Известия вузов. Математика
2016, № 7, с. 83–91

http://kpfu.ru/science/nauchnye-izdaniya/ivrm/
e-mail: izvuz.matem@kpfu.ru

Л.А. ОНЕГОВ

МЕТОД МЕХАНИЧЕСКИХ КВАДРАТУР ДЛЯ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С НЕПОДВИЖНОЙ ОСОБЕННОСТЬЮ

Аннотация. Исследуется метод механических квадратур для интегральных уравнений с неподвижной особенностью. Установлены оценки погрешности этого метода, основанного на квадратурном процессе, который является наилучшим на классе дифференцируемых функций. Доказана сходимость метода в конечномерной и равномерной метриках. Установлено, что исследуемый квадратурный метод является оптимальным по порядку на гёльдеровом классе функций.

Ключевые слова: интегральное уравнение, квадратурный процесс, решение, сходимость, погрешность, оптимальность.

УДК: 519.64

1. Основные положения и вспомогательные утверждения

Одним из важных и эффективных методов решения интегральных уравнений является метод механических квадратур. Этому методу посвящено большое число работ (например, [1]–[4]). Также отметим, что данный метод широко используется при решении сингулярных интегральных уравнений [4], [5]. За последние десять–пятнадцать лет важные результаты по исследованию прямых методов решения интегральных уравнений второго и третьего родов, в том числе и содержащих неподвижные особенности, получены в работах Н.С. Габбасова и его учеников (например, [6]–[9]). Данная статья продолжает исследования в области интегральных уравнений и посвящена обоснованию метода механических квадратур для сингулярных интегральных уравнений с неподвижной особенностью.

Рассматривается интегральное уравнение вида

$$u(x) - \int_0^1 \frac{K(x,t)}{t} u(t)dt = f(x), \quad 0 \le x \le 1, \tag{1}$$

где $K(x,t)$ и $f(x)$ — заданные в своих областях определения функции.

Обозначим через K оператор, определяемый интегральным слагаемым уравнения (1):

$$Ku \equiv \int_0^1 \frac{K(x,t)}{t} u(t)dt.$$

Тогда уравнение (1) в операторной форме имеет вид

$$Au = f, \tag{2}$$

где $A = E - K$, а E — единичный оператор. Предположим, что $K(x,t)$ удовлетворяет следующим условиям (**K**):

Поступила 15.12.2014

1) $K(x,0)=0$;
2) $|K(x,t_1)-K(x,t_2)|\le M_1|t_1-t_2|^\alpha$, $0<\alpha\le 1$, $M_1=\mathrm{const}>0$;
3) $|K(x_1,t)-K(x_2,t)|\le M_2 t^\alpha|x_1-x_2|^\alpha$, $0<\alpha\le 1$, $M_2=\mathrm{const}>0$.

При условиях 1) и 2) видно, что имеет место неравенство

$$\|Ku\|_C=\max_{0\le x\le 1}\left|\int_0^1\frac{K(x,t)}{t}u(t)dt\right|\le\frac{M_1}{\alpha}\|u\|_C,\quad C=C[0,1].$$

Тогда при $M_1<\alpha$

$$\|K\|_{C\to C}\le\frac{M_1}{\alpha}=\lambda(\alpha)<1.$$

Из известных классических результатов (например, [1], с. 211) существует A^{-1}, причем

$$\|A^{-1}\|_{C\to C}\le\frac{1}{1-\lambda(\alpha)}.$$

Следовательно, в этом случае существует единственное решение уравнения (2), а вместе с ним и уравнения (1) $u^*(x)$, причем

$$\|u^*\|_{\mathrm{C}}\le\frac{1}{1-\lambda(\alpha)}\|f\|_C.$$

Далее рассмотрим сходящийся квадратурный процесс

$$\int_0^1\frac{\varphi(t)}{t}dt=\sum_{k=1}^N d_k\varphi(t_k)+R_N(\varphi), \tag{3}$$

где $0\le t_1<t_2<\dots<t_N\le 1$, $\{d_k\}$ — вещественные числа.

