 0), \quad h^{(2)}(Z) = \sum_Q h_{2Q} Z^Q \ \ (q_1 \geq 0, \ \ q_2 \geq -1)$$

последовательно определяются из соотношений ([6], с. 95)

$$h_{i(k,0)} = 0, \quad g_{i(k,s)} = 0 \ \ (s \neq 0), \quad g_{i(k,0)} = c^{(1)}_{i(k,0)} + c^{(2)}_{i(k,0)},$$
$$h_{iQ} = 2q_2^{-1}(c^{(1)}_{iQ} + c^{(2)}_{iQ}) \ \ (q_2 \neq 0), \tag{5.4}$$

где

$$c^{(1)}_{iQ} = -\sum_{P+R=Q} h_{iP} g_{iR} - \sum_{P+R=Q} (p_1 g_{1R} + p_2 g_{2R}) h_{iP}, \tag{5.5}$$

а $c^{(2)}_{iQ}$ — коэффициент при $z_i Z^Q$ в разложении функции

$$y_i f_i = z_i(1 + h^{(i)}) f_i(z_1(1 + h^{(1)}), z_2(1 + h^{(2)})). \tag{5.6}$$

Поскольку разложение функции $z_i h^{(i)}$ не содержит свободного и линейных слагаемых, имеем

$$h_{1(-1,0)} = h_{2(0,-1)} = h_{1(-1,1)} = h_{2(1,-1)} = 0. \tag{5.7}$$

С помощью последнего соотношения в (5.4) и соотношений (5.5)–(5.7) по индукции нетрудно доказать, что

$$h_{1(-1,k)} = h_{2(k,-1)} = 0 \quad (k \geq 0). \tag{5.8}$$

С помощью (5.5), (5.8), (5.2), (5.6) и первого из соотношений (5.4) теперь удается вычислить $c^{(1)}_{i(k,0)}$ и $c^{(2)}_{i(k,0)}$. Имеем

$$c^{(1)}_{i(k,0)} = 0, \quad c^{(2)}_{1(k,0)} = 2m^{-1}\delta_{km}, \quad c^{(2)}_{2(k,0)} = (2m^{-1} - 1)\delta_{km},$$

δ_{km} — символ Кронекера. Из третьего соотношения в (5.4) вытекает $g_{1(k,0)} = 2m^{-1}\delta_{km}$, $g_{2(k,0)} = (2m^{-1} - 1)\delta_{km}$. Следовательно, нормальная форма (5.3) системы (5.1) имеет вид

$$z_{1\tau} = 2m^{-1} z_1^{m+1}, \quad z_{2\tau} = \lambda_2 z_2 + (2m^{-1} - 1) z_1^m z_2. \tag{5.9}$$

Система (5.9) легко интегрируется. Найдем

$$z_2 = c z_1^{\alpha} \exp(-1/(4z_1^m)), \tag{5.10}$$

$\alpha = \frac{m}{2}(2m^{-1} - 1)$. После подстановки (5.10) в (3.1) получим для однопараметрического семейства решений уравнения (2.4) (c — параметр семейства) следующее представление:

$$\phi = y_1 = z_1\Big(1 + \sum_Q h_{1Q} Z^Q\Big), \tag{5.11}$$

$$\sigma = y_2 - 2m^{-1} y_1 = z_2 - 2m^{-1} z_1 + \sum_Q h_{2Q} z_2 Z^Q - 2m^{-1} \sum_Q h_{1Q} z_1 Z^Q,$$

где z_2 определяется равенством (5.10). С учетом первого соотношения из (5.4) и (5.7) нетрудно заметить, что степенные ряды в правых частях равенств (5.11) содержат экспоненциально убывающий при $z_1 \to +0$ множитель z_2 как минимум в первой степени. Выписав лишь слагаемые с первой степенью z_2, получим асимптотические представления при $z_1 \to +0$

$$\phi = z_1\Big(1 + \sum_{q=0}^{p} h_{1(q,1)} z_1^q z_2\Big) + O(z_1^{p+2+\alpha} \exp(-1/(4z_1^m))), \tag{5.12}$$

$$\sigma = -2m^{-1} z_1 - \Big(2m^{-1} \sum_{q=0}^{p} h_{1(q,1)} z_1^{q+1} - 1\Big) z_2 + O(z_1^{p+2+\alpha} \exp(-1/(4z_1^m))).$$

