ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2001 МАТЕМАТИКА № 9 (472)

УДК 517.984 : 517.986

Е.В. ВЛАДОВА, М.С. МАТВЕЙЧУК

СПЕКТРАЛЬНАЯ ТЕОРЕМА В ПРОСТРАНСТВЕ С БИЛИНЕЙНОЙ ФОРМОЙ

Спектральная теорема играет фундаментальную роль в функциональном анализе. Она интенсивно используется, например, при построении квантовой теории меры и интеграла [1]. Известно обобщение этой теоремы на операторы в пространстве с билинейной формой (б. ф.), определяющей индефинитную метрику ([2]; [3], гл. IV, с. 252). В данной статье спектральная теорема распространяется на операторы, самосопряженные относительно ограниченных б. ф., определяемых ограниченно обратимыми операторами.

Пусть H — комплексное гильбертово пространство со скалярным произведением (с. п.) $(\cdot,\cdot)$. Обозначим через $B(H)$ множество всех ограниченных операторов в H и через G — множество всех операторов из $B(H)$, имеющих ограниченный обратный. Пусть $T \in B(H)$. Введем б. ф. $\langle f,g\rangle_T := (Tf,g)$ $\forall f,\, g \in H$. В специальном случае $T \in G$, $T > 0$ билинейную форму $\langle\cdot,\cdot\rangle_T$ будем обозначать иногда через $(\cdot,\cdot)_T$. Отметим, что $(\cdot,\cdot)_T$ обладает всеми свойствами с. п., и линейное пространство H, наделенное $(\cdot,\cdot)_T$, является гильбертовым. Будем обозначать его через H_T.

Б. ф. $a(\cdot,\cdot)$ назовем *унитарнопорожденной*, если существует унитарный относительно $(\cdot,\cdot)$ оператор Y такой, что $a(\cdot,\cdot) = (Y\cdot,\cdot)$. Оператор $B^* \in B(H)$ назовем *сопряженным* к $B \in B(H)$ (= T-*сопряженным*) относительно б. ф. $\langle\cdot,\cdot\rangle_T$, если $\langle Bf,g\rangle_T = \langle f,B^*g\rangle_T$ $\forall f,\, g \in H$. Для унитарного самосопряженного $J \in G$, $J \neq \pm I$ б. ф. $\langle\cdot,\cdot\rangle_J$ обычно обозначается через $[\cdot,\cdot]_J$ и называется индефинитной метрикой. Пусть всюду ниже $U = \int\limits_0^{2\pi} e^{i\lambda} e_U(d\lambda)$ — унитарный оператор. Здесь $e_U : \mathcal{B}_S \to \Pi_U$ — спектральная мера на σ-алгебре $\mathcal{B}_S$ борелевских подмножеств единичной сферы $S \subset C$ и Π_U — множество всех ортогональных проекторов в H.

Отметим очевидное

Предложение 1. *Пусть $T \in G$. Оператор B T-самосопряжен тогда и только тогда, когда $B = T^{-1}B^*T$ $(= T^{*-1}B^*T^*)$ или, что то же самое, $TB = B^*T$.*

Если B T-самосопряжен, то $(T^*T^{-1})B^* = B^*(T^*T^{-1})$.

Пусть $T \in G$, $T = XY$, где $X > 0$ и $X, Y \in G$. Оператор $A \in B(H)$ T-самосопряжен в H тогда и только тогда, когда A Y-самосопряжен в H_X.

A и A^* U-самосопряжены, одновременно при этом $U(AA^*) = (A^*A)U$, $U(A^*A) = (AA^*)U$.

Докажем, например, последнее равенство. Пусть A U-самосопряжен. Из $A = U^{-1}A^*U = UA^*U^{-1}$ имеем $UA = A^*U$ и $UA^* = AU$. Поэтому

$$U(A^*A) = (UA^*)A = (AU)A = A(UA) = A(A^*U).$$

Пусть $T \in B(H)$, $T > 0$. Если оператор $Y \in B(H)$ таков, что $Y^{-1} = T^{-1}Y^*T$, то Y — унитарный оператор в H_T.

Следующее утверждение проверяется непосредственно.

