Известия вузов. Математика *http://www.ksu.ru/journals/izv_vuz/*
2009, №6, с. 60–64 *e-mail: izvuz.matem@ksu.ru*

Краткое сообщение

Л.А. АКСЕНТЬЕВ, А.Н. АХМЕТОВА

ОБ ОТОБРАЖЕНИЯХ, СВЯЗАННЫХ С ГРАДИЕНТОМ КОНФОРМНОГО РАДИУСА

Аннотация. В статье приведен критерий конформности градиента конформного радиуса $\nabla R(D,z)$ выпуклой области D: граница ∂D должна быть окружностью. Вычислены коэффициенты $K(r)$ для $K(r)$-квазиконформных отображений $\nabla R(D(r),z)$, $D(r)\subset D$, $0<r<1$, и дополнены результаты Ф.Г. Авхадиева и К.-Й. Виртса по структуре граничных элементов при квазиконформных отображениях области D.

Ключевые слова: конформный радиус, градиент конформного радиуса, K-квазиконформное отображение, уравнение Бельтрами.

УДК: 517.546

Abstract. In this paper we prove the following conformality criterion for the gradient of conformal radius $\nabla R(D,z)$ of a convex domain D: the boundary ∂D has to be a circumference. We calculate coefficients $K(r)$ for $K(r)$-quasiconformal mappings $\nabla R(D(r),z)$, $D(r)\subset D$, $0<r<1$, and complete the results obtained by F.G. Avkhadiev and K.-J. Wirths for the structure of boundary elements of quasiconformal mappings of a domain D.

Keywords: conformal radius, gradient of conformal radius, K-quasiconformal mapping, Beltrami equation.

Инициатива в исследовании диффеоморфных отображений области D с помощью градиентной функции

$$\nabla R(D,z)=2\frac{\partial R}{\partial \overline{z}}, \tag{1}$$

где $R(D,z)$ — конформный радиус области D в точке z, принадлежит Ф.Г. Авхадиеву и К.-Й. Виртсу [1], [2]. Результаты этих двух работ дополнены в данной статье теоремой о построении граничных линий с помощью прокатывания.

Основным результатом статьи является критерий конформности градиента конформного радиуса (1): граница области D должна быть окружностью. Для каждой выпуклой области $D=f(E)$ введен коэффициент квазиконформности $k_f(r)$, характеризующий K-квазиконформное отображение области $D(r)=f(rE)$, $K=\frac{1+k_f(r)}{1-k_f(r)}$. Этот коэффициент вычислен для нескольких областей (в частности, для областей с вырожденным градиентом

Поступила 18.06.2007

[2]), и поставлена задача об определении коэффициента

$$k(r) = \sup_{f\in S^0} k_f(r)$$

по всему классу S^0 выпуклых отображений.

I. Как отмечено в статьях [1], [2], в многоугольной области D своеобразно проявляет себя функция (1). Она определяет диффеоморфное отображение $w(z) = \nabla R(D,z)$ области D с вырождением на границе ∂D. Каждой прямолинейной стороне $l_k \subset \partial D$ ставится в соответствие точка A_k на окружности $|w| = 2$, а каждой угловой точке $a_k \in \partial D$ соответствует гладкая предельная линия $\mathcal{L}_k$, соединяющая соседние точки $A_k = w(l_k)$ и $A_{k+1} = w(l_{k+1})$.

Кратко приведем два пути для записи уравнения предельной линии $\mathcal{L}_k$, которая получается как образ угловой точки $a_k = 0$ многоугольника при отображении под действием функции (1), когда z приближается к угловой точке по разным направлениям.

1. Обозначим $D_\alpha = D_\alpha(\infty) = \{z : |\arg z| < \alpha\pi/2\}$, $0 < \alpha < 2$. При $0 < \alpha < 1$ под $D_\alpha(1)$ понимаем внутренность выпуклого многоугольника, которая составляет часть $D_\alpha(\infty)$, причем

$$D_\alpha(\rho) = \rho D_\alpha(1), \quad \rho \geq 1, \quad \text{и} \quad D_\alpha(\infty) = \lim_{\rho\to\infty} D_\alpha(\rho).$$

В таком предельном переходе точка z/ρ переводится в точку $z \in D_\alpha(\infty)$. При $1 < \alpha < 2$ под $D_\alpha(1)$ понимаем внешность выпуклого многоугольника, в которую входит $D_\alpha(\infty)$, причем

$$D_\alpha(\rho) = \rho D_\alpha(1) \quad \text{и} \quad D_\alpha(\infty) = \lim_{\rho\to\infty} D_\alpha(\rho), \quad z/\rho \in D_\alpha(1) \to z \in D_\alpha(\infty), \quad \rho\to\infty.$$