При $z_1 \to +0$ имеем $\phi \to +0$, $\sigma \to -0$ а $w \to +0$ при $c > 0$. Кривые (5.11) при $z_1 \to +0$ входят в начало координат в секторе I фазовой плоскости (ϕ, σ) в направлении с угловым коэффициентом $k_1 = -2m^{-1}$. Кривая S получается из семейства кривых (5.11) при некотором значении параметра $c = c_1$, зависящем от m и определяемым для каждого конкретного значения m лишь численно. Для коэффициентов $h_{1(q,1)}$ из (5.4)–(5.6) находим

$$h_{1(q,1)} = 2(c^{(1)}_{1(q,1)} + c^{(2)}_{1(q,1)}) = 2(m^{-1}(5m - 2q - 2) h_{1(q-m,1)} - \delta_{qm-1}),$$

отсюда

$$h_{1(q,1)} = 0 \quad (q < m - 1), \quad h_{1(m-1,1)} = -2, \quad h_{1(q,1)} = 2m^{-1}(5m - q - 2) h_{1(q-m,1)} \quad (q \geq m). \tag{5.13}$$

Из (5.13) следует, что отличны от нуля лишь коэффициенты

$$h_{1(m-1,1)} = -2, \quad h_{1(sm-1,1)} = (-1)^{s-1} 2^s (2s - 5)!! \quad (s \geq 2).$$

Соотношения (5.12) приобретают теперь окончательный вид

$$\phi = z_1 - 2z_1^m z_2 - \sum_{s=2}^{n}(-2)^s(2s-5)!!z_1^{sm}z_2 + O(z_1^{(n+1)m+\alpha}\exp(-1/(4z_1^m))), \tag{5.14}$$

$$\sigma = -2m^{-1}z_1 + z_2 + 4m^{-1}z_1^m z_2 + 2m^{-1}\sum_{s=2}^{n}(-2)^s(2s-5)!!z_1^{sm}z_2 + O(z_1^{(n+1)m+\alpha}\exp(-1/(4z_1^m))).$$

После подстановки в (5.14) z_2 из (5.10) с $c = c_1$ получим асимптотику кривой S вблизи начала, с помощью которой из второго уравнения (2.3) находится сначала асимптотика $\phi(\xi)$, а затем с помощью первого равенства (2.3) — и асимптотика решения краевой задачи (2.1), (2.2) при $\xi \to \infty$. Приведем трехчленную асимптотику $\underline{f(\xi)}$. Будем иметь

$$\xi/c = z_1^{-m/2}(1 + 2^{-1}c_1 m\Gamma(-2^{-1}, (4z_1^m)^{-1}) + O(\Gamma(-3/2, (4z_1^m)^{-1}))),$$

$z_1 \to +0$, $c > 0$ произвольно, $\Gamma(v, x)$ — неполная гамма-функция ([7], с. 954). Используя асимптотику $\Gamma(v, x)$ при $x \to \infty$ ([7], с. 956), найдем

$$\xi/c = z_1^{-m/2}(1 + 4c_1 m z_1^{3m/2}\exp(-1/(4z_1^m)) + O(z_1^{5m/2}\exp(-1/(4z_1^m)))), \quad z_1 \to +0. \tag{5.15}$$

Из (5.15) следует, что $\xi \to \infty$ при $z_1 \to +0$. С помощью (5.15) находится при $\xi \to \infty$ асимптотика

$$z_1 = (\xi/c)^{-2/m}\{1 + 8c_1(\xi/c)^{-3}\exp(-(\xi/2c)^2) + O(\xi^{-5}\exp(-(\xi/2c)^2))\}. \tag{5.16}$$

В результате подстановки (5.16) в (5.14) получаем трехчленную асимптотику $\phi(\xi)$ при $\xi \to \infty$

$$\phi(\xi) = (\xi/c)^{-2/m}\{1 - 2c_1(c\xi^{-1} - 4(c\xi^{-1})^3 + O(\xi^{-5}))\exp(-(\xi/2c)^2)\},$$

а затем с помощью первого соотношения (2.3) — асимптотику однопараметрического семейства ($c > 0$ — параметр семейства) решений уравнения (2.1)

$$f(\xi, c) = c^{2/m}\{1 - 2c_1(c\xi^{-1} - 4(c\xi^{-1})^3 + O(\xi^{-5}))\exp(-(\xi/2c)^2)\}.$$