Предложение 2. *Пусть $T \in G$, $T > 0$. Отображение $\phi_T(\cdot) := T^{-1/2} \cdot T^{1/2}$ осуществляет изоморфизм линеала самосопряженных операторов (решетки ортогональных проекторов (=идемпотентов)) в H и линеала самосопряженных операторов (решетки ортогональных проекторов) в H_T.*

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант 99-01-00441, и Министерства образования России, грант Е00-01-172.

Следующие свойства не имеют аналогов для самосопряженных и J-самосопряженных операторов:

(i) если A U-самосопряжен, то UA не обязательно самосопряжен (для контрпримера достаточно рассмотреть $A = J$, $U = e^{i\theta}J$);
(ii) если $\langle Ax, x\rangle_U \geq 0$ $\forall x \in H$, то A не обязательно U-самосопряжен (напр., $A = e^{-i\theta}J$, $U = e^{i\theta}J$);
(iii) если A U-самосопряжен, то A не является, вообще говоря, разностью операторов со свойством положительности (ii) (напр., когда $A = I$ и $U = e^{i\theta}J$).

Обозначим через $B_U(H)$ множество всех U-самосопряженных операторов. Для любого подмножества $M \subseteq B(H)$ введем множество $M' := \{B \in B(H) : BA = AB \ \forall A \in M\}$. Обозначим через M^{pr} множество всех ортогональных проекторов из M. Пусть $R(U)$ $(R(U^2))$ — слабозамкнутая *алгебра, порожденная оператором U (U^2 соответственно). Очевидно,

$$R(U^2) \subseteq R(U) \subseteq R'(U) \subseteq R'(U^2).$$

Пусть $A \in B_U(H)$. Тогда $A + A^* \in B_U(H) \cap R'(U)$ и $U^*(A - A^*)U = -(A - A^*)$. Если $A + A^* = \int \lambda de_\lambda$ — спектральное разложение оператора $A + A^*$, то $e_\lambda \in B_U(H) \cap R'(U)$ $\forall \lambda$. Пусть $P \in R^{\mathrm{pr}}(U)$. Тогда $P^\perp(A + A^*)P = 0$; здесь $P^\perp := I - P$. Отсюда

$$P^\perp AP = -P^\perp A^*P = -(PAP^\perp)^*, \tag{1}$$

$$PAP^\perp = -PA^*P^\perp = -(P^\perp AP)^*. \tag{2}$$

Предложение 3. *Для любых $A \in B_U(H)$ и $P \in B^{\mathrm{pr}}(U)$ имеем $|P^\perp A^*P| = |P^\perp AP|$ и $|P^\perp AP| \in R'(U)$.*

Доказательство. Из определения U-самосопряженного оператора имеем

$$U^*|P^\perp AP|^2U = U^*(PA^*P^\perp)(P^\perp AP)U = P(U^*A^*U)P^\perp(U^*AU)P = \\ = (PAP^\perp)(P^\perp A^*P) = |P^\perp A^*P|^2.$$

В силу (1), (2) получаем

$$U^*|P^\perp AP|^2U = U^*(-PAP^\perp)(-P^\perp A^*P)U = \\ = P(U^*AU)P^\perp(U^*A^*U)P = (PA^*P^\perp)(P^\perp AP) = |P^\perp AP|^2.$$

Поэтому $|P^\perp A^*P| = |P^\perp AP|$ и $|P^\perp AP| \in R'(U)$. $\square$

Используя (1), вычислим

$$|P^\perp AP| = ((P^\perp AP)^*(P^\perp AP))^{1/2} = (-(PAP^\perp)(P^\perp AP))^{1/2} = ((PAP^2) - PA^2P)^{1/2}.$$

Предложение 4. *Пусть унитарный оператор U таков, что $R(U) \neq R(U^2)$ и $P \in R^{\mathrm{pr}}(U) \setminus R(U^2)$. Тогда частичная изометрия w из полярного представления $P^\perp AP = w|P^\perp AP|$ оператора $P^\perp AP$, $A \in B_U(H)$, такова, что $U^*wU = -w$.*

Доказательство. В силу (1) и предложения 3 получаем

$$-w|P^\perp AP| = -P^\perp AP = P^\perp A^*P = P^\perp U^*AUP = U^*(P^\perp AP)U = \\ = (U^*wU)U^*|P^\perp AP|U = (U^*wU)|P^\perp AP|.$$

В силу единственности полярного представления имеем $U^*wU = -w$. $\square$

Замечание 1. Равенство $U^*wU = -w$ влечет $w^*, w \in R'(U^2)$ и $w^*w, ww^* \in R'(U)$.

