ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2001 МАТЕМАТИКА № 5 (468)

УДК 517.95

К.Б. САБИТОВ, Р.Р. ИЛЬЯСОВ

О НЕКОРРЕКТНОСТИ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

1. Рассмотрим задачу типа задачи Дарбу для телеграфного уравнения

$$Lu(x,y) \equiv u_{xx} - u_{yy} + \lambda u = 0, \tag{1}$$

где λ — произвольное комплексное число в области D, ограниченной характеристиками AC $(x+y=0)$, CB $(x-y=1)$ уравнения (1) и отрезком AB оси $y=0$.

Задача 1. Найти в области D функцию $u(x,y)$, удовлетворяющую условиям

$$u(x,y) \in C(\overline{D}) \wedge C^1(D \cup AB) \wedge C^2(D), \tag{2}$$

$$Lu(x,y) \equiv 0, \quad (x,y) \in D, \tag{3}$$

$$u_y(x,0) = \nu(x), \quad 0 < x < 1, \tag{4}$$

$$(u_x - u_y)\big|_{AC} = \varphi(x), \quad 0 < x < \frac{1}{2}, \tag{5}$$

где $\nu(x)$ и $\varphi(x)$ — заданные достаточно гладкие функции.

Задача (2)–(5) возникает при изучении аналога задачи Неймана для уравнений смешанного типа [1]. Отметим, что в [2], [3] изучались задачи Дарбу для уравнения (1).

Для исследования задачи (2)–(5) применим метод, разработанный в [3] для решения задачи Дарбу для уравнения (1) в области D с данными

$$u_y(x,0) = \nu(x), \quad 0 < x < 1, \quad u(x,y)\big|_{AC} = \varphi(x), \quad 0 \le x \le \frac{1}{2}.$$

На плоскости (x,y) перейдем к характеристическим координатам $\xi = x+y$, $\eta = x-y$. Тогда уравнение (1) принимает вид

$$L_0(v) = v_{\xi\eta} + \frac{\lambda}{4} v = 0, \tag{6}$$

где $v(\xi,\eta) = u(\frac{\xi+\eta}{2}, \frac{\xi-\eta}{2})$, а область D отображается в область $\Delta = \{(\xi,\eta) \mid 0 < \xi < \eta < 1\}$ и соответственно задача 1 ставится так:

Задача 1′. Найти функцию $v(\xi,\eta)$, удовлетворяющую условиям

$$v(\xi,\eta) \in C(\overline{\Delta}) \wedge C^1(\Delta \cup A'B'), \quad v_{\xi\eta} \in C(\Delta), \tag{7}$$

$$L_o v(\xi,\eta) \equiv 0, \quad (\xi,\eta) \in \Delta, \tag{8}$$

$$(v_\xi - v_\eta)\big|_{A'B'} = (v_\xi - v_\eta)\big|_{\eta=\xi} = \nu(\xi), \quad 0 < \xi < 1, \tag{9}$$

$$v_\eta(\xi,\eta)\big|_{A'C'} = v_\eta(0,\eta) = \frac{1}{2}\psi(\frac{\eta}{2}) = \psi_1(\eta), \quad 0 < \eta < 1. \tag{10}$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 99-01-00934, и Министерства образования Российской Федерации по фундаментальным исследованиям в области математики (проект № 22).

Теорема 1. *Если функции* $\nu(\xi), \psi_1(\xi) \in C(0,1) \wedge L[0,1]$, *то существует решение задачи* (7)–(10) *и все решения этой задачи определяются по формуле*

$$v(\xi_0,\eta_0) = \int_0^{\xi_0} \nu(\xi) J_0[\sqrt{\lambda(\xi-\xi_0)(\xi-\eta_0)}]d\xi + v(0,0)J_0[\sqrt{\lambda\xi_0\eta_0}] +$$
$$+ \int_0^{\xi_0} \psi_1(\eta)B_2(0,\eta;\xi_0,\eta_0)d\eta + \int_{\xi_0}^{\eta_0} \psi_1(\eta)B_1(0,\eta;\xi_0,\eta_0)d\eta, \quad (11)$$

$$B(\xi,\eta;\xi_0,\eta_0) = \begin{cases} B_1(\xi,\eta;\xi_0,\eta_0) = R(\xi,\eta;\xi_0,\eta_0), & \eta > \xi_0; \\ B_2(\xi,\eta;\xi_0,\eta_0) = R(\xi,\eta;\xi_0,\eta_0) + R(\eta,\xi;\xi_0,\eta_0), & \eta < \xi_0, \end{cases}$$

где $R(\xi,\eta;\xi_0,\eta_0) = J_0(\sqrt{\lambda(\xi-\xi_0)(\eta-\eta_0)})$ — *функция Римана уравнения* (6), *а* $J_0(\cdot)$ — *функция Бесселя нулевого порядка.*

Доказательство теоремы 1 проводится аналогично [3].