С учетом граничного условия (2.2) при $\xi = \infty$ окончательно находим

$$f(\xi) = 1 - 2c_1\xi^{-1}(1 - 4\xi^{-2} + O(\xi^{-4}))\exp(-(\xi^2/4)), \quad \xi \to \infty. \tag{5.17}$$

Асимптотика производной f_ξ ($\xi \to \infty$) получается дифференцированием асимптотики (5.17), и мы ее не приводим. Положив в правой части равенства (5.17) $\xi = xt^{-1/2}$, получаем трехчленную асимптотику задачи П.Я. Полубариновой-Кочиной (1.1), (1.2) при $x \to \infty$ ($t > 0$ фиксировано).

Замечание. Асимптотика $f(\xi)$ при $\xi \to 0$ ($\xi \to \infty$) одновременно дает и асимптотику при $x \to 0$ ($x \to \infty$), $t > 0$ фиксировано, решения $u(t, x)$ задачи (1.1), (1.2) и равномерную по x на любом конечном интервале полуоси $x \geq 0$ асимптотику этого решения при $t \to \infty$ ($t \to +0$).

6. В этом пункте для сокращения записи формул будем использовать обозначения $\alpha = (m+1)/(km-1)$, $\beta = (m+1)^{-1}$, $\gamma = (k+1)/(km-1)$, $\delta = (k-1)m$, $\zeta = (km-1)^{-1}$ и предполагать, что $\zeta > 0$, $k > 1$, $m > 0$ (k, m целые). При турбулентной фильтрации политропного газа в пористой среде его плотность $\rho(x, t)$ (в случае плоских волн) удовлетворяет уравнению (модель Лейбензона) [8]

$$\rho_t = (\rho^\delta \rho_x |\rho_x|^{m-1})_x. \tag{6.1}$$

Построим возрастающее решение уравнения (6.1), удовлетворяющее при $x > 0$ условию непрерывности потока $q = \rho^\delta \rho_x |\rho_x|^{m-1}$ и условиям Полубариновой-Кочиной (1.2). Это решение автомодельно и имеет вид $\rho = f(\xi)$, где $\xi = xt^{-\beta}$, а $f(\xi)$ удовлетворяет уравнению

$$(f^{(k-1)m} f_\xi^m)_\xi + \beta\xi f_\xi = 0 \tag{6.2}$$

и граничным условиям (2.2). Положив

$$f=\xi^{\alpha}\phi,\quad \sigma=\xi\phi_{\xi}, \tag{6.3}$$

из (6.2) получим динамическую систему

$$\sigma_{\tau}=Q(\phi,\sigma),\quad \phi_{\tau}=P(\phi,\sigma), \tag{6.4}$$
$$P=-m\phi^{\delta}w^{m-2}\sigma,\quad Q=m\gamma\phi^{\delta}w^{m-1}+\delta\phi^{\delta-1}\sigma w^{m-1}+m\alpha\phi^{\delta}\sigma w^{m-2}+\beta,$$
$$w=\sigma+\alpha\phi.$$

В силу очевидного соотношения $f_{\xi}=\xi^{\alpha-1}w$ и возрастания f интегральные кривые уравнения (6.4) следует рассматривать лишь в секторе I — пересечении полуплоскостей $\phi>0$, $w>0$. Снова найдем, что в секторе I имеются семейство S_1 интегральных кривых с вертикальной асимптотой (осью σ) и семейство S_2 с наклонной асимптотой $w=0$. Эти семейства разделены кривой S — сепаратрисой седла на ∞ в направлении с угловым коэффициентом $k_1=v_0=-\gamma/k$. Все интегральные кривые в секторе I начинаются в точках прямой $w=0$. В окрестности точки выхода (ϕ_0,σ_0), $\phi_0>0$, $\sigma_0=-\alpha\phi_0$, сепаратрисы S для нее справедлива асимптотика при $\phi\to\phi_0+0$

$$\sigma-\sigma_0\sim A(\phi-\phi_0)^{\eta},\quad A=(\beta/(\alpha\eta m\phi_0^{\delta+1}))^{\eta},\quad \eta=1/(m-1),\quad m>2, \tag{6.5}$$
$$\eta=1,\quad A=(\beta-\alpha^2 m\phi_0^{\delta+1})/(m\alpha\phi_0^{\delta+1}),\quad m=2,$$
$$\eta=1,\quad A=-\alpha,\quad m<2.$$