Следующее предложение выделяет "сферическую" (=EU), а предложение 6 — "гиперболическую" (=FU) части унитарного оператора U.

Предложение 5. *Пусть $\Gamma := \{p \in R^{pr}(U^2) : \forall q \in R^{\mathrm{pr}}(U) \ q \leq p \Rightarrow q \in R(U^2)\}$ и $E := \sup\{p : p \in \Gamma\}$. Тогда $AE = EA = A^*E$ $\forall A \in B_U(H)$.*

Действительно, из определения Γ следует, что $E \in R(U^2)$ и

$$ER(U^2) = ER(U) \subset ER'(U) = ER'(U^2).$$

Поэтому $EA = AE$ и $UEA = AEU = AUE = UA^*E = UEA^*$. $\square$

Обозначим через W множество всех частичных изометрий w, $w \neq 0$, таких, что $U^*wU = -w$. Отметим предложение

$W \neq \emptyset$, если $R(U)\backslash R(U^2) \neq \emptyset$.

Действительно, в случае $R(U) \setminus R(U^2) \neq \emptyset$ существует $P \in R^{\mathrm{pr}}(U) \setminus R(U^2)$. Обозначим через K ортогональный проектор на замыкание $R'(U^2)PH$, т. е. K — центральный носитель в $R'(U^2)$ проектора P. Поскольку $P \notin R(U^2)$, то $K > P$. Таким образом, найдется $A \in B_U(H)$ такой, что $P^{\perp}AP \neq 0$. Поэтому частичная изометрия w из полярного представления $P^{\perp}AP = w|P^{\perp}AP|$ оператора $P^{\perp}AP$ является ненулевой изометрией из W. $\square$

В силу включений $E \in R^{\mathrm{pr}}(U^2)$ и $w \in R'(U^2)$ имеем $Ew = wE$. Предположим, что $w = wE$. Тогда в силу включения $w \in ER'(U)$ $(= ER'(U^2))$ имеем $Uw = wU$, а значит, $w = U^*wU = -w$. Получаем противоречие с $w \neq 0$. Итак, $w = E^{\perp}w$ $(= wE^{\perp})$, $w \in W$.

Предложим другую характеристику проектора $F := I - E$. Отметим, что $F \neq 0$ тогда и только тогда, когда $R(U^2) \neq R(U)$.

Предложение 6. *Если $F \neq 0$, то $F = \bigvee\{w^*w : w \in W\}$.*

Доказательство. Пусть $Q := \bigvee\{w^*w : w \in W\}$. По замечанию 1 $Q \in R'(U)$. Так как $wF = w$, то $Q \leq F$. Предположим, что $Q < F$. Обозначим через K ортогональный проектор на замыкание $R'(U)(F-Q)H$, т. е. K — центральный носитель в $R'(U)$ проектора $F - Q$. Следовательно, $K \in R(U)$. Очевидно, $K \leq F$.

Если предположить на время, что для каждого $q \in R^{\mathrm{pr}}(U)$ неравенство $q \leq K$ влечет $q \in R(U^2)$, то получим $K \in \Gamma$ и, следовательно, $K \leq E$. Вместе с неравенством $K \leq F$ $(= I - E)$ это означает, что $K = 0$. Но $0 \neq F - Q \leq K$. Получили противоречие.

Итак, существует $P \in R^{\mathrm{pr}}(U) \setminus R(U^2)$, $P \leq K$. Пусть $A \in B_U(H)$ таков, что $P^{\perp}AP \neq 0$, и пусть $w \in W$ — частичная изометрия из предложения 4. Поскольку $w^*w \leq P$, то существует $B \in R'(U)$ такой, что $w^*wB(F-Q) \neq 0$. Пусть

$$w^*wB(F-Q) = v|w^*wB(F-Q)|$$

— полярное представление оператора $w^*wB(F-Q)$. Очевидно, wv — ненулевая частичная изометрия. Поскольку $v \in R'(U)$, то $U^*wvU = -wU^*vU = -wv$. По построению $0 \neq v^*w^*wv \leq F - Q$, что невозможно. Таким образом, предположение $Q < F$ приводит к противоречию. $\square$

Следствие 1. Проектор E из предложения 5 есть наибольший проектор из $R(U^2)$, для которого оператор AE самосопряжен при любом $A \in B_U(H)$.