Теорема 1′. *Если* $\nu(x) \in C^1(0,1) \wedge L[0,1]$, $\psi(x) \in C^1(0,1/2) \wedge L[0,1/2]$, *то существует решение задачи* (2)–(5) *и все решения этой задачи определяются по формуле* (11), *в которой* $\xi_0 = x+y$, $\eta_0 = x-y$, $v(\xi_0,\eta_0) = u(x,y)$.

Из формулы (11) следует, что краевая задача (2)–(5) поставлена некорректно. Любое комплексное число λ является точкой спектра однородной задачи (2)–(5) для оператора струны и соответствующие собственные функции находятся по формуле $u_\lambda(x,y) = J_0[\sqrt{\lambda(x^2-y^2)}]$. Для того чтобы краевая задача (2)–(5) стала корректной, достаточно задать значение искомого решения $u(x,y)$ в одной точке вдоль характеристики $\overline{AC}$, например, в точке $A(0,0)$.

2. Рассмотрим уравнение

$$l(u) \equiv S(u) + \lambda u \equiv u_{xx} - u_{yy} + \frac{2q}{x}u_x + \lambda u = 0, \quad (12)$$

где λ — произвольное комплексное число, q — произвольное действительное число, не равное нулю, в области G, ограниченной характеристиками AC $(x+y=0)$, CB $(x-y=1)$, BK $(x+y=1)$ и KA $(x-y=0)$ уравнения (12).

Заметим, что уравнение (12) является в области G строго гиперболическим и в единственной граничной точке $(0,0)$ один из коэффициентов обращается в бесконечность первого порядка. Оказывается, наличие такой особенности сильно влияет на корректность постановки классических задач Гурса и Дарбу. Уравнение (12) при $\lambda = 0$ возникает при сведении пространственного аналога задачи Трикоми к плоской задаче Трикоми для уравнения [4], [5]

$$u_{xx} + \operatorname{sgn} y\, u_{yy} + \frac{2q}{x}u_x = 0.$$

Спектральная задача Дарбу (задача $D_{1\lambda}$). Найти значения параметра λ и соответствующие функции $u(x,y)$, удовлетворяющие условиям

$$u(x,y) \in C(\overline{D}) \wedge C^2(D), \quad (13)$$

$$S(u) + \lambda u = 0, \quad (x,y) \in D, \quad (14)$$

$$u\big|_{AC} = u(x,-x) = 0, \quad 0 \le x \le 1/2, \quad (15)$$

$$u\big|_{AB} = u(x,0) = 0, \quad 0 \le x \le 1, \quad (16)$$

где $D = G \cap \{y < 0\}$.

Спектральная задача Дарбу (задача $D_{2\lambda}$). Найти значения параметра λ и соответствующие функции $u(x,y)$, удовлетворяющие условиям (13)–(15) и

$$\lim_{y \to 0-0} u_y(x,y) = u_y(x,0-0) = 0, \ 0 < x < 1. \quad (16^*)$$

Спектральная задача Гурса. Найти значения λ и соответствующие функции $u(x,y)$, удовлетворяющие условиям

$$u(x,y) \in C(\overline{G}) \wedge C^2(G), \tag{17}$$

$$S(u) + \lambda u = 0, \quad (x,y) \in G, \tag{18}$$

$$u(x,y)\big|_{AC} = u(x,-x) = 0, \quad 0 \le x \le 1/2, \tag{19}$$

$$u(x,y)\big|_{AK} = u(x,x) = 0, \quad 0 \le x \le 1/2. \tag{20}$$

В области D введем следующие новые переменные:

$$\theta = -\frac{y^2}{x^2 - y^2}, \quad \sigma = \sqrt{x^2 - y^2}, \tag{21}$$

где $0 < \sigma < 1$, $-\infty < \theta < 0$. Тогда уравнение (12) принимает вид

$$4\theta(1-\theta)u_{\theta\theta} + 4\left[\frac{1}{2} - (1+q)\theta\right]u_\theta + \sigma^2 u_{\sigma\sigma} + (1+2q)\sigma u_\sigma + \lambda\sigma^2 u = 0. \tag{22}$$

В уравнении (22), разделяя переменные $u(x,y) = P(\sigma)Q(\theta) \neq 0$, получим

$$P''(\sigma) + \frac{1+2q}{\sigma}P'(\sigma) + \left(\lambda - \frac{\mu^2}{\sigma^2}\right)P(\sigma) = 0, \tag{23}$$

$$\theta(1-\theta)Q''(\theta) + \left[\frac{1}{2} - (1+q)\theta\right]Q' + \frac{\mu^2}{4}Q(\theta) = 0, \tag{24}$$

где μ — произвольная вещественная постоянная.

