

В.И. ЛЕБЕДЕВ, А.А. МЕДОВИКОВ

ЯВНЫЙ МЕТОД ВТОРОГО ПОРЯДКА ТОЧНОСТИ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЖЕСТКИХ СИСТЕМ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

1. Введение

В работе рассматривается явный численный метод решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Явные методы имеют свои положительные и отрицательные качества. Среди положительных качеств явных методов можно назвать следующие: они просты при реализации, легко распараллеливаются и требуют относительно небольшого объема памяти. В работах [1], [2] используются переменные шаги по времени, связанные определенными соотношениями с корнями многочлена Чебышева. В результате получаются схемы первого порядка, в которых средний шаг по времени получается значительно выше, чем в схемах с постоянным шагом. В работах [2]–[6] рассматриваются также методы второго порядка точности по времени. Задача построения такого рода методов сводится к построению многочленов, обладающих свойством чебышевского альтернанса на определенном заданном отрезке и аппроксимирующих экспоненту со вторым порядком точности в окрестности нуля. Эту задачу можно свести к построению многочленов, наименее отклоняющихся от нуля [2], [5], с весом. В работах [5], [6] также рассмотрены численные методы построения таких многочленов. В [3], [7] показано, что многие из таких многочленов выражаются через многочлены Золотарева. Используя эти результаты, удастся сформулировать задачу построения явных методов второго порядка с увеличенной областью устойчивости и найти параметры этих методов, которые выражаются через корни многочленов Золотарева. Найдены параметры этих многочленов и в приложении даны таблицы корней, через которые выражаются параметры явного метода второго порядка с максимальной вещественной областью устойчивости.

2. Некоторые понятия и определения

Пусть $y(t) = (y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t))$ ($n \geq 1$) — вектор-столбец с координатами, зависящими от времени t . Рассмотрим следующую задачу Коши: при $t_0 \leq t \leq T$ найти $y(t)$ как решение задачи:

$$\frac{dy}{dt} = f(y, t), \quad y(t_0) = y_0, \quad (1)$$

где $y_0 = (y_{01}, y_{02}, \dots, y_{0n})$ — заданный вектор.

Пусть

$$J(t) = J(y, t) = \|f_i/y_j\| \quad (2)$$

— матрица Якоби от $f(y, t)$; в ней $y(t)$ — решение (1).

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант 96-01-01481. Графики были сделаны с помощью графической библиотеки, любезно предоставленной профессорами Г. Ваннером и Е. Хайрером.

Предположение 2.1. Будем предполагать, что все $\lambda_i(t)$ действительны, им соответствует полная система собственных векторов $\zeta_i(t)$ ($i = 1, \dots, n$) и $\text{Sp}(J(t))$ дает верную информацию о качественном поведении решения уравнения (1) (см. [8], пример Винограда). Существует постоянная $C_0 > 0$ такая, что

$$\lambda_i(t) \leq M(t) \leq C_0 \quad \text{для } t \in [t_0, T], \quad i = 1, \dots, n. \quad (3)$$

При этих условиях пусть

$$M = M(t) = \max_i(-\lambda(t)) > 0, \quad (4)$$

$$S = (T - t)M \gg 1 \quad (5)$$

при $t \in [t_0, T]$. Задачу Коши (1) при выполнении условий (3)–(5) назовем жесткой. Величину

$$\text{cou} = 2/M$$

назовем курантом; $0 < \text{cou} \ll 1$, если $M \gg 1$.

Известно, что в простейшей явной разностной схеме первого порядка (методе ломаных Эйлера):

$$y(t_1) = y(t_0) + hf(y(t_0), t_0)$$

условие устойчивости приводит к неравенству

$$h \leq \text{cou},$$

которое во многих задачах, в частности, в нестационарных задачах математической физики, накладывает сильные ограничения на размеры временных шагов. Мы будем находить приближенное решение задачи Коши $y(t)$, используя явную разностную схему с переменными шагами по времени следующего вида [1]:

$$\begin{aligned} Y_0 &= y_0, \\ U_{i+\frac{1}{2}} &= Y_i + h\alpha_{i+1}f(t_i, Y_i), \quad t_{i+\frac{1}{2}} = t_i + h\alpha_{i+1}, \\ U_{i+1} &= U_{i+\frac{1}{2}} + h\alpha_{i+1}f(t_{i+\frac{1}{2}}, U_{i+\frac{1}{2}}), \quad t_{i+1} = t_{i+\frac{1}{2}} + h\alpha_{i+1}, \\ Y_{i+1} &= U_{i+1} - h\nu_{i+1}\alpha_{i+1}(f(t_{i+\frac{1}{2}}, U_{i+\frac{1}{2}}) - f(t_i, Y_i)) = \\ &= U_{i+1} - \nu_{i+1}(U_{i+1} - 2U_{i+\frac{1}{2}} + Y_i), \quad i = 0, \dots, s-1, \\ y_1 &= Y_s \quad \text{если } s \text{ четное, или} \\ y_1 &= Y_{s-1} + h\alpha_s f(t_{s-1}, Y_{s-1}) \quad \text{если } s \text{ нечетное.} \end{aligned} \quad (6)$$

В дальнейшем будет предложен способ выбора параметров α_i , ν_i , для которых размер шага h может быть значительно больше:

$$h \leq 0.814 * s^2 * \text{cou} / 2. \quad (7)$$

3. Исследование точности и устойчивости разностной схемы

Если применить схему (6) к уравнению

$$\frac{dy}{dt} = -\lambda * y,$$

то решением будет $y_1 = P_s(\lambda h)y_0$, $z = \lambda h$. Функцию $P_s(\lambda h)$ называют *функцией устойчивости*.

В случае явного метода эта функция является полиномом. Для того чтобы метод был методом второго порядка, необходимо и достаточно, чтобы функция устойчивости аппроксимировала экспоненциальную функцию со вторым порядком [5]

$$P_s(z) = 1 - (\lambda h) + (\lambda h)^2/2 + \sum_{i=3}^s a_i(\lambda h)^i. \quad (8)$$

Для метода (6) многочлен устойчивости имеет вид:

$$P_s(\lambda h) = \prod_{i=1}^{s/2} [(1 - \alpha_i \lambda h)^2 - \nu_i \alpha_i^2 (\lambda h)^2], \quad (9)$$

Для того чтобы многочлен (9) имел вид (8) и метод имел порядок $p = 2$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись равенства

$$2 \sum_{i=1}^{s/2} \alpha_i = 1, \quad 2 \sum_{i < j}^{s/2} \alpha_i \alpha_j + \sum_{i=1}^{s/2} \alpha_i^2 (1 - \nu_i) = 1/2. \quad (10)$$

Если принять

$$\begin{aligned} \alpha_i &= \frac{1/w_j + 1/w_{j+1}}{2}, \quad j = 2i, \\ \nu_i &= 1 - \frac{4/w_j w_{j+1}}{1/w_j + 1/w_{j+1}}, \quad i = 1, \dots, s/2, \end{aligned} \quad (11)$$

где w_j — корни многочлена (6) (причем, если w_j — комплексный корень, то $w_j = \bar{w}_{j+1}$), тогда подставив значения из (11) в (10), получаем систему уравнений, связывающую корни многочлена (9). Следовательно, задача построения метода второго порядка сводится к построению многочлена (9) вида (8).

Вопросы устойчивости всего цикла шагов мы будем исследовать для однородной линейной задачи Коши

$$\frac{dy}{dt} = -Ay, \quad y(t_0) = y_0, \quad (12)$$

где относительно матрицы A предполагается, что она имеет полный набор собственных векторов и ее собственные числа неотрицательны $\lambda_i \geq 0$ ($i = 1, \dots, n$). Разлагая y_0 по собственным векторам $\{\zeta_i\}_1^n$

$$y_0 = \sum_1^n d_i \zeta_i, \quad (13)$$

получаем, что решение (13) можно представить в виде

$$y(t) = \sum_1^n d_i \zeta_i \exp(-\lambda_i t).$$

Применяя алгоритм (6) к задаче (12), получаем формулу для оператора перехода от y_0 к y_1

$$y_1 = P_s(A)y_0 = \sum_1^n P_s(\lambda h) d_i \zeta_i, \quad (14)$$

где многочлен P_s степени s имеет вид (9).