Доказательство. Пусть $N \in R^{\mathrm{pr}}(U^2)$ и $N \wedge E^{\perp} \neq 0$. В силу предложения 6 и замечания 1 найдется частичная изометрия $w \in W$, для которой $(N \wedge E^{\perp})w(N \wedge E^{\perp}) = w$. Оператор $w - w^* \in B_U(H)$ и не является самосопряженным. В то же время $(w - w^*)N = w - w^*$. Следовательно, если $K \in R^{\mathrm{pr}}(U^2)$ и оператор AK самосопряжен для любого $A \in B_U(H)$, то $K \leq E$. $\square$

Очевидно, $U = \int\limits_{[0,\pi)} e^{i\theta}(e_U d(\theta) - e_U(d\theta + \pi))$ и $U^2 = \int\limits_{[0,\pi)} e^{i2\theta}(e_U(d\theta) + e_U(d\theta + \pi))$. Определим оператор $J_U := e^+ - e^-$, где $e^+ := e_U([0,\pi))$ и $e^- := I - e^+$. Положим $V_U := \int\limits_{[0,\pi)} e^{i\theta}(e_U(d\theta) + e_U(d\theta + \pi))$. Очевидно, $V_U \in R(U^2)$, $J_U \in R(U)$ и $V_U J_U = J_U V_U = U$.

Предложение 7. *Если $e \in (R'(U))^{pr}$ и $e \leq e^+$ или $e \leq e^-$, то $ewe = 0$ $\forall w \in W$.*

Доказательство. Пусть, например, $e \le e^+$. Тогда справедливость предложения вытекает из следующих равенств:

$$-eweU = Uewe = V_U J_U ewe = V_U ewe = eweV_U = eweJ_U V_U = eweU.$$

Следовательно $ewe = 0$. $\square$

Предложение 8. *Если* $e^+ \in R(U^2)$, *то* $R(U^2) = R(U)$.

Доказательство. Убедимся, что $e \le e^+$ и $e \in R^{\mathrm{pr}}(U)$ влечет $e \in R(U^2)$. Предположим противоположное: $e \notin R(U^2)$. Тогда по предложению 4 существует ненулевая частичная изометрия $w \in W$ с начальным проектором в e и конечным в $e^+ - e$. Это значит, что $e^+we^+ = w$, что противоречит предложению 7. Итак, $e \in R(U^2)$. Аналогично, $e \le I - e^+$ и $e \in R^{\mathrm{pr}}(U)$ влечет $e \in R(U^2)$. Таким образом, $R^{\mathrm{pr}}(U^2) = R^{\mathrm{pr}}(U)$. Это влечет $R(U^2) = R(U)$. $\square$

Общий вид U-самосопряженного оператора. Пусть $A \in B_U(H)$. Имеем

$$U(e^+Ae^+) = e^+(UA)e^+ = e^+A^*Ue^+ = (e^+A^*e^+)U.$$

Следовательно, $e^+Ae^+ \in B_U(H) \subset R'(U^2)$. Поскольку $V_U \in R(U^2)$, получаем

$$U(e^+Ae^+) = V_U J_U(e^+Ae^+) = V_U(e^+Ae^+)J_U = (e^+Ae^+)U.$$

Таким образом, $e^+Ae^+ = e^+A^*e^+$. По аналогии $e^-Ae^- = e^-A^*e^-$ и $e^-Ae^- \in R'(U)$. Отметим, что если $e^+ \in R(U^2)$, то $e^-Ae^+ = 0$. Пусть $e^-Ae^+ = w|e^-Ae^+|$ — полярное представление оператора e^-Ae^+. По предложению 3 $|e^-Ae^+| \in R'(U)$. В силу равенства (2)

$$A = e^+Ae^+ + e^-Ae^- + w|e^-Ae^+| - |e^-Ae^+|w^*.$$

Обратно, пусть $A_1, A_2 \in R'(U)$ — самосопряженные операторы и $w \in W$. Определим оператор

$$A := A_1 + wA_2 - A_2w^*. \tag{3}$$

Непосредственной проверкой убеждаемся, что $A \in B_U(H)$. Таким образом, равенство (3) дает общий вид оператора из $B_U(H)$.