Поскольку решение $u(x,y)$ ограничено в D, то в качестве решения уравнения (23) возьмем функцию [6]

$$P(\sigma) = (\sqrt{\lambda}\sigma)^{-q} J_\rho(\sqrt{\lambda}\sigma), \quad \rho = \sqrt{\mu^2 + q^2}. \tag{25}$$

Уравнение (24) представляет собой известное гипергеометрическое уравнение [7], общее решение которого определяется формулой

$$Q(\theta) = c_1 Q_1(\theta) + c_2 Q_2(\theta) = c_1 F\left(\frac{1-\rho-q}{2}, \frac{q-\rho}{2}, \frac{1}{2}; \frac{\theta}{\theta-1}\right)\Big(1-\theta\Big)^{\frac{\rho-q}{2}} + $$

$$+ c_2 F\left(\frac{\rho+q}{2}, \frac{1+\rho-q}{2}, \rho+1; \frac{1}{1-\theta}\right)\Big(1-\theta\Big)^{-\frac{q+\rho}{2}}, \tag{26}$$

где c_1 и c_2 — произвольные постоянные, $F(\cdot)$ — гипергеометрическая функция Гаусса. Отметим, что частные решения $Q_1(\theta)$ и $Q_2(\theta)$ имеют следующую асимптотику при $\theta \to -\infty$:

$$Q_1(\theta) = O\left[(1-\theta)^{\frac{\rho-q}{2}}\right] \to +\infty, \quad Q_2(\theta) = O\left[(1-\theta)^{-\frac{\rho+q}{2}}\right] \to +0,$$

а при $\theta \to 0-0$ имеют асимптотику $Q_1(\theta) = O(1)$, $Q_2(\theta) = O(1)$.

Нас интересуют решения уравнения (24), обращающиеся в нуль на характеристике $AC(x+y=0)$, т. е. при $\theta \to -\infty$. Таким свойством обладает функция $Q_2(\theta)$.

Таким образом, на основании (21), (25) и (26) решения уравнения (12), равные нулю на характеристике AC, имеют вид

$$u(x,y) = \left(\frac{x^2-y^2}{x^2}\right)^{\frac{q+\rho}{2}} F\left(\frac{q+\rho}{2}, \frac{1-q+\rho}{2}, \rho+1; \frac{x^2-y^2}{x^2}\right) \times$$

$$\times \left[\lambda(x^2-y^2)\right]^{-\frac{q}{2}} J_\rho\left[\sqrt{\lambda(x^2-y^2)}\right], \quad (x,y) \in D. \tag{27}$$

Справедливо следующее утверждение.

Лемма. *Если функция $u(x,y)$ в области D является решением уравнения* (12) *и* $u(x,y) \in C^3(D)$, *то производная* $u_y(x,y)$ *также является в D решением уравнения* (12).

Для доказательства достаточно продифференцировать уравнение (12) по переменной y. $\square$

Тогда в силу этой леммы частная производная по y от функции (27) является решением уравнения (12). Эта производная, обозначенная через $v(x,y)$, имеет вид

$$v(x,y) = (\rho+q)\frac{1}{x}\Big(\frac{x^2-y^2}{x^2}\Big)^{\frac{\rho+q-2}{2}} F\Big(\frac{\rho-q}{2}, \frac{1+\rho+q}{2}, 1+\rho; \frac{x^2-y^2}{x^2}\Big) \times$$
$$\times \big[\lambda(x^2-y^2)\big]^{-\frac{q}{2}} J_\rho\big[\sqrt{\lambda(x^2-y^2)}\big] +$$
$$+ \Big(\frac{x^2-y^2}{x^2}\Big)^{\frac{q+\rho}{2}} F\Big(\frac{q+\rho}{2}, \frac{1-q+\rho}{2}, \rho+1; \frac{x^2-y^2}{x^2}\Big) \times$$
$$\times \big(-\lambda(\rho-q)y\big[\lambda(x^2-y^2)\big]^{-\frac{q+2}{2}} J_\rho\big[\sqrt{\lambda(x^2-y^2)}\big] + \lambda y\big[\lambda(x^2-y^2)\big]^{-\frac{q+1}{2}} J_{\rho+1}\big[\sqrt{\lambda(x^2-y^2)}\big]\big). \quad (28)$$

В формуле (28), переходя к пределу при $y \to 0-0$, получим

$$v(x,0) = (\rho+q)\frac{1}{x} F\Big(\frac{\rho-q}{2}, \frac{1+\rho+q}{2}, 1+\rho; 1\Big)(\sqrt{\lambda}x)^{-q} J_\rho(\sqrt{\lambda}x).$$