Уравнение (1) будем решать методом механических квадратур, основанном на применении формулы (3). Тогда для определения приближенных значений $\{\widetilde{u}_k\}$ искомой функции $u^*(x)$ в узлах $\{t_k\}_{k=\overline{1,N}}$ имеем следующую систему линейных алгебраических уравнений:

$$\widetilde{u}_j-\sum_{k=1}^N d_kK(t_j,t_k)\widetilde{u}_k\ =f(t_j),\quad j=\overline{1,N}. \tag{4}$$

Для квадратурного процесса (3) потребуем выполнения условия

$$\sum_{k=1}^N|d_k|t_k^\alpha\le d,\quad d=d(\alpha)<\frac{1}{M_1}. \tag{5}$$

Таким образом, система (4) имеет единственное решение $\{\widetilde{u}_j^*\}_{j=\overline{1,N}}$. Докажем это:

запишем эту систему в операторном виде $A_N\widetilde{u}=\widetilde{f}$, где $A_N=E_N-D_N$, E_N — единичная матрица, $D_N=\{d_kK(t_j,t_k)\}_{j,k=\overline{1,N}}$, $\widetilde{f}=\{f(t_j)\}_{j=\overline{1,N}}$, $\widetilde{u}=\{\widetilde{u}_j\}_{j=\overline{1,N}}$.

Если X_N — N-мерное вещественное пространство с нормой $\|\widetilde{u}\|_{X_N}\ =\max\limits_{1\le j\le N}|\widetilde{u}_j|$, то, используя условия 1) и 2) из **(K)**, а также (5), имеем

$$\|D_N\|_{X_N\to X_N}\ =\max_{1\le j\le N}\sum_{k=1}^N|d_kK(t_j,t_k)|=$$
$$=\max_{1\le j\le N}\sum_{k=1}^N|d_k\left(K(t_j,t_k)-K(t_j,0)\right)|\le M_1\sum_{k=1}^N|d_k|\,t_k^\alpha\le\ M_1d<1.$$

В силу известных результатов (например, [1], с. 211) существует обратный оператор A_N^{-1} и

$$\|A_N^{-1}\|_{X_N \to X_N} \leq \frac{1}{1 - M_1 d},$$

а система (4) имеет единственное решение.

Займемся далее исследованием погрешности метода механических квадратур в узлах, т. е. изучением величины

$$\gamma_N = \max_{1 \leq j \leq N} |u^*(t_j) - \widetilde{u}_j^*|. \tag{6}$$

Обозначим через $H^\alpha(M;0,1)$ класс функций $\varphi(x)$, непрерывных на $[0,1]$ и удовлетворяющих условию $|\varphi(t_1) - \varphi(t_2)| \leq M|t_1 - t_2|^\alpha$, где $0 < \alpha \leq 1$, $M = \mathrm{const} > 0$, $t_1, t_2 \in [0,1]$ (класс Гёльдера). Через $H_0^\alpha(M;0,1)$ обозначим класс $H^\alpha(M;0,1)$ при условии $\varphi(0) = 0$. Тогда

$$R_N\left(H_0^\alpha(M;0,1)\right) = \sup_{\varphi \in H_0^\alpha(M;0,1)} \left|R_N\big(\varphi; \{t_k\}_{k=\overline{1,N}}, \{d_k\}_{k=\overline{1,N}}\big)\right|$$

есть остаток квадратурной формулы (3) на всем классе $H_0^\alpha(M;0,1)$, где

$$R_N\left(\varphi; \{t_k\}_{k=\overline{1,N}}, \{d_k\}_{k=\overline{1,N}}\right) = R_N(\varphi).$$

Лемма 1. *Если в уравнении* (1) $K(x,t)$ *удовлетворяет условиям* $(\mathbf{K})$ *и правая часть* $f \in H^\alpha(M_3;0,1)$, *то функция* $K(x,t)u^*(t)$, *где* $u^*(t)$ *— решение уравнения* (1), *принадлежит классу* $H_0^\alpha(M;0,1)$ *по переменной* t.