С использованием функций, отображающих круг $E = \{\zeta : |\zeta| < 1\}$ на области $D_\alpha(1)$, $D_\alpha(\rho)$ и $D_\alpha(\infty)$, получим следующие равенства:

$$\frac{1}{2}\nabla R(D_\alpha(1), z/\rho) = \frac{\partial}{\partial\overline{z}/\rho} R(D_\alpha(1), z/\rho) = \frac{\partial}{\partial\overline{z}/\rho} R(D_\alpha(\rho), z)/\rho =$$
$$= \frac{\partial}{\partial\overline{z}}[\varphi'(0,z,\rho) R(D_\alpha(\infty), z)] = R(D_\alpha(\infty), z)\frac{\partial}{\partial\overline{z}}\varphi'(0,z,\rho) + \varphi'(0,z,\rho)\frac{\partial}{\partial\overline{z}} R(D_\alpha(\infty), z).$$

Здесь $\varphi'(0,z,\rho) = \frac{d\varphi(\zeta,z,\rho)}{d\zeta}\big|_{\zeta=0}$ и $\varphi(\zeta,z,\rho)$ — функция из леммы Шварца ([3], с. 319) при $0 < \alpha < 1$ или функция, обратная к функции из леммы Шварца, при $1 < \alpha < 2$. Можно показать, что

$$\lim_{\rho\to\infty}\varphi'(0,z,\rho) = 1 \quad \text{и} \quad \lim_{\rho\to\infty}\frac{\partial}{\partial\overline{z}}\varphi'(0,z,\rho) = 0.$$

Поэтому

$$\lim_{\rho\to\infty}\nabla R(D_\alpha(1), z/\rho) = \nabla R(D_\alpha(\infty), z). \tag{2}$$

Так как для бесконечного сектора $D_\alpha(\infty) = D_\alpha$ имеем

$$R(D_\alpha, z) = 2\alpha|z|\cos\frac{\arg z}{\alpha},$$

то

$$\nabla R(D_\alpha, |z|e^{i\theta}) = 4\alpha\left[\frac{1}{2}\sqrt{\frac{z}{\overline{z}}}\cos\frac{\theta}{\alpha} + \frac{|z|}{\overline{z}2i\alpha}\sin\frac{\theta}{\alpha}\right] = 2e^{i\theta}\left(\alpha\cos\frac{\theta}{\alpha} - i\sin\frac{\theta}{\alpha}\right) = g_\alpha(\theta),$$
$$-\alpha\pi/2 \leq \theta \leq \alpha\pi/2.$$

Поэтому из (2) получим

$$\lim_{\rho\to\infty}\nabla R(D_\alpha(1), \frac{|z|}{\rho}e^{i\theta}) = g_\alpha(\theta) = g_\alpha(\alpha t), \quad -\pi/2 \leq t \leq \pi/2. \tag{3}$$

2. Второй способ вывода (3) отмечен без подробных выкладок в ([2], с. 362). Он основан на формуле

$$\nabla R(f(E), f(\zeta)) = 2e^{i\arg f'(\zeta)}\left[\frac{1-|\zeta^2|}{2}\overline{\left(\frac{f''(\zeta)}{f'(\zeta)}\right)} - \zeta\right], \quad f(-1)=0, \quad f(E)=D_\alpha(1),$$

и включает такие преобразования

$$f'(\zeta) = (1+\zeta)^{\alpha-1}f_0(\zeta) \Rightarrow \lim_{r\to 0}\arg f'(-1+re^{it}) = (\alpha-1)t + \arg f_0(-1), \quad -\pi/2 \le t \le \pi/2,$$

$\arg f_0(-1) = 0$, так как в силу симметрии области $D_\alpha(1)$ около 0 имеем

$$\lim_{r\to 0}\arg[re^{it}f'(-1+re^{it})] = \alpha t + \arg f_0(-1) \to \pm\alpha\pi/2 + \arg f_0(-1), \quad t\to \pm\pi/2.$$

Далее,

$$1-|\zeta|^2 = 1-|-1+re^{it}|^2 = r(2\cos t - r),$$

$$\lim_{r\to 0}\left[r\frac{f''(-1+re^{it})}{f'(-1+re^{it})}\right] = \lim_{r\to 0}\left(\frac{\alpha-1}{e^{it}} + r\frac{f_0'(-1+re^{it})}{f_0(-1+re^{it})}\right) = (\alpha-1)e^{-it}.$$