Обозначим через $\mathcal{P}_U$ множество всех U-самосопряженных ($=U$-ортогональных) проекторов. Пусть $(p+p^*)_+$, $p \in \mathcal{P}_U$, — положительная часть оператора $p + p^*$. Обозначим через f_+ ортогональный проектор на подпространство $\overline{(p+p^*)_+H}$. Пусть $x := f_+pf_+$. В [4] доказано, что $x \ge f_+$ и $x \in R'(U)$. Общий вид U-самосопряженного проектора устанавливает следующее

Предложение 9 ([4]). *Пусть $p \in \mathcal{P}_U$ и $f_+^\perp pf_+ = w|f_+^\perp pf_+|$ — полярное представление оператора $f_+^\perp pf_+$. Тогда $U^*wU = -w$ и справедлива формула*

$$p = x + w(x^2 - x)^{1/2} - (x^2 - x)^{1/2}w^* - w(x - F_x)w^*. \tag{4}$$

Здесь F_x — ортогональный проектор на подпространство $\overline{xH}$.

Обратно, пусть $x \in R'(U)$ и $x \ge F_x$. Пусть существует частичная изометрия w, $U^*wU = -w$, с начальным проектором F_x и конечным e таким, что $e \perp f_+$. Тогда формула (4) определяет проектор из $\mathcal{P}_U$.

Пусть $T \in B(H)$. Самосопряженный относительно б. ф. $\langle\cdot,\cdot\rangle_T$ оператор $A \in B(H)$ назовем *$\langle\cdot,\cdot\rangle_T$-неотрицательным* (*=$T$-неотрицательным*, *$T$-неположительным*), если $\langle Ax, x\rangle_T \ge 0$ или $\Im\langle Ax, x\rangle_T > 0$ ($\langle Ax, x\rangle_T \le 0$ или $\Im\langle Ax, x\rangle_T < 0$ соответственно) для любых $x \in H$. Отметим, что введенное определение согласовывается с известным определением J-неотрицательного (J-неположительного) оператора в пространствах с индефинитной метрикой (см., напр., [3]).

Пусть $A \in B_U(H)$. Используя включения $V_U \in R(U^2)$ и $A \in R'(U^2)$, получаем

$$A = U^*A^*U = V_U^*(J_U A^* J_U)V_U = J_U A^* J_U. \tag{5}$$

Предложение 10. *Пусть $A \in B(H)$. Оператор A U-самосопряжен (U-неотрицателен, U-неположителен) тогда и только тогда, когда $A \in R'(U^2)$ и A J_U-самосопряжен (J_U-неотрицателен, J_U-неположителен).*

Доказательство. Первая часть утверждения очевидно следует из (5).

Пусть A U-неотрицатален. Согласно (5) J_UA самосопряжен. Предположим, что J_UA имеет ненулевую отрицательную часть $(J_UA)_-$. Пусть P_- — ортогональный проектор на замыкание $(J_UA)_-H$. Для любого $x \in P_-H$, $x \neq 0$ имеем

$$\langle Ax, x\rangle_U = (UAx, x) = (V_UJ_UAx, x) = (V_U(J_UA)_-x, x).$$

Учитывая, что $V_U{\in}R(U^2)$ и $J_UA{\in}R'(U^2)$, имеем или $(V_U(J_UA)_-x, x){<}0$, или $\Im(V_U(J_UA)_-x, x){<}0$. Получаем противоречие с U-неотрицательностью A. Итак, $J_UA \geq 0$. Следовательно, A J_U-неотрицателен.