Доказательство. Так как

$$u^*(x) = \int_0^1 \frac{K(x,t)}{t} u^*(t)dt + f(x),$$

то, используя условие 3) из $(\mathbf{K})$, получим

$$|u^*(x_1) - u^*(x_2)| \leq \int_0^1 \frac{|K(x_1,t) - K(x_2,t)\|u^*(t)|}{t} dt + |f(x_1) - f(x_2)| \leq$$
$$\leq \frac{M_2}{\alpha}|x_1 - x_2|^\alpha \|u^*\|_C + M_3|x_1 - x_2|^\alpha \leq M_4|x_1 - x_2|^\alpha. \tag{7}$$

В силу условия 1) из $(\mathbf{K})$ $K(x,0)u^*(0) = 0$ и, учитывая (7), имеем

$$|K(x,t_1)u^*(t_1) - K(x,t_2)u^*(t_2)| \leq$$
$$\leq |K(x,t_1)\left(u^*(t_1) - u^*(t_2)\right) + u^*(t_2)\left(K(x,t_1) - K(x,t_2)\right)| \leq$$
$$\leq \max_{0 \leq x \leq 1} |K(x,t_1)| M_4 |t_1 - t_2|^\alpha + |u^*(t_2)| M_1 |t_1 - t_2|^\alpha \leq M|t_1 - t_2|^\alpha, \quad M = \mathrm{const} > 0.$$

Таким образом, $K(x,t)u^*(t) \in H_0^\alpha(M;0,1)$ по переменной t. □

Лемма 2. *При условиях* $(\mathbf{K})$ *и* $M_1 d < 1$ *погрешность метода механических квадратур для уравнения* (1) *оценивается неравенством*

$$\gamma_N \leq \frac{1}{1 - M_1 d} R_N\left(H_0^\alpha(M;0,1)\right). \tag{8}$$

Доказательство. Из (1), (4) и (6) следует

$$\gamma_N = \max_{1\le j\le N}\left|\int_0^1 \frac{K(t_j,t)}{t}u^*(t)dt - \sum_{k=1}^N d_k K(t_j,t_k)\widetilde{u}_k^*\right| \le$$

$$\le \max_{1\le j\le N}|R_N(K(t_j,t)u^*(t))| + \gamma_N \max_{1\le j\le N}\sum_{k=1}^N |d_k K(t_j,t_k)|. \quad (9)$$

Используя условия 1) и 2) из (**K**) и неравенство (5), имеем

$$\max_{1\le j\le N}\sum_{k=1}^N |d_k|(|K(t_j,t_k) - K(t_j,0)|) \le M_1 \sum_{k=1}^N |d_k|\, t_k^\alpha \le M_1 d < 1. \quad (10)$$

Из (9) и (10) получим $\gamma_N(1-M_1 d) \le \max_{1\le j\le N}|R_N(K(t_j,t)u^*(t))|$. Отсюда согласно лемме 1 вытекает оценка (8). □

2. Оценка погрешности метода механических квадратур в узлах

В качестве квадратурной формулы в (3) выберем

$$\int_0^1 \frac{\varphi(t)}{t}dt = \sum_{k=1}^N d_k^0 \varphi(t_k^0) + R_N(\varphi), \quad (11)$$

где $t_k^0 = \frac{k(k+1)}{(N+1)^2}$, $d_k^0 = 2\ln\frac{k+1}{k}$. Формула (11) является наилучшей квадратурной формулой на классе функций $W_0^1(M;0,1)$[1] ([10]).

