ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1997 МАТЕМАТИКА № 10 (425)

УДК 517.546

И.М. КОЦУР, М.Ф. КОЦУР

О РАДИУСАХ n-ЛИСТНОЙ ВЫПУКЛОСТИ И ЗВЕЗДНОСТИ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ СПЕЦИАЛЬНЫХ КЛАССОВ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В КРУГЕ

Обозначим через $\tau^n_{\alpha,\theta}$, $0 \le \alpha < 1$, $0 \le \theta \le \pi$, $n = 1, 2, 3, \dots$, класс регулярных в круге $E = \{z : |z| < 1\}$ функций $w = g(z)$, $g(0) = 0$, $g'(0) = 0$, $g''(0) = 0, \dots, g^{(n-1)}(0) = 0$, $g^{(n)}(0) = (n-1)!$, удовлетворяющих условию

$$\operatorname{Re}\biggl(\frac{1 - 2z^n \cos\theta + z^{2n}}{z^{n-1}} g'(z)\biggr) > \alpha. \tag{1}$$

Так как

$$\varphi_{n,\theta} = \int_0^z (1 - 2\zeta^n \cos\theta + \zeta^{2n})^{-1} \zeta^{n-1} d\zeta$$

принадлежит классу выпуклых функций, то класс $\tau^1_{\alpha,\theta}$ является подклассом почти выпуклых функций [1], а его функции, следовательно, однолистны.

При $n = 1$ функция $\psi(z) = \frac{1}{i} g(iz)$ удовлетворяет неравенству

$$\operatorname{Re}[(1 - 2iz \cos\theta - z^2)\psi'(z)] > \alpha.$$

Отсюда при $\theta = \pi/2$ получаем подкласс Q_α [2] почти выпуклых функций $w = \psi(z)$, $\psi(0) = 0$, $\psi'(0) = 1$, определяемых условием

$$\operatorname{Re}[(1 - z^2)\psi'(z)] > \alpha. \tag{2}$$

Заметим, что при $\alpha = 0$ из (2) получаем подкласс функций, выпуклых по направлению мнимой оси.

Из (1) имеем

$$g'(z) = z^{n-1} \frac{p(z) + h}{(1 + h)(1 - 2z^n \cos\theta + z^{2n})}, \quad h = \frac{\alpha}{1 - \alpha},$$

где $p(z)$ принадлежит классу P регулярных в E функций, удовлетворяющих в E условиям $p(0) = 1$, $\operatorname{Re} p(z) > 0$.

Обозначим через $O^n_{\alpha,\theta}$ класс регулярных в E функций $w = s(z)$, $s(0) = s'(0) = s''(0) = \dots = s^{(n-1)}(0) = 0$, $s^{(n)}(0) = n!$, таких, что $s(z) = zg'(z)$, $g(z) \in \tau^n_{\alpha,\theta}$.

Установим точные границы выпуклости в классе $\tau^n_{\alpha,\theta}$. Для функций этого класса находим

$$\operatorname{Re}\biggl(1 + z\frac{g''(z)}{g'(z)}\biggr) = \operatorname{Re}\biggl(\frac{zp'(z)}{p(z) + h} + n\frac{1 - z^{2n}}{1 - 2z^n \cos\theta + z^{2n}}\biggr). \tag{3}$$

Если положить

$$T^n_{\alpha,\theta}(r) = \min_{p(z) \in P} \min_{|z| = r} \operatorname{Re}\biggl(\frac{zp'(z)}{p(z) + h} + \frac{n(1 - z^{2n})}{1 - 2z^n \cos\theta + z^{2n}}\biggr),$$

то радиус выпуклости определится наименьшим положительным корнем уравнения $T^n_{\alpha,\theta}(r) = 0$.

Пусть подкласс $P_2 \subset P$ состоит из функций вида

$$p(z) = \lambda_1 \frac{1 + ze^{-it_1}}{1 - ze^{-it_1}} + \lambda_2 \frac{1 + ze^{-it_2}}{1 - ze^{-it_2}},$$

где t_1 и t_2 — произвольные вещественные числа, а неотрицательные λ_1 и λ_2 удовлетворяют условию $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$. Известно [3], что минимум (3) достигается в P_2. Используя [3], имеем

$$\min \mathrm{Re}\left[\frac{zp'(z)}{p(z)+h} + \frac{(1-z^{2n})n}{1 - 2z^n\cos\theta + z^{2n}}\right] =$$

$$= \min \mathrm{Re}\left[\frac{p^2-1}{2(p+h)} + \frac{(\rho^2-\rho_0^2)e^{i2\psi}}{2(p+h)} + \frac{(1-z^{2n})n}{1+z^{2n}-2z^n\cos\theta}\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left(p + h - \frac{1-h^2}{p+h} - \frac{\rho^2-\rho_0^2}{|p+h|}\right) - h + n(a_n + \rho_n|\cos\theta|)^{-1}, \quad (4)$$

$$\rho = \frac{2r}{1-r^2}, \quad a = \frac{1+r^2}{1-r^2}, \quad \rho_0 = |p+h-(a+h)|, \quad \rho_n = \frac{2r^n}{1-r^{2n}},$$