Обратно, пусть $A \in R'(U^2)$ и A J_U-неотрицателен. Отсюда $(J_UAx, x) \geq 0$ $\forall x \in H$. Поскольку $V_U \in R(U^2)$ и $J_UA \in R'(U^2)$, то

$$\Im\langle Ax, x\rangle_U = \Im(UAx, x) = \Im(V_U(J_UA)x, x) > 0$$

или

$$\langle Ax, x\rangle_U = (UAx, x) = (V_U(J_UA)x, x) \geq 0.$$

Аналогичные рассуждения можно провести и для U-неположительного оператора. □

Основная

Теорема 1. *Пусть A — ограниченный неотрицательный относительно унитарнопорожденной б. ф. $a(\cdot,\cdot)$ оператор. Тогда каждому вещественному числу $\lambda \neq 0$ можно поставить в соответствие один и только один такой самосопряженный относительно $a(\cdot,\cdot)$ проектор E_λ, что функция $\lambda \to E_\lambda$ удовлетворяет следующим условиям:*

1) *если $\lambda \leq \mu$, то $E_\lambda E_\mu = E_\mu E_\lambda = E_\lambda$;*
2) *если $\lambda < 0$, то E_λ $a(\cdot,\cdot)$-неположителен, если $\lambda > 0$, то $I - E_\lambda$ $a(\cdot,\cdot)$-неотрицателен;*
3) *если $\lambda < -\|A\|$, то $E_\lambda = 0$, если $\lambda > \|A\|$, то $E_\lambda = I$;*
4) *если $\lambda \neq 0$, то существует сильный предел $s - \lim\limits_{\mu \searrow \lambda} E_\mu = E_{\lambda+0}$;*
5) *если T — ограниченный оператор, коммутирующий с A, то $E_\lambda T = TE_\lambda$;*
6) *спектр $\sigma(A|E_\lambda H)$ лежит в $(-\infty, \lambda]$, а $\sigma(A|(I - E_\lambda)H)$ лежит в $[\lambda, +\infty)$.*

Более того, интеграл $\int\limits_{-\|A\|-0}^{\|A\|} \nu dE_\nu$ сходится в сильной операторной топологии как несобственный интеграл с сингулярной точкой $\lambda = 0$, а оператор $S := A - \int\limits_{-\|A\|-0}^{\|A\|} \nu dE_\nu$ является ограниченным $a(\cdot,\cdot)$-неотрицательным, $S^2 = 0$, $SE_\lambda = E_\lambda S = 0$ при $\lambda < 0$ и $S(I - E_\lambda) = (I - E_\lambda)S = 0$ при $\lambda > 0$.

Доказательство. Пусть E из предложения 5 и унитарный оператор U таков, что $E = I$. Тогда все операторы из $B_U(H)$ самосопряжены и проекторы E_λ из их спектрального разложения дадут искомую проекторнозначную функцию. Поэтому доказательство теоремы 1 интересно только для случая, когда $E < I$. Заметим, что оно для случая $U = J$ (напомним, что $J = J^*$ и $I \neq \pm I$) получено многими математиками. Доказательство, в частности, из [2] (см. также [3], гл. IV, с. 252) в достаточной степени алгебраическое, оказывается без всяких изменений обобщается на алгебры Неймана. С учетом этого обобщения, формулы (5) и предложения 10 оно переносится и на U-неотрицательные операторы. Фактически, учитывая предложение 10, остается убедиться только, что проекторнозначная функция $\lambda \to E_\lambda$, построенная как в [2], [3] (только по симметрии J_U), принимает значения в $R'(U^2)$. Поэтому приведем здесь доказательство только пп. 1), 2) и последней части утверждения теоремы 1.

Положим $B := J_UA$. По предложению 10 $B \geq 0$. Таким образом, определен оператор $C := B^{1/2}J_UB^{1/2} = C^*$. Непосредственно проверяется, что $CB^{1/2} = B^{1/2}A$. Пусть $C = \int\limits_{-\|A\|-0}^{\|A\|} \lambda df_\lambda$ — спектральное разложение оператора C. Здесь учтено, что $\|C\| \leq \|B\| \leq \|A\|$. Будем считать разложение единицы f_λ непрерывным справа. Положим $C_\lambda := C \mid f_\lambda H$ при $\lambda < 0$ и $C_\lambda :=$

$C \mid (I-f_\lambda)H$ при $\lambda > 0$. Определим операторы $E_\lambda := J_U B^{1/2} C_\lambda^{-1} f_\lambda B^{1/2}$ при $\lambda < 0$ и $F_\lambda := J_U B^{1/2} C_\lambda^{-1}(I-f_\lambda)B^{1/2}$, $E_\lambda := I - F_\lambda$ при $\lambda > 0$. Заметим, что все операторы, построенные в этом абзаце, принадлежат алгебре $R'(U^2)$.