Будем искать решения задач Дарбу с нулевыми краевыми условиями. Функция $v(x,y)$, как легко заметить, обращается в нуль на характеристике AC. Нас интересует функция $v(x,y)$, которая зависит от вещественной константы μ, равная нулю на отрезке AB. Значит, необходимо положить $\rho = -q$. Отсюда с учетом (25) имеем $q \le 0$ и $\mu = 0$. Тогда функции (27) и (28) при $\mu = 0$ принимают вид

$$u(x,y) = \big[\lambda(x^2-y^2)\big]^{-\frac{q}{2}} J_{-q}\big[\sqrt{\lambda(x^2-y^2)}\big], \quad (29)$$
$$v(x,y) = -\lambda y\big[\sqrt{\lambda(x^2-y^2)}\big]^{-q-1} J_{-q-1}\big[\sqrt{\lambda(x^2-y^2)}\big]. \quad (30)$$

Функция (30) в области D при $q < -1$ является решением уравнения (12) в классе функций $C(\overline{D}) \wedge C^2(D)$, на характеристике AC и на отрезке AB она обращается в нуль. Следовательно, любое комплексное число λ является точкой спектра задачи (13)–(16) для оператора S при $q < -1$, и соответствующие собственные функции этой задачи определяются по формуле (30).

Таким образом, доказана

Теорема 2. *Любое комплексное число λ является точкой спектра первой задачи Дарбу для оператора S при $q < -1$, и соответствующие собственные функции этой задачи определяются по формуле* (30).

Теперь рассмотрим задачу (13)–(15), (16*) для уравнения (12). Если функцию (29) рассмотреть в области D, то нетрудно заметить, что она является решением уравнения (12) в классе функций $C(\overline{D}) \wedge C^1(D \cup AB) \wedge C^2(D)$, на характеристике AC обращается в нуль, и ее производная по нормали к оси $y=0$ в силу (30) также равна нулю. Значит, функция (29) является решением задачи (13)–(15), (16*). Следовательно, и здесь любое комплексное число λ является точкой спектра задачи $D_{2\lambda}$ для оператора S при $q < 0$, и соответствующие собственные функции этой задачи определяются по формуле (29).

Теорема 3. *Любое комплексное число λ является точкой спектра второй задачи Дарбу для оператора S при $q < 0$, и соответствующие собственные функции этой задачи определяются по формуле* (29).

Вернемся к задаче Гурса (17)–(20) для уравнения (12). Функцию $u(x,y)$, заданную в области D формулой (29), четным образом продолжим в область G, т. е. положим

$$w(x,y) = \begin{cases} u(x,y), & (x,y) \in D; \\ u(x,-y), & (x,y) \in G \cap \{y>0\}. \end{cases}$$

Тогда $w(x,y)$ примет вид (29), где $(x,y) \in G$. Нетрудно заметить, что $w(x,y)$ принадлежит классу функций $C(\overline{G}) \wedge C^2(G)$, удовлетворяет уравнению (12) и обращается в нуль на характеристиках AC $(x+y=0)$ и AK $(x-y=0)$.

Теорема 4. *Любое комплексное число λ является точкой спектра задачи Гурса для оператора S при $q<0$, и соответствующие собственные функции этой задачи определяются по формуле* (29), *где $(x,y) \in G$.*

Литература

1. Сабитов К.Б. *О спектре задачи Моравец для уравнений* // Тр. Всероссийск. научн. конф. "Физика конденсированного состояния". Матем. методы физ. – Стерлитамакск. филиал АН РБ. – Стерлитамак, 1997. – Т. 1. – С. 110–115.
2. Жегалов В.И. *Об одном случае задачи Трикоми* // Тр. семин. по краев. задачам. – Казань: изд-во Казанск. ун-та, 1966. – Вып. 3. – С. 28–36.
3. Сабитов К.Б. *Построение в явном виде решений задач Дарбу для телеграфного уравнения и их применение при обращении интегральных уравнений* // Дифференц. уравнения. – 1990. – Т. 26. – № 6. – С. 1023–1032.
4. Бицадзе А.В. *К проблеме уравнений смешанного типа в многомерных областях* // ДАН СССР. – 1956. – Т. 110. – № 6. – С. 901–902.
5. Пулькин С.П. *Исследования по уравнениям смешанного типа*: Дис. ... докт. физ.-матем. наук. – Казань, 1958.
6. Сабитов К.Б., Тихомиров В.В. *О построении собственных значений и функций одной газодинамической задачи Франкля* // Матем. моделир. – 1990. – Т. 2. – № 10. – С. 100–109.
7. Бейтмен Г., Эрдейи А. *Высшие трансцендентные функции. Гипергеометрическая функция. Функция Лежандра.* – М.: Наука, 1973. – 296 с.

Стерлитамакский государственный педагогический институт

Стерлитамакский филиал Академии наук Республики Башкортостан

Поступила
01.03.1999