Теорема 1. *На всем классе* $H_0^\alpha(M;0,1)$ *для остатка квадратурной формулы* (11) *справедлива оценка*

$$R_N\left(H_0^\alpha(M;0,1)\right) \le M\left(\frac{1+2^\alpha}{\alpha(\alpha+1)}\frac{1}{(N+1)^\alpha} + \frac{1}{\alpha(N+1)^{2\alpha}}\right). \quad (12)$$

Доказательство. Для любой $\varphi \in H_0^\alpha(M;0,1)$ имеем

$$|R_N(\varphi) = \left|\int_0^1 \frac{\varphi(t)}{t}dt - \sum_{k=1}^N 2\ln\frac{k+1}{k}\varphi(t_k^0)\right| =$$

$$= \left|\int_0^{\frac{1}{(N+1)^2}} \frac{\varphi(t)}{t}dt + \sum_{k=1}^N \int_{(\frac{k}{N+1})^2}^{(\frac{k+1}{N+1})^2} \frac{\varphi(t)-\varphi(t_k^0)}{t}dt\right| \le$$

$$\le M\left(\int_0^{\frac{1}{(N+1)^2}} t^{\alpha-1}dt + \sum_{k=1}^N \int_{(\frac{k}{N+1})^2}^{(\frac{k+1}{N+1})^2} \frac{\left|t-\frac{k(k+1)}{(N+1)^2}\right|^\alpha}{t}dt\right) =$$

$$= M\left(\frac{1}{\alpha(N+1)^{2\alpha}} + \sum_{k=1}^N\left(\int_{\left(\frac{k}{N+1}\right)^2}^{\frac{k(k+1)}{(N+1)^2}} \frac{\left(\frac{k(k+1)}{(N+1)^2}-t\right)^\alpha}{t}dt + \int_{\frac{k(k+1)}{N+1^2}}^{\frac{(k+1)^2}{(N+1)^2}} \frac{\left(t-\frac{k(k+1)}{(N+1)^2}\right)^\alpha}{t}dt\right)\right). \quad (13)$$

[1] $W_0^1(M;0,1)$ — класс функций $\varphi(x)$ абсолютно непрерывных на отрезке $[0,1]$ и имеющих на нем кусочно-непрерывную производную $\varphi'(x)$, для которой $|\varphi'(x)| \le M$ и $\varphi(0)=0$.

Так как

$$\int_{\left(\frac{k}{N+1}\right)^2}^{\frac{k(k+1)}{(N+1)^2}} \frac{\left(\frac{k(k+1)}{(N+1)^2}-t\right)^\alpha}{t}dt \leq \frac{k^{\alpha-1}}{(\alpha+1)(N+1)^{2\alpha}},$$

$$\int_{\frac{k(k+1)}{N+1^2}}^{\frac{(k+1)^2}{(N+1)^2}} \frac{\left(t-\frac{k(k+1)}{(N+1)^2}\right)^\alpha}{t}dt \leq \frac{(k+1)^\alpha}{(\alpha+1)k(N+1)^{2\alpha}} \leq \frac{2^\alpha}{\alpha+1}\frac{k^{\alpha-1}}{(N+1)^{2\alpha}},$$

то из (13) получим

$$|R_N(\varphi)| \leq M\left(\frac{1}{\alpha(N+1)^{2\alpha}} + \frac{1+2^\alpha}{(\alpha+1)(N+1)^{2\alpha}}\sum_{k=1}^{N}k^{\alpha-1}\right). \tag{14}$$

Далее, используя неравенства

$$k^{\alpha-1} \leq \int_{k-1}^{k} x^{\alpha-1}dx = \frac{1}{\alpha}\left(k^\alpha-(k-1)^\alpha\right),$$

$$\sum_{k=1}^{N}k^{\alpha-1} \leq 1+\frac{1}{\alpha}\sum_{k=2}^{N}\left(k^\alpha-(k-1)^\alpha\right) = 1-\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\alpha}N^\alpha < \frac{1}{\alpha}(N+1)^\alpha,$$

из (14) вытекает (12). □

Следует отметить, что в работе [11] рассматривались также вопросы, связанные с асимптотической оптимальностью квадратурных формул для сингулярных интегралов с особенностью в нулевой точке.