Пусть

$$\begin{aligned} R_s^j(\lambda) &= \prod_{i=1}^j [(1 - \alpha_i z)^2 - \nu_i \alpha_i^2 z^2], \quad R_s^0(\lambda) = 1, \\ Q_s^j(\lambda) &= \prod_{i=j+1}^{s/2} [(1 - \alpha_i z)^2 - \nu_i \alpha_i^2 z^2], \quad Q_s^s(\lambda) = 1, \\ r_s^j &= \max_{m \leq \lambda \leq M} |R_s^j(\lambda)|, \quad q_s^j = \max_{m \leq \lambda \leq M} |Q_s^j(\lambda)|, \end{aligned}$$

где $i = 1, \dots, s/2$, $m = \min_{\lambda_i \geq 0} \lambda_i$. Будем считать, что алгоритм (6) устойчив и аппроксимирует с порядком $O(h^2)$ задачу (1), если параметры в нем выбраны так, чтобы выполнялись следующие условия:

- 1) условие (13);
- 2) $P_s(0) = 1$, $|P_s(\lambda)| < 1$ при $0 < \lambda \leq M$;
- 3) величины r_s^j , q_s^j , $\sum_1^{s/2} q_s^j$ равномерно ограничены константами.

Условие 1) обеспечивает выполнение условий аппроксимации в процессе реализации алгоритма (6). При выполнении условия 2) происходит уменьшение компонент тех ошибок, возникающих на предыдущих реализациях алгоритма, которые в разложении типа (14) соответствуют собственным векторам с $\lambda_i > 0$. Условие 3) обеспечивает ограниченность аналогичных ошибок, возникающих внутри проводимого цикла вычислений (в данной работе не исследуется выполнение этого условия).

4. Некоторые оценки для многочленов

Пусть Π_n^2 — класс многочленов степени не выше n вида

$$P_n(t) = 1 - l_n t + l_n^2 t^2 / 2 + \sum_3^n a_i t^i,$$

где $l_n \geq 0$, а a_i ($i = 3, \dots, n$) — произвольные действительные числа, $n \geq 2$. Тогда $P_n(0) = 1$, $P_n'(0) = -l_n$, $P_n''(0) = l_n^2$, $l_n > 0$. Любой многочлен класса Π_n^2 можно представить в виде

$$P(t) = \prod_1^n (1 - \gamma_i t),$$

где γ_i — величины, обратные к корням этого многочлена. Тогда

$$l_n = \sum_{i=1}^n \gamma_i = -P_n'(0), \quad l_n^2 = \sum_{i \neq j=1}^n \gamma_i \gamma_j = P_n''(0).$$

Так как

$$\left(\sum_{i=1}^n \gamma_i \right)^2 - \sum_{i \neq j=1}^n \gamma_i \gamma_j = l_n^2 - l_n^2 = 0,$$

то

$$\sum_{i=1}^n \gamma_i^2 = 0, \tag{15}$$

отсюда следует, что любой многочлен из класса Π_n^2 имеет по крайней мере два комплексных корня. Пусть $0 < m < M$ и $0 < \eta \leq 1$ — заданные числа. Рассмотрим многочлен класса Π_n^2 . В окрестности нуля — это убывающая функция. Обозначим через $m_0(P_n)$ ближайший к нулю (при $t > 0$) локальный минимум многочлена $P_n(t)$ ($P_n'(m_0) = 0$), если такого локального минимума нет, то $m_0(P_n)$ будет означать ближайший к нулю (при $t > 0$) корень многочлена $P_n(t)$.

Лемма 4.1. *Для любых $n > 1$, $M > 0$, $0 < \eta \leq 1$ среди многочленов $P_n(t) \in \Pi_n^2$, удовлетворяющих условию*

$$\max_{m_0(P_n)} |P_n(t)| \leq \eta, \tag{16}$$

наибольшее значение коэффициента $l = l_n$ имеет многочлен $Q_n(t) \in \Pi_n^2$ степени n , у которого на отрезке $[m_0(Q_n), M]$ существует $n - 1$ точек t_i таких, что $m_0(Q_n) \leq t_1 < \dots < t_{n-1} \leq M$, и

$$Q_n(t_i) = (-1)^{i+1} \eta. \tag{17}$$

Доказательство от противного. Здесь для простоты будет предполагаться, что $\eta = 1$. Предположим, что существует другой многочлен $P_k(t) \in \Pi_n^2$

$$P_k(t) = 1 - l_k t + l_k^2 t^2 / 2 + \sum_{i=3}^n b_i t^i, \quad (18)$$

для которого $l_k > l_n$. Тогда существует многочлен

$$\hat{P}_k(t) = 1 - l_n t + l_n^2 t^2 / 2 + \sum_{i=3}^n \hat{b}_i t^i, \quad (19)$$