Операторы E_λ являются ограниченными при каждом $\lambda \neq 0$. Далее, если $\lambda < 0$ (соответственно $\lambda > 0$), то $C_\lambda^{-1} f_\lambda \leq 0$ ($C_\lambda^{-1}(I-f_\lambda) \geq 0$ соответственно). Следовательно, операторы $C_\lambda^{-1} f_\lambda$, $\lambda < 0$, и $C_\lambda^{-1}(I-f_\lambda)$, $\lambda > 0$, являются самосопряженными. Это означает, что оператор E_λ при $\lambda < 0$ ($I - E_\lambda$ при $\lambda > 0$) J_U-неположителен (J_U-неотрицателен соответственно). Применим теперь предложение 10. Получим, что E_λ, $\lambda < 0$, U-неположителен, а $I - E_\lambda$, $\lambda > 0$, U-неотрицателен.

Если $CC_\lambda^{-1} f_\lambda = f_\lambda$ при $\lambda < 0$ и $CC_\lambda^{-1}(I - f_\lambda) = I - f_\lambda$ при $\lambda > 0$, то $E_\lambda E_\mu = E_\mu E_\lambda = E_\lambda$ при $\lambda < \mu$. Таким образом, E_λ — проекторы.

Пусть теперь $\varepsilon > 0$. Непосредственно проверяются равенства

$$\int_{-\|A\|-0}^{-\varepsilon} \nu dE_\nu = J_U B^{1/2} C_{-\varepsilon}^{-1} \int_{-\|A\|-0}^{-\varepsilon} \nu df_\nu B^{1/2} = J_U B^{1/2} C_{-\varepsilon}^{-1} C_{-\varepsilon} f_{-\varepsilon} B^{1/2} = J_U B^{1/2} f_{-\varepsilon} B^{1/2}$$

и

$$\int_\varepsilon^{\|A\|} \nu dE_\nu = -\int_\varepsilon^{\|A\|} \nu d(I - E_\nu) = -J_U B^{1/2} C_\varepsilon^{-1} \int_\varepsilon^{\|A\|} \nu d(I - f_\lambda) B^{1/2} =$$
$$= J_U B^{1/2} C_\varepsilon^{-1} \int_\varepsilon^{\|A\|} \nu df_\nu B^{1/2} = J_U B^{1/2} C_\varepsilon^{-1} C_\varepsilon (I - f_\varepsilon) B^{1/2} =$$
$$= J_U B^{1/2}(I - f_\varepsilon) B^{1/2} = A - J_U B^{1/2} f_\varepsilon B^{1/2}.$$

Таким образом,

$$\int_{-\|A\|-0}^{\|A\|} \nu dE_\nu = A - J_U B^{1/2}(f_0 - f_{-0}) B^{1/2}.$$

Положим $S := J_U B^{1/2}(f_0 - f_{-0})B^{1/2}$. Так как $f_0 - f_{-0}$ — проектор на $\operatorname{Ker} C$, то

$$S^2 = J_U B^{1/2}(f_0 - f_{-0}) B^{1/2} J_U B^{1/2}) f_0 - f_{-0} B^{1/2} = J_U B^{1/2}(f_0 - f_{-0}) C (f_0 - f_{-0}) B^{1/2} = 0.$$

Аналогично, $SE_\lambda = E_\lambda S = 0$ при $\lambda < 0$ и $S(I - E_\lambda) = (I - E_\lambda)S = 0$ при $\lambda > 0$. □

Отметим, что сформулированный в теореме п. 2) получил более естественное, чем в [3], звучание. Сравнение условия 2) и условия 2) из ([3], с. 252) приведено в следующем легко устанавливаемом замечании к теореме.

Замечание. Условия 1) и 2) теоремы 1 влекут выполнение условия 2′) *если* $\lambda < \mu < 0$, *то* $[E_\lambda x, x]_{J_U} \geq [E_\mu x, x]_{J_U}$, *а если* $0 < \lambda < \mu$, *то* $[E_\lambda x, x]_{J_U} \leq [E_\mu x, x]_{J_U}$ *при всех* $x \in H$.

Обратно, из 2′) и условия 3) теоремы 1 следует 2).