Поэтому

$$\lim_{r\to 0}\nabla R(-1+re^{it}) = 2e^{i(\alpha-1)t}\left(\frac{1}{2}(\alpha-1)e^{it}2\cos t + 1\right) =$$

$$= 2e^{i\alpha t}[(\alpha-1)\cos t + e^{-it}] = 2e^{i\alpha t}(\alpha\cos t - i\sin t) = g_\alpha(\alpha t).$$

Переписывая последнее выражение в симметричном виде, получаем

$$g_\alpha(\alpha t) = (\alpha+1)e^{i(\alpha-1)t} + (\alpha-1)e^{i(\alpha+1)t}. \tag{4}$$

При $0<\alpha<1$ выражение (4) приводится к виду

$$g_\alpha(\alpha t)e^{-i\pi(\alpha-1)/2} = (R-r)e^{i\frac{1-\alpha}{2}(-2t+\pi)} + re^{-i\frac{\alpha+1}{2}(-2t+\pi)} = R[(1-m)e^{im\tau} + me^{i(m-1)\tau}], \tag{4$'$}$$

где $R=2$, $r=1-\alpha$, $m=r/R=(1-\alpha)/2$, $\tau=-2t+\pi$.

При $1<\alpha<2$ выражение (4) приводится к виду

$$g(\alpha t)e^{i\pi(\alpha-1)/2} = (R+r)e^{i\frac{\alpha-1}{2}(2t+\pi)} - re^{i\frac{\alpha+1}{2}(2t+\pi)} = R[(1+m)e^{im\tau} - me^{i(m+1)\tau}], \tag{4$''$}$$

где $R=2,\ r=\alpha-1,\ m=r/R=(\alpha-1)/2,\ \tau=2t+\pi$.

Выражения ($4'$) и ($4''$) являются соответственно уравнениями гипо- и эпициклоиды ([4], с. 109–111) и описывают движение некоторой фиксированной точки на производящей окружности радиуса $|1-\alpha|$, катящейся по неподвижной окружности радиуса 2.

Особым является случай $\alpha=1$: радиус производящей окружности будет равен нулю и две концевые точки, определяемые интервалом изменения t (или τ), стянутся в одну, т. е. циклоида выродится в точку. Таким образом, справедлива

Теорема 1. *При отображении многоугольной области D градиентной функцией $\nabla R(D,z)$ часть образа границы в форме предельной линии (4) для угловой точки $z=0$ области D (с внутренним углом $\alpha\pi$) является следом точки на окружности Γ_t с радиусом $|\alpha-1|$, которая прокатывается по окружности $|w|=2$ внутри нее при $0\le\alpha<1$ (гипоциклоида), или снаружи при $1<\alpha\le 2$ (эпициклоида). В случае $\alpha=1$ прокатывания не будет, и точке $z=0$ будет соответствовать единственная точка на окружности $|w|=2$.*

Попутно отметим одну опечатку в статье ([2], с. 362). Вместо производящей окружности Γ_t радиуса 2 нужно взять производящую окружность радиуса 1. Случай гипоциклоиды (не рассмотренный в указанной статье), образованной в результате прокатывания той же производящей окружности радиуса 1 внутри неподвижной окружности радиуса два, представляет собой пример вырождения указанной кривой. Именно, циклоида выродится в отрезок мнимой оси от $-2i$ до $2i$.

II. Для односвязной области D нетрудно доказать следующее утверждение.

Теорема 2. *Пусть $R(f(E), f(\zeta)) = |f'(\zeta)|(1-|\zeta^2|)$ — конформный радиус для $D = f(E)$ с отображающей функцией $z = f(\zeta)$, $E = \{\zeta : |\zeta| < 1\}$. Градиент* (1) *конформного радиуса осуществляет конформное отображение D тогда и только тогда, когда граница области D является окружностью, причем ∂D не может быть прямой линией.*

Отображение с помощью $\nabla R(D, z)$ будет K-квазиконформным ([5], с. 13), если $\nabla R(D, z)$ удовлетворит уравнению Бельтрами с соответствующим коэффициентом $k = \frac{K-1}{K+1}$ для этого уравнения. Именно, в области D должна выполняться оценка

$$|R_{\overline{z}\overline{z}}/R_{\overline{z}z}| \leq k < 1.$$

Это неравенство означает, что $(\nabla R)_{\overline{z}} = \mu(z, \overline{z})(\nabla R)_z$ и $|\mu(z, \overline{z})| \leq k < 1$.