где $\hat{b}_i = b_i (l_n / l_k)^i$, обладающий свойством (16), но уже на отрезке $[m_0(P_k) l_k / l_n, M l_k / l_n]$, $l_k / l_n > 1$ (этот многочлен получен заменой переменных $t \rightarrow t l_n / l_k$). Рассмотрим разность двух многочленов

$$v(t) = Q_n(t) - \hat{P}_k(t) = \sum_{i=3}^n \rho_i t^i. \quad (20)$$

Для многочлена (20) выполнены неравенства

$$\begin{aligned} v(t_1) &\geq 0, \\ v(t_2) &\leq 0, \\ &\dots \\ v(t_{n-1}) &\geq 0, \end{aligned} \quad (21)$$

при четных n , и

$$v(t_{n-1}) \leq 0,$$

при нечетных n ,

где $t \in [m_0, M]$. Система неравенств означает, что многочлен $v(t)$ на отрезке $[m_0(Q_n), M]$ имеет $n - 2$ вещественных корня, кроме того многочлен $v(t)$ имеет тройной корень в точке 0. Но тогда многочлен степени n имеет $n + 1$ корень; противоречие показывает, что не существует многочлена вида (19), удовлетворяющего условию (16) на отрезке $[m_0(\hat{P}_k), \Lambda]$, $\Lambda = M l_k / l_n$ при $\Lambda > M$, (т. е. $l_k / l_n > 1$); следовательно не существует и многочлена (18) с $l_k > l_n$, удовлетворяющего (16).

Из системы неравенств (21) следует, что на отрезке $[t_1, t_{n-1}]$ имеется $n - 2$ вещественных корня, а из равенства (15) следует, что среди n корней многочлена $Q_n(t)$ есть комплексные корни и их ровно $n - (n - 2) = 2$, поэтому многочлен $Q_n(t)$ можно представить в виде

$$Q_n(t) = (1 - at + bt^2) \prod_{i=3}^n (1 - \gamma_i t) = 1 - l_n t + l_n^2 t^2 / 2 + \sum_3^n a_i t \quad (22)$$

со всюду положительным квадратным трехчленом

$$\rho(t) = 1 - at + bt^2 > 0.$$

Изложим алгоритм построения многочлена $Q_n(t)$, удовлетворяющего условиям

- 1) $(Q'_n(0))^2 = Q''_n(0)$,
- 2) $|Q(t)| \leq 1$ при $0 < t \leq M$;
- 3) для $Q_n(t)$ выполнены условия (17) из леммы 4.1.

Авторы решили эту задачу двумя разными способами. В [2], [5] описан численный способ решения этой задачи с помощью асимптотических формул и программы BERN (см. [5]). В [3] найдено точное решение этой задачи с помощью аналитических формул для многочлена Золотарева 1-го рода второго типа. Здесь мы опишем этот способ решения задачи. Для этого

переформулируем задачу построения многочлена для отрезка $[-1, 1]$. Рассмотрим многочлен Золотарева 1-го рода, 2-го типа [3]

$$y(x) = Z2_n(x, k, 1),$$

где

$$Z2_n(x, k, \mu) = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{H(a+u)\Theta_1(a+u)}{H(a-u)\Theta_1(a-u)} \right)^n + \left(\frac{H(a-u)\Theta_1(a-u)}{H(a+u)\Theta_1(a+u)} \right)^n \right],$$

$$x = \frac{cn(2a)cn(2u) - 1}{cn(2u) - cn(2a)},$$

k — модуль эллиптических функций, K — полный эллиптический интеграл 1-го рода, а параметрическая переменная u изменяется от 0 до K_i , когда x меняется от -1 до 1. Пусть $x_0 > 1$, такое, что

$$t(x_0) = (y'(x_0))^2 - ry''(x_0) = 0, \quad (23)$$

где $1 \leq r \leq r_0$, r_0 — достаточно близкая к 1 величина, а k_0 — корень уравнения

$$r = y(x_0) = Z2_n(x_0, k, 1). \quad (24)$$

Задача 4.1. Для заданного $1 \leq r \leq r_0$, определить x_0, k как решение системы уравнений (23), (24), удовлетворяющее условиям: $x \geq 1, 0 < k \leq k_0$.