где

$$a_n = \frac{1+r^{2n}}{1-r^{2n}}, \quad \frac{1+z^{2n}}{1-z^{2n}} = a_n + \rho_n e^{i\vartheta}, \quad -\pi \le \vartheta < \pi, \quad r = |z|, \quad z \in E.$$

Обозначим $p + h = Re^{i\omega}$, тогда (4) перепишем в виде

$$\min \mathrm{Re}\left(\frac{zp'(z)}{p(z)+h} + \frac{(1-z^{2n})n}{1+z^{2n}-2z^n\cos\theta}\right) = B + n(a_n+\rho_n|\cos\theta|)^{-1},$$

где

$$B = \frac{1}{2}\cos\omega\left(R - \frac{1-h^2}{R}\right) + \frac{1}{2R}(h^2 + 2ah + 1 + R^2 - 2R(a+h)\cos\omega) + h.$$

Таким образом, задача свелась к нахождению минимума величины $B + n(a_n + \rho_n|\cos\theta|)^{-1}$ в круге $|Re^{i\omega} - (a+h)| \le \rho$. Можно убедиться, что этот минимум достигается при $\omega = 0$. Будем иметь

$$B_0 = \left[B + n(a_n+\rho_n|\cos\theta|)^{-1}\right]_{\omega=0} = R + \frac{h^2+ah}{R} - a - 2h + n(a_n+\rho_n|\cos\theta|)^{-1}. \quad (5)$$

В результате получаем уравнение для определения радиуса выпуклости

$$2\sqrt{h^2+ah} - a - 2h + n(a_n+\rho_n|\cos\theta|)^{-1} = 0. \quad (6)$$

Если $R = R_1 = \sqrt{h^2+ah}$ принадлежит отрезку $[a-\rho+h, a+\rho+h]$, то радиус выпуклости определяется уравнением (6). Если $(a-\rho)^2 + h(a-2\rho) > 0$, то $R_1 \notin [a-\rho+h, a+\rho+h]$ и радиус выпуклости достигается в точке $R = a - \rho + h$. Уравнение для определения радиуса выпуклости для этого случая имеет вид

$$\rho(a-\rho)(a-\rho+h)^{-1} - n(a_n+\rho_n|\cos\theta|)^{-1} = 0. \quad (7)$$

Итак, радиус выпуклости определяется либо уравнением (7), либо (6). Можно убедиться, что сначала следует пользоваться уравнением (7), затем (6). Переходное значение $h_0(\theta)$ определяется наименьшим положительным корнем системы из уравнений (6) и (7). Окончательно получена

Теорема. *При отображении функциями $g(z) \in \tau^n_{\alpha,\theta}$ радиус выпуклости $r^0_n(h;\theta)$ вычисляется по формуле*

$$r^0_n(h;\theta) = \sqrt{(a^0_n-1)(a^0_n+1)^{-1}},$$

причем при $h < h_0(\theta)$ a^0_n — единственный больший единицы корень уравнения (7), а при $h > h_0$ a^0_n — единственный больший единицы корень уравнения (6).

Замечание. При $n = 1$ получаем результаты [4], а при $n = 1$, $\theta = \pi/2$ — результаты из [5].

В силу связи

$$\mathrm{Re}\biggl(1 + z\frac{g''(z)}{g'(z)}\biggr) = \mathrm{Re}\biggl(z\frac{s'(z)}{s(z)}\biggr), \quad g(z) \in \tau^n_{\alpha,\theta}, \quad s(z) \in O^n_{\alpha,\theta},$$

при отображении функциями класса $O^n_{\alpha,\theta}$ радиус звездности $r^*_n(h;\theta)$ равен радиусу выпуклости $r^0_n(h;\theta)$ из теоремы.

Экстремальные функции, реализующие точные оценки радиусов выпуклости и звездности, определяются аналогично [3], [5].

Литература

1. Kaplan W. *Close-to-convex schlicht functions* // Michigan Math. J. – 1952. – V. 1. – № 2. – P. 169–185.
2. Robertson M.S. *Analytic functions star-like in one direction* // Amer. J. Math. – 1936. – V. 58. – № 3. – P. 465–472.
3. Зморович В.А. *О границах выпуклости звездных функций порядка* α *в круге* $|\bar{z}| < 1$ *и круговой области* $0 < |z| < 1$ // Матем. сб. – 1965. – Т. 68. – № 4. – С. 518–526.
4. Коцур М.Ф. *Радиусы звездности и выпуклости в некоторых классах аналитических функций в круге* // Матем. заметки. – 1979. – Т. 25. – № 5. – С. 675–679.
5. Коцур М.Ф. *О границах звездности и выпуклости некоторых специальных классов аналитических функций в круге* // Изв. вузов. Математика. – 1977. – № 7. – С. 57–60.

Запорожский технический университет

Поступили
первый вариант 10.01.1995
окончательный вариант 12.05.1996