Теперь докажем, что

$$\sum_{k=1}^{N} d_k^0 t_k^{0\alpha} \leq \frac{2}{\alpha} = d. \tag{15}$$

Действительно,

$$(k(k+1))^\alpha 2\ln\frac{k+1}{k} \leq 2\int_{k(k+1)}^{(k+1)^2}\frac{x^\alpha}{x}dx \leq 2\int_{k^2}^{(k+1)^2} x^{\alpha-1}dx = \frac{2}{\alpha}\left((k+1)^{2\alpha}-k^{2\alpha}\right).$$

Тогда

$$\sum_{k=1}^{N} d_k^0 t_k^{0\alpha} \leq \frac{2}{\alpha(N+1)^{2\alpha}}\sum_{k=1}^{N}\left((k+1)^{2\alpha}-k^{2\alpha}\right) = \frac{2}{\alpha}(N+1)^{-2\alpha}\left((N+1)^{2\alpha}-1\right) \leq \frac{2}{\alpha} = d.$$

Учитывая неравенство (15), из леммы 2 и теоремы 1 вытекает

Теорема 2. *Пусть в уравнении* (1) $K(x,t)$ *удовлетворяет условиям* (**K**), *причем* $M_1 < \frac{\alpha}{2}$, *а правая часть* $f \in H^\alpha(M_3;0,1)$, $0 < \alpha \leq 1$. *Тогда для погрешности метода механических квадратур, основанного на формуле* (11), *в узлах* $t_k^0 = \frac{k(k+1)}{(N+1)^2}$, $k = \overline{1,N}$, *имеет место оценка*

$$\gamma_N \leq \frac{M}{1-\frac{2}{\alpha}M_1}\left(\frac{1+2^\alpha}{\alpha(\alpha+1)}\frac{1}{(N+1)^\alpha} + \frac{1}{\alpha(N+1)^{2\alpha}}\right). \tag{16}$$

3. Равномерная оценка погрешности метода механических квадратур

Не всегда бывает достаточным использовать информацию о точном решении $u^*(x)$, содержащемся в векторе $\{u^*(t_j)\}_{j=\overline{1,N}}$ и аппроксимирующем его векторе $\left\{\widetilde{u}_j^*\right\}_{j=\overline{1,N}}$. Поэтому достаточно часто требуется приближенное аналитическое представление для $u^*(x)$. Такое представление можно осуществить двумя способами (например, [3], с. 37).

Способ 1. За приближенное решение уравнения (1) принимается функция

$$u_N^*(x) = L_N(\widetilde{u}^*, x) = \left\{ \begin{array}{ll} \widetilde{u}_1^* & \text{при } 0 \le x \le t_1; \\ \widetilde{u}_j^* \frac{t_{j+1}-x}{h_j} + \widetilde{u}_{j+1}^* \frac{x-t_j}{h_j} & \text{при } t_j \le x \le t_{j+1},\ j = \overline{1, N-1}; \\ \widetilde{u}_N^* & \text{при } t_N \le x \le 1 \end{array} \right\}, \tag{17}$$

где $\left\{\widetilde{u}_j^*\right\}_{j=\overline{1,N}}$ — решение системы (4), $h_j = t_{j+1} - t_j$, а $L_N(\widetilde{u}^*, x)$ — интерполяционный сплайн первой степени на интервале $[t_1, t_N]$ (например, [12], с. 41).

Способ 2. За приближенное решение принимается функция

$$u_N^*(x) = f(x) + \sum_{k=1}^{N} d_k K(x, t_k) \widetilde{u}_k^*, \tag{18}$$

где $\left\{\widetilde{u}_k^*\right\}_{k=\overline{1,N}}$ — решение системы (4).