Предположим, мы нашли решение задачи 4.1, тогда можно найти корни многочлена Золотарева $\{\xi_i\}_1^n$

$$y(x) = Z2_n(x, k_0, 1),$$

и сделав преобразование

$$t_i = \frac{x_0 - \xi_i}{x_0 + \xi_i} M, \quad i = 1, \dots, n, \quad (25)$$

получить корни многочлена

$$Q_n(t) = \prod_{i=1}^n (1 - t/t_i) = Z2_n((x_0 - (x_0 + 1)t), k_0, 1)/r.$$

Покажем, что для этого многочлена будут выполнены условия 1), 2), 3). Действительно,

Первое условие следует из уравнения (23) для $Z2(x, k_0, 1)$.

Второе условие следует из того, что $1 \leq r \leq r_0$, а максимум отклонения от нуля многочлена Золотарева $Z2(x, k_0, 1)$ на отрезке $[-1, 1]$ равен единице, следовательно, $Q_n(t) = Z2_n((x_0 - (x_0 + 1)t), k_0, 1)/r < 1$ на отрезке $[0, M]$, т. е. удовлетворяет условию 2).

Третье условие следует из свойств многочлена Золотарева $Z2(x, k_0, 1)$. Эти многочлены имеют чебышевский альтернанс на отрезке $[-1, 1]$, (см. [3]), следовательно, многочлен $Q_n(t)$ удовлетворяет условию (17), где $\eta = 1/r$.

Тем самым, найдя решение задачи 4.1 и сделав преобразование (25), мы найдем параметры многочлена (22): $\gamma_i = 1/t_i, i = 1, \dots, n$. Решение задачи 4.1 было получено численно с помощью двух программ ZOL и ZOLM. Программа ZOL ищет решение уравнения (24), а программа ZOLM, на основе программы ZOL, реализует итерационный процесс

$$k^{i+1} = k^i + \delta(r - Z2_n(\hat{x}_0, k^i, 1)),$$

где δ — параметр, который мы выбирали экспериментально, а \hat{x} — найденное с помощью программы ZOL значение x_0 .

Авторами были получены корни многочленов $Q_n(t)$ при $M = 1$ и составлены таблицы этих многочленов до 81 степени включительно. Корни многочлена при $s = 9, M = 1, \eta = 0.98$

приведены в таблице 1. Величина l_s/s^2 и максимальная величина шага l_s приведена в таблице 2. Из таблицы 2 вытекает неравенство (7).

Таблица 1. Корни многочлена второго порядка при $s = 9$, $M = 1$ и $\eta = 0.98$.

$(2.009240424759090^{-2}, \pm 2.061952927342528^{-2}), 1.543656460615529^{-1},$ $3.109158421544090^{-1}, 4.869665784848753^{-1}, 6.625649785572404^{-1},$ $8.168457305202050^{-1}, 9.313141399634781^{-1}, 9.922116229981993^{-1}$
--

Таблица 2. Максимальные величины шагов $l_s = -P'_s(0)$ при $M = 1$ и величина l_s/s^2 .

s	l_s	l_s/s^2	s	l_s	l_s/s^2
5	19.3894067	0.7755762	7	38.988738	0.7956885
9	65.044521683	0.830187	17	234.00230480	0.896965
25	507.2981125	0.8116769	35	995.34377963	0.8125255
45	1646.031671	0.8128551			

5. Определение параметров разностных уравнений

Для определения параметров схемы зададимся шагом интегрирования $h_{\text{анр}}$ который предположительно дает нужную точность решения. Для этого будем использовать метод вложенных формул, который описан в следующем пункте. Здесь будем считать $h_{\text{анр}}$ заданным.