Координаты ϕ_0, σ_0 точки выхода могут быть определены лишь численно. Однопараметрическое семейство решений $f(\xi,c)$ уравнения (6.2), удовлетворяющих граничному условию (2.2) при $\xi=0$ снова порождается в силу уравнений (6.3) сепаратрисой S. С помощью преобразования Пуанкаре

$$\phi=1/y_1,\quad \sigma=(v_0+y_2)/y_1, \tag{6.6}$$

где $v_0=-\gamma/k$, из (6.4) получим динамическую систему

$$\begin{aligned}y_{1\tau}&=\lambda_1 y_1+my_1y_2(y_2+k^{-1})^{m-2}+mv_0y_1\{(y_2+k^{-1})^{m-2}-k^{2-m}\},\\ y_{2\tau}&=\lambda_2 y_2+mk(y_2)^2(y_2+k^{-1})^{m-2}+my_2\{(y_2+k^{-1})^{m-2}-k^{2-m}\}+\beta(y_1)^{1/\zeta},\end{aligned} \tag{6.7}$$

где $\lambda_1=mv_0k^{2-m}<0$, $\lambda_2=mk^{2-m}>0$. Преобразование (6.6) переводит седло на ∞ динамической системы (6.4) в седло $y_1=y_2=0$ системы (6.7), а кривую S — в одну из ветвей сепаратрисы этого седла. Рассуждая, как и в п. 3, получим для искомой ветви сепаратрисы седла $y_1=y_2=0$ динамической системы (6.7) представление

$$y_1=u^{\zeta}\Big(1+\sum_{s=1}^{\infty}a_su^s\Big),\quad y_2=\sum_{s=1}^{\infty}b_su^s,\quad u=\exp(\lambda_1\tau/\zeta). \tag{6.8}$$

Коэффициенты a_s, b_s определяются последовательно (a_s определяется вслед за b_s) с помощью рекуррентных соотношений, которые получаются в результате подстановки рядов (6.8) в уравнение (6.7) с учетом соотношений

$$y_{1\tau}=\lambda_1y_1+\lambda_1\zeta^{-1}u^{\zeta}\sum_{s=1}^{\infty}sa_su^s,\quad y_{2\tau}=\lambda_1\zeta^{-1}\sum_{s=1}^{\infty}sb_su^s$$

и сравнения коэффициентов при одинаковых степенях u в полученных равенствах. Ввиду громоздкости мы не приводим этих рекуррентных соотношений и ограничимся вычислением коэффициентов

$$a_1=m\zeta\lambda_1^{-1}k^{3-m}b_1(k^{-1}+(m-2)v_0),\quad b_1=\beta(\lambda_1\zeta^{-1}-\lambda_2)^{-1}. \tag{6.9}$$

С помощью представления (6.8) для y_1, y_2 и равенств (6.6) из (6.3) получаем для однопараметрического семейства $f(\xi, c)$ решений уравнения (6.2), удовлетворяющих граничному условию (2.2) при $\xi = 0$, представление в виде ряда по дробным степеням автомодельной переменной ξ

$$f(\xi, c) = c^{\alpha}(\xi/c)^{1/k} \sum_{s=0}^{\infty} l_s (\xi/c)^{s(k+1)/k}. \tag{6.10}$$

Отметим, что показатели степени в разложении (6.10) не зависят от m, а коэффициенты l_s от m зависят и выражаются через коэффициенты рядов (6.8). Эти выражения весьма громоздки, и мы ограничимся тем, что приведем лишь коэффициенты