Теорема 3. *Пусть уравнение* (1) *решается методом механических квадратур, основанном на формуле* (11)*, где* $t_k^0 = \frac{k(k+1)}{(N+1)^2}$, $d_k^0 = 2\ln\frac{k+1}{k}$*, для функции* $K(x,t)$ *выполнены условия* $(\mathbf{K})$ *и* $M_1 < \frac{\alpha}{2}$*, а правая часть уравнения* (1) *— функция* $f \in H^\alpha(M_3; 0, 1)$*, где* $0 < \alpha \le 1$.

Тогда

1) *если за приближенное решение уравнения* (1) *принимается функция* $u_N^*(x) = L_N(\widetilde{u}^*, x)$*, определяемая равенством* (17)*, то имеет место равномерная сходимость приближенных решений к точному и справедлива оценка*

$$\|u^* - u_N^*\|_C = \max_{0\le x\le 1} \left|u^*(x) - L_N\left(\widetilde{u}^*, x\right)\right| \le$$
$$\le \frac{M_4 2^\alpha}{(N+1)^\alpha} + \frac{M}{1 - \frac{2}{\alpha} M_1} \left(\frac{1+2^\alpha}{\alpha(\alpha+1)} \frac{1}{(N+1)^\alpha} + \frac{1}{\alpha(N+1)^{2\alpha}} \right); \tag{19}$$

2) *если за приближенное решение уравнения* (1) *принимается функция* (18)*, то имеет место сходимость приближенных решений к точному в равномерной метрике со скоростью*

$$\|u^* - u_N^*\|_C \le \frac{M}{1 - \frac{2}{\alpha} M_1} \left(\frac{1+2^\alpha}{\alpha(\alpha+1)} \frac{1}{(N+1)^\alpha} + \frac{1}{\alpha(N+1)^{2\alpha}} \right). \tag{20}$$

Доказательство. Рассмотрим способ 1 приближения. С учетом ([12], с. 44–45) имеем

$$\|u^* - L_N\widetilde{u}^*\|_C \le \|u^* - L_N u^*\|_C + \|L_N u^* - L_N \widetilde{u}^*\|_C \le$$
$$\omega(u^*) + \|L_N\|_{X_N \to C} \max_{1\le j\le N} \left|u_j^* - \widetilde{u}_j^*\right|; \tag{21}$$

здесь $\omega(u^*) = \max_{0\le i\le N} \omega_i(u^*)$, где

$$\omega_0(u^*) = \max_{0\le x\le t_1^0} \left|u^*(x) - u^*(t_1^0)\right| \le \frac{M_4 2^\alpha}{(N+1)^{2\alpha}},$$

$$\max_{1\le i\le N-1}\omega_i(u^*)\le \max_{1\le i\le N-1}\max_{t',t''\in[t_i^0,t_{i+1}^0]}\left|u^*(t'')-u^*(t')\right|\le \frac{M_4 2^\alpha}{(N+1)^\alpha},$$

$$\omega_N(u^*)=\max_{t_N^0\le x\le 1}\left|u^*(x)-u^*(t_N^0)\right|\le \frac{M_4}{(N+1)^\alpha}.$$

Так как $\|L_N\|_{X_N\to C}=1$, то отсюда, учитывая (6) и неравенство (16), из (21) получим оценку (19).

Рассмотрим способ 2 приближения. Имеем

$$\|u^*-u_N^*\|_C=\max_{0\le x\le 1}\left|\int_0^1\frac{K(x,t)}{t}u^*(t)dt-\sum_{k=1}^N d_k^0K(x,t_k^0)\widetilde{u_k^*}\right|\le$$

$$\le\max_{0\le x\le 1}\left|\int_0^1\frac{K(x,t)}{t}u^*(t)dt-\sum_{k=1}^N d_k^0K(x,t_k^0)u^*(t_k^0)\right|+$$

$$+\max_{0\le x\le 1}\left|\sum_{k=1}^N d_k^0K(x,t_k^0)(u^*(t_k^0)-\widetilde{u_k^*})\right|\le R_N\left(H_0^\alpha(M;0,1)\right)+\gamma_N M_1\sum_{k=1}^N\left|d_k^0\right|t_k^{0\alpha}. \quad (22)$$