Определять количество стадий в методе (6) будем исходя из необходимого условия устойчивости метода (6): чтобы на спектре якобиана задачи (2), для функции устойчивости $P_s(\lambda h)$ (9) было выполнено условие (16). Для этого возьмем полиномы (22), построенные для отрезка $[0, 1]$ и с помощью замены переменных $t = \bar{t}/M$ рассмотрим этот многочлен на отрезке $[0, M]$, где $M(t) \leq M$ — максимальное собственное число якобиана (4) на интервале $[t_0, t_0 + h]$. Тогда на основании леммы 4.1 для каждой степени полинома s имеем максимально возможную величину $\bar{l}_s = l_s/M$, при которой выполнено условие (16) на спектре $\bar{t} \in [0, M]$. При этом максимально возможный шаг \bar{h}_s для метода (6) с количеством стадий s равен $\bar{h}_s = \bar{l}_s$. Тем самым все степени s , для которых

$$\bar{h}_s \leq \bar{h}_{s_{\text{max}}} \leq h_{\text{анр}}, \quad s \leq s_{\text{max}},$$

являются приемлемыми для интегрирования задачи (1). При этом шаг в методе (6) равен

$$h = \min(h_{\text{анр}}, h_{s_{\text{опт}}}),$$

где $s_{\text{опт}} \leq s_{\text{max}}$ — оптимальное количество стадий. При этом величины α_i , и ν_i определяются из соотношений

$$\alpha_i = \frac{\gamma_j + \gamma_{j+1}}{2} \bar{M}, \quad j = 2i,$$

$$\nu_i = 1 - \frac{4\gamma_j \gamma_{j+1}}{\gamma_j + \gamma_{j+1}}, \quad i = 1, \dots, s/2,$$

где γ_i — параметры многочлена (22), построенного для отрезка $[0, 1]$, а $\bar{M} \geq M$ выбрано так, чтобы сумма шагов в методе равнялась

$$l_{s_{\text{опт}}}/\bar{M} = h.$$

При этом не всегда $s_{\text{опт}}$ равно s_{max} . Находить $s_{\text{опт}}$ будем, исходя из соотношения

$$\frac{h_{\text{анр}}}{s_{\text{max}}} \leq \frac{l_{s_{\text{опт}}}}{s_{\text{опт}} \bar{M}},$$

которое означает, что средний шаг, приходящийся на одно вычисление правой части в методе с оптимальным количеством стадий, не меньше, чем средний шаг в методе с максимально возможным $s = s_{\text{max}}$.

6. Вложенные формулы

Для определения шага аппроксимации $h_{\text{анр}}$ воспользуемся идеей вложенных формул ([9]; [10], с.123–127). Для этого в точке $t_0 + h$ требуется вычислить второе решение \bar{y}_1 , имеющее другой порядок точности, и норму разности $\text{err}_1 = \|y_1 - \bar{y}_1\|$ принять за ошибку, полученную в результате вычислений. В случае, если

$$\text{err}_1 > \text{tol},$$

где tol — требуемая ошибка вычислений, отбрасываем сделанный шаг и производим новые вычисления. Если шаг принимается, то используем эту ошибку для прогноза следующего шага.

Хорошим кандидатом для \bar{y}_1 является промежуточное решение U_s , получающееся на последнем шаге при реализации метода (6). При этом $\bar{y}_1 = U_s$ является решением первого порядка в точке $t_0 + h$, и за ошибку примем величину

$$\text{err}_1 = \|y_1 - \bar{y}_1\| = \|\nu_s(U_s - 2U_{s-\frac{1}{2}} + Y_{s-1})\|.$$

Для прогноза следующего шага используем стандартные формулы из [3]

$$h_{\text{анр}} = h \min(\text{fac}_{\text{max}}, \max(\text{fac}_{\text{min}}, \text{fac}(\text{tol} / \text{err}_1)^{1/p})),$$

где $p = 2$, а fac_{max} , fac_{min} , fac — некоторые константы.

Полиномы устойчивости для решения y_1 и вложенного решения \bar{y}_1 представлены на рис. 1.

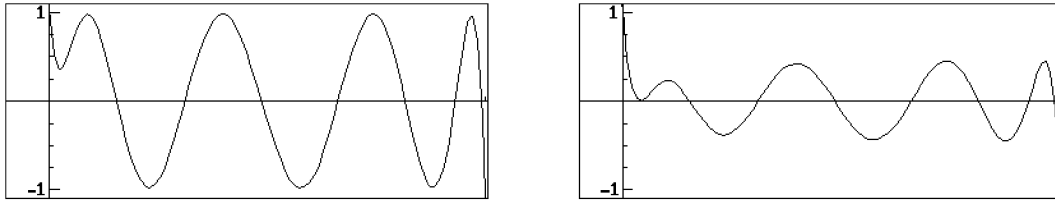


Рис. 1. Полиномы устойчивости для решения y_1 (слева) и вложенного решения \bar{y}_1 (справа).