Пусть $\mathcal{A}$ — алгебра Неймана. Унитарнопорожденную б. ф. $a(\cdot,\cdot)$ назовем *присоединенной* к $\mathcal{A}$, если в представлении $a(\cdot,\cdot) = \langle\cdot,\cdot\rangle_U$ унитарный оператор U принадлежит $\mathcal{A}$.

Отметим, что все сформулированные выше определения и предложения естественным образом переформулировываются на алгебры Неймана. Доказательства же этих утверждений дословно переносятся и на алгебры Неймана. Таким образом, теорема 1 обобщается следующим образом.

Теорема 2. *Пусть* $\mathcal{A}$ *— алгебра Неймана в* H, $a(\cdot,\cdot)$ *— унитарнопорожденная присоединенная к* $\mathcal{A}$ *б. ф. Пусть* $A \in \mathcal{A}$, $a(\cdot,\cdot)$ *— неотрицательный оператор. Тогда каждому вещественному числу* $\lambda \neq 0$ *можно поставить в соответствие один и только один такой самосопряженный относительно* $a(\cdot,\cdot)$ *проектор* $E_\lambda \in \mathcal{A}$, *что функция* $\lambda \to E_\lambda$ *удовлетворяет всем утверждениям теоремы* 1.

Сформулируем ряд нерешенных задач.

Проблема 1. Не является ли всякая б.ф. $\langle\cdot,\cdot\rangle_C$, $C \in G$, унитарнопорожденной?

Приведем операторный эквивалент этой задачи. Имеет ли в G решение система уравнений

$$XY = D, \quad X^{-1} Y^* X = Y^{-1} \tag{6}$$

с $X > 0$? Здесь $D \in G$ — заданный оператор.

Проблема 2. Описать операторы, которые становятся унитарными (нормальными) после замены скалярного произведения в H. Точнее, описать операторы $D \in G$, для которых существует $X > 0$ такой, что $D^{-1} = X^{-1}D^*X = D^\#$ ($DD^\# = D^\# D$, т.е. $D(X^{-1}D^*X) = (X^{-1}D^*X)D$ соответственно).

Комментарии. 1) Представление $D = XY$, где $X > 0$ и $Y^{-1} = X^{-1}Y^*X$ можно назвать *обобщенным полярным представленнием* оператора D. Проблема 1 тогда звучит так: для всякого ли $C \in G$ существует обобщенное полярное представление?

2) Если $D \in G$ — нормальный оператор и $D = V|D|$ — его полярное представление, то $X := |D|$, $Y := V$ является решением системы (6).

3) Если решение системы (6) существует, то $Y^2 = D^{*-1}D$.

4) Изучению операторного уравнения вида $T^{-1}S = ST^*$ посвящен ряд работ (см., напр., [5]–[7]).

5) В двумерном вещественном случае ответ на проблему 1 отрицателен.

Авторы благодарны А.М. Бикчентаеву за полезное обсуждение проблемы 1.

Литература

1. Луговая Г.Д., Шерстнев А.Н. *О проблеме линейности для неограниченных мер на проекторах* // Функц. анализ. – Ульяновск. – 1984. – С. 76–81.
2. Bognar J. *A proof of the spectral theorem for J-positive operators* // Acta Sci. Math. – 1983. – V. 45. – № 1–4. – P. 75–80.
3. Азизов Т.Я., Иохвидов И.С. *Основы теории линейных операторов в пространствах с индефинитной метрикой.* – М.: Наука, 1986. – 352 с.
4. Matvejchuk M.S. *Unitary self-adjoint logics of projections* // Intern. J. Theor. Physics. – 1997. – V. 37. – № 1. – P. 103–107.
5. Patel S.M. *Operators with left inverses similar to their adjoints* // Proc. Amer. Math. Soc. – 1973. – V. 41. – № 1. – P. 127–131.
6. Singh U.N., Mangla K. *Operators with inverses similar to their adjoints* // Proc. Amer. Math. Soc. – 1973. – V. 38. – № 2. – P. 258–260.
7. Deprima C.R. *Remarks on "Operators with inverses similar to their adjoints" by U.N. Singh and K. Mangla* // Proc. Amer. Math. Soc. – 1974. – V. 43. – № 2. – P. 478–480.

Ульяновский государственный
педагогический университет

Поступила
01.02.2000