Используя неравенства (15), (8) и (12), из (22) получим оценку (20). □

4. Об оптимизации методов механических квадратур

Будем следовать Б.Г. Габдулхаеву [4], получившему важные результаты по оптимизации приближенных методов решений интегральных уравнений. Обозначим ([4], с. 183)

$$V_N^0(F)=\inf_{\{d_k,t_k\}}\sup_{u^*\in F}\max_{1\le j\le N}\left|u^*(t_j)-\widetilde{u}_j^*\right|, \quad (23)$$

где inf берется по векторам коэффициентов $\{d_k\}_{k=\overline{1,N}}$ и узлов $\{t_k\}_{k=\overline{1,N}}$, удовлетворяющих условию (5). $V_N^0(F)$ представляет собой оптимальную оценку погрешности квадратурных методов решения уравнения (1) на классе $F\subset C[0,1]$.

Теорема 4. *Пусть F_0 — класс решений уравнения* (1), *когда правая часть — из класса $H_\alpha(M_3;0,1)$, $0<\alpha\le 1$, а $K(x,t)$ — из соответствующего класса функций, удовлетворяющих условиям* (**K**), *причем $M_1d<1$. Тогда*[2]

$$V_N^0(F_0)\asymp\frac{1}{N^\alpha}, \quad (24)$$

и оптимальным по порядку квадратурным методом решения уравнения (1) *на классе F_0 является метод, основанный на квадратурном процессе* (11) *с узлами $t_k^0=\frac{k(k+1)}{(N+1)^2}$ и коэффициентами $d_k^0=2\ln\frac{k+1}{k}$, $k=1,2,\ldots,N$.*

Доказательство. Из полученных выше результатов имеем

$$V_N^0(F_0)\le\frac{c_1}{N^\alpha},\quad c_1=\mathrm{const}>0.$$

С другой стороны, возьмем функцию $K(x,t)=tK_1(x,t)$, которая удовлетворяет условиям (**K**), а $K_1(x,t)$ принадлежит классу $H^\alpha(M;0,1)=H^\alpha$ по каждому из переменных. В этом случае решаем интегральное уравнение Фредгольма

$$u\,(x)-\int_0^1K_1\,(x,t)\,u\,(t)\,dt=f(x),$$

[2]Знак $\asymp$ означает слабую эквивалентность.

для которого известна оптимальная оценка погрешности квадратурных методов решения снизу $V_N^0(H^\alpha) \geq \frac{c_2}{N^\alpha}$, где $\sup$ в равенстве (23) берется по всем K_1, $f \in H^\alpha$ ([4], сс. 183, 184). Следовательно, $V_N^0(F_0) > V_N^0(H^\alpha) \geq \frac{c_2}{N^\alpha}$ и поэтому оценка (24) доказана, а вместе с ней и доказана теорема 4. □

Далее, если за приближенное решение уравнения (1) принять функцию (17) или (18), то, следуя ([4], с. 184), за оптимальную оценку погрешности квадратурных методов решения уравнения (1) на классе F может быть принято соотношение

$$V_N^1(F) = \inf_{\{d_k,t_k\}} \sup_{u^* \in F} \|u^* - u_N^*\|_C. \tag{25}$$

Теорема 5. *Пусть F_0 — класс функций, определенный в теореме 4. Тогда*

$$V_N^1(F_0) \asymp \frac{1}{N^\alpha},$$

и оптимальным по порядку квадратурным методом решения уравнения (1) *на классе F_0 является метод, основанный на квадратурном процессе* (11) *с узлами $t_k^0 = \frac{k(k+1)}{(N+1)^2}$ и коэффициентами $d_k^0 = 2\ln\frac{k+1}{k}$, $k = 1, 2, \ldots, N$, и приближенными решениями*:

1) $u_N^*(x) = L_N(\widetilde{u}^*, x)$ — *интерполяционный сплайн первой степени, совпадающий в узлах t_j^0 с $\widetilde{u_j^*}$ $(j = \overline{1, N})$ — решением системы* (4), *и определяемый формулой* (17);
2) $u_N^*(x) = f(x) + \sum\limits_{k=1}^{N} d_k^0 K(x, t_k^0)\widetilde{u_k^*}$, *где* $t_k^0 = \frac{k(k+1)}{(N+1)^2}$, $d_k^0 = 2\ln\frac{k+1}{k}$, $k = 1, 2, \ldots, N$.

Доказательство. В силу соотношений (23), (24) и (25) имеем

$$V_N^1(F_0) \geq V_N^0(F_0) \geq \frac{c_3}{N^\alpha}, \quad c_3 = \mathrm{const} > 0.$$

С другой стороны, из теоремы 3 вытекает

$$V_N^1(F_0) \leq \frac{c_4}{N^\alpha}, \quad c_4 = \mathrm{const} > 0,$$

откуда следуют утверждения теоремы. □

Литература

[1] Канторович Л.В., Акилов Г.П. *Функциональный анализ* (Наука, М., 1977).
[2] Канторович Л.В., Крылов В.И. *Приближенные методы высшего анализа* (Физматгиз, М., 1962).
[3] Гавурин М.К. *Лекции по методам вычислений* (Наука, М., 1971).
[4] Габдулхаев Б.Г. *Оптимальные аппроксимации решений линейных задач* (Казанск. гос. ун-т, Казань, 1980).
[5] Лифанов И.К. *Метод сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент* (ТОО "Янус", М., 1995).
[6] Габбасов Н.С. *Оптимальный метод решения интегральных уравнений третьего рода*, Докл. РАН **362** (1), 12–15 (1998).
[7] Габбасов Н.С. *Методы решения линейного интегрального уравнения с ядром, имеющим неподвижные особенности*, Изв. вузов. Матем., № 5, 12–20 (2001).
[8] Габбасов Н.С. *Методы решения интегральных уравнений Фредгольма в пространствах обобщенных функций* (Казанск. гос. ун-т, Казань, 2006).
[9] Габбасов Н.С., Замалиев Р.Р. *Специальный вариант метода подобластей для интегральных уравнений третьего рода с особенностями в ядре*, Изв. вузов. Матем., № 10, 19–26 (2014).
[10] Онегов Л.А. *Об одной наилучшей квадратурной формуле для сингулярных интегралов с неподвижной особенностью*, Изв. вузов. Матем., № 9, 76–79 (1981).
[11] Бойков И.В. *Оптимальные по точности алгоритмы приближенного вычисления сингулярных интегралов* (Саратовск. гос. ун-т, Саратов, 1983).

[12] Завьялов Ю.С., Квасов Б.И., Мирошниченко В.Л. *Методы сплайн-функций* (Наука, М., 1980).

Л.А. Онегов

Казанский государственный архитектурно-строительный университет,
ул. Зеленая, д. 1, г. Казань, 420043, Россия,

e-mail: leonid.onegov@yandex.ru

L.A. Onegov

The method of mechanical quadratures for integral equations with fixed singularity

Abstract. We investigate the method of mechanical quadratures for integral equations with fixed singularity. We establish estimates of the error of this method based on a quadrature process, which is the best in the class of differentiable functions. We prove the convergence of the method in finite-dimensional and uniform metrics. We find that the investigated quadrature method is optimal by order on the Hölder class of functions.

Keywords: integral equation, quadrature process, solution, convergence, accuracy, optimality.

L.A. Onegov

Kazan State University of Architecture and Civil Engineering,
1 Zelyonaya str., Kazan, 420043, Russia,

e-mail: leonid.onegov@yandex.ru