7. Примеры расчета жестких задач

Предлагаемый алгоритм был внедрен в программе DUMKA¹, краткое описание которой дано в [1], [2]. Для примера была выбрана многомерная задача теплопроводности: в кубе $\Omega = \{0 \leq x \leq p, i = 1, 2, 3\}$ с границей $\partial\Omega$ при $0 \leq t \leq T$ найти решение $u(x, t)$ задачи

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u - \sum_{i=1}^3 b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + a u + f(t), \quad (26)$$

$$u|_{x_i=0} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial n}|_{x_i=\pi} = 0, \quad u|_{t=0} = 0, \quad i = 1, 2, 3,$$

где $b_1 = -3, b_2 = 2, b_3 = 1, a = -1$. Функция $f(t)$ имела вид

$$f(t) = \begin{cases} 1 + 0.1t, & t \notin [6, 10]; \\ 0, & t \in (6, 10). \end{cases}$$

По заданному целому m построим кубическую сетку $x_{i,k} = kh$ ($i = 1, 2, 3, k = 0, \dots, m+1$), где $h = \pi/(m+0,5)$, на которой с учетом краевых условий заменим оператор Лапласа и конвективные члены в (26) разностным оператором. В результате получим систему дифференциальных уравнений метода прямых порядка n . Теперь сравним два метода: 1-го порядка аппроксимации

¹Программы DUMKA3 и DUMKA4 можно получить у авторов или в Internet <http://guru.inm.ras.ru/~nucrest>.

основанного на многочленах Чебышева [1] и предлагаемый метод второго порядка аппроксимации. При расчетах были взяты следующие параметры: $n = 50^3 = 262144$, $\epsilon = 0.02$, $T = 15$. Тогда $\text{сои} = 6,44 * 10^{-4}$, при этом средний шаг в методе второго и первого порядка был равен соответственно: $h_{\text{ср}} = 14.2 \text{сои}$ и $h_{\text{ср}} = 4.5 \text{сои}$. О практическом использовании предложенного метода можно также прочитать в [2].

Литература

1. Лебедев В.И. *Явные разностные схемы с переменными шагами по времени для решения жестких систем уравнений* // Препринт №177. Отд. вычисл. матем. АН СССР. – 1987. – 38 с.
2. Лебедев В.И. *Как решать явными методами жесткие системы дифференциальных уравнений* // Вычисл. процессы и системы. – 1991. – № 8. – С. 45–80.
3. Lebedev V.I. *Zolotarev polynomials and extremum problems* // Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling. – 1994. – V. 9. – № 3. – P. 231-263.
4. Локуциевский В.О., Локуциевский О.В. *Применение чебышевских параметров для численного решения некоторых эволюционных задач* // Препринт №98. Ин-т прикл. матем. АН СССР. – 1984. – 30 с.
5. Медовиков А.А. *Явные и явно-явные методы решения жестких нестационарных задач*. Дисс. ... канд. физ.-матем. наук. – Москва, 1992. – 129 с.
6. Van der Houwen P.J. *Explicit Runge-Kutta Formulas with increased stability boundaries* // Numer. Math. – 1972. – Bd. 20. – S. 149–164.
7. Lebedev V.I. *A new method for determinating the roots of polynomials of least deviation on a segment with weight and subject to additional conditions. Part 1* // Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling. – 1993. – V. 8. – № 3. – P. 195–222.
8. Dekker K., Verwer J.G. *Stability of Runge-Kutta methods for stiff nonlinear differential equations*. – Amsterdam, New York, Oxford, North-Holland: 1984. – 307 p.
9. Hairer E., Norsett S.P., Wanner G. *Solving ordinary differential equations I. Nonstiff problems*. – Berlin e.o.: Springer, 1987. – 480 p.
10. Hairer E., Wanner G. *Solving ordinary differential equations II. Stiff and differential-algebraic problems*. – Berlin e.o.: Springer, 1991, second revised edition, 1996. – 614 p.

*Институт вычислительной
математики Российской
Академии наук*

*Поступили
первый вариант 13.03.1995
окончательный вариант 22.05.1997*