$$l_0 = 1, \quad l_1 = kb_1/(k+1),$$

a_1, b_1 здесь определяются равенствами (6.9). Значение параметра c в равенстве (6.10) определяется вторым граничным условием (2.2). С учетом асимптотики (6.5) нетрудно убедиться с помощью соотношений (6.3), что для каждого решения семейства (6.10) существует точка $\xi_1(c)$ такая, что $f_\xi(\xi_1(c), c) = 0$, причем $f_\xi(\xi, c) > 0$ при $\xi < \xi_1(c)$. Нетрудно также убедиться, что вместе с решением $f(\xi)$ уравнения (6.2) его решением является и функция $\mu^{-\alpha} f(\mu\xi)$, где $\mu > 0$ произвольно. Рассмотрим решение $f(\xi, c)$ при $c = 1$ и обозначим его $f_1(\xi)$, а через $\xi_1 = \xi_1(1)$ обозначим точку, в которой обращается в нуль $f_{1\xi}$ (точка ξ_1 при заданных k и m определяется численно). Положим $f_0 = f_1(\xi_1) > 0$. Искомое решение $f(\xi, c_0)$ уравнения (6.2), удовлетворяющее обоим граничным условиям (2.2), будем искать в виде $f(\xi, c_0) = \mu^{-\alpha} f_1(\mu\xi)$, его производная обращается в нуль в точке $\xi_1(c_0)$. Определим значение μ из условия $f(\xi_1(c_0), c_0) = 1$. Будем иметь $\xi_1(c_0) = \xi_1/\mu$, причем $\mu = f_0^{1/\alpha}$. Таким образом, решение $f = f_0^{-1} f_1(f_0^{1/\alpha}\xi)$ уравнения (6.2) удовлетворяет граничному условию (2.2) при $\xi = 0$, монотонно возрастает на интервале $(0, \xi_1 f_0^{-1/\alpha})$, причем $f(\xi_1 f_0^{-1/\alpha}) = 1$. Положив $f(\xi) = 1$ при $\xi > \xi_1 f_0^{-1/\alpha}$, получим решение уравнения (6.2), удовлетворяющее обоим граничным условиям (2.2) и непрерывное вместе с производной f_ξ, следовательно, удовлетворяющее и условию непрерывности потока q. С учетом равенства (6.10) для этого решения получим окончательно представление

$$f = f_0^{-1}(\xi f_0^{1/\alpha})^{1/k} \sum_{s=0}^{\infty} l_s (\xi f_0^{1/\alpha})^{s(k+1)/k} \quad \text{при} \quad 0 \le \xi \le \xi_1 f_0^{-1/\alpha},$$
$$f = 1 \quad \text{при} \quad \xi > \xi_1 f_0^{-1/\alpha}$$

(значение параметра c, выделяющее искомое решение из семейства (6.10), есть $c_0 = f_0^{-1/\alpha}$). В заключение отметим, что нетрудно вычислить и асимптотику $f(\xi)$ при $\xi \to \xi_0 - 0$, $\xi_0 = \xi_1 f_0^{-1/\alpha}$. С помощью (6.5) и (6.3) без труда получаем двучленную асимптотику $f(\xi)$ при $\xi \to \xi_0 - 0$ в виде

$$f(\xi) = 1 - B(\xi_0 - \xi)^{1+\eta} + o((\xi_0 - \xi)^{1+\eta}),$$

где $B = \alpha^{\eta}(1+\eta)^{-1} A \xi_0^{a(1-\eta)-1-\eta}$ при $m > 2$ и $\eta = 1$, $B = (12\xi_0)^{-1}$ при $m = 2$ (отметим, что ξ_0 и ϕ_0 связаны простым соотношением $\xi_0^{\alpha}\phi_0 = 1$, являющимся следствием условия $f(\xi_0) = 1$).

Литература

1. Полубаринова-Кочина П.Я. *Об одном нелинейном уравнении в частных производных, встречающемся в теории фильтрации* // ДАН СССР. – 1948. – Т. 63. – № 6. – С. 623–626.
2. Качан М.В., Пименов С.Ф., Сущий С.М., Энтель М.Б. *О некоторых автомодельных решениях уравнения Лейбензона* // Механ. жидкости и газа. – 1991. – № 5. – С. 145–150.
3. Баренблатт Г.И. *О некоторых неустановившихся движениях жидкости и газа в пористой среде* // ПММ. – 1952. – Т. 16. – Вып. 1. – С. 67–78.
4. Самарский А.А., Галактионов В.А., Курдюмов С.П., Михайлов А.П. *Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений.* – М.: Наука, 1987. – 477 с.

5. Баутин Н.Н., Леонтович Е.А. *Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости.* – М.: Наука, 1990. – 488 с.
6. Брюно А.Д. *Локальный метод нелинейного анализа дифференциальных уравнений.* – М.: Наука, 1979. – 253 с.
7. Градштейн И.С., Рыжик И.М. *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений.* – М.: ГИФМЛ, 1962. – 1100 с.
8. Баренблатт Г.И. *Об автомодельных движениях сжимаемой жидкости в пористой среде* // ПММ. – 1952. – Т. 16. – Вып. 6. – С. 679–698.

Казанский государственный университет

Поступила 24.05.2002