Простыми вычислениями доказываются формулы для коэффициентов квазиконформности $k_f(r)$, когда вместо $f(\zeta)$ берется $f(r\zeta)$, $0 < r < 1$. Запишем коэффициенты квазиконформности в следующих примерах:

	$f(r\zeta)$	$k_f(r)$
1.	$\left(\frac{1+r\zeta}{1-r\zeta}\right)^\alpha$, $0 < \alpha \leq 1$	$\frac{1-\alpha^2}{1-\alpha^2 r^2}\, r^2 \leq r^2$
2.	$\ln\frac{1+r\zeta}{1-r\zeta}$	r^2
3.	$[(1+r\zeta)^\alpha - 1]/\alpha$, $0 < \alpha < 1$	$\frac{(1-\alpha^2)r^2}{(\sqrt{1-r^2}+\sqrt{1-\alpha^2 r^2})^2} \leq r^2$
4.	$\ln(1+r\zeta)$	$\frac{r^2}{(1+\sqrt{1-r^2})^2} \leq r^2$
5.	$\frac{ar\zeta+b}{cr\zeta+d}$	0

Примеры 1–5 приводят к оценке $k_f(r) \leq r^2$, которая достигается асимптотически для всего класса выпуклых областей. Действительно, для $D(r) = f(rE)$, причем

$$f(\zeta) = \zeta + a_2\zeta^2 + a_3\zeta^3 + \cdots$$

является выпуклой функцией, имеем

$$\left|\frac{R_{\overline{z}\overline{z}}}{R_{\overline{z}z}}\right| = 3(1-|\zeta|^2)\left|\frac{r^2(\overline{a_3} - \overline{a_2}^2) + r^3 4\zeta(\overline{a_4} - \overline{a_2 a_3}) + \cdots}{-1 - 6r\operatorname{Re}\{a_2\zeta\} + \cdots}\right|.$$

Отсюда $k_f(r) \sim 3(1-|\zeta|^2)r^2|a_3 - a_2^2| \leq r^2$, поскольку для выпуклых функций

$$|a_3 - a_2^2| = \frac{1}{6}|\{f, \zeta\}|\,\Big|_{\zeta=0} \leq \frac{1}{3} \quad \text{(например, [6])},$$

где $\{f, \zeta\} = (\frac{f''}{f'})' - \frac{1}{2}(\frac{f''}{f'})^2$ — производная Шварца.

Можно ожидать, что

$$k(r) = \sup_{f\in S^0} k_f(r)$$

по всему классу S^0 выпуклых функций $f(\zeta)$ получится в виде

$$k(r) = r^2, \quad 0 < r < 1.$$

Литература

[1] Авхадиев Ф.Г. *Конформно инвариантные неравенства и их приложения.* – Препринт № 95-1. – Казань: Изд-во Казанск. фонд «Матем.», 1995. – 26 с.

[2] Avkhadiev F.G. , Wirths K.-J. *The conformal radius as a function and its gradient image* // Israel Journal of Mathematics. – 2005. – V. 145. – P. 349–374.

[3] Голузин Г.М. *Геометрическая теория функций комплексного переменного.* – М.: Наука, 1966. – 628 с.

[4] Савелов А.А. *Плоские кривые.* – М.: Физматгиз, 1960. – 290 с.

[5] Альфорс Л. *Лекции по квазиконформным отображениям.* – М.: Мир, 1969. – 135 с.

[6] Аксентьев Л.А. *Локальное строение поверхности внутреннего конформного радиуса для плоской области* // Изв. вузов. Математика – 2002. – № 4. – С. 3–12.

Л.А. Аксентьев

профессор, кафедра математического анализа,
Казанский государственный университет,
420008, г. Казань, ул. Кремлевская, д. 18,

`e-mail:` Leonid.Aksentev@ksu.ru

А.Н. Ахметова

аспирант, кафедра математического анализа,
Казанский государственный университет,
420008, г. Казань, ул. Кремлевская, д. 18,

`e-mail:` achmetowa@inbox.ru

L.A. Aksent'ev

Professor, Chair of Mathematical Analysis,
Kazan State University,
18 Kremlyovskaya str., Kazan, 420008 Russia,

`e-mail:` Leonid.Aksentev@ksu.ru

A.N. Akhmetova

Postgraduate, Chair of Mathematical Analysis,
Kazan State University,
18 Kremlyovskaya str., Kazan, 420008 Russia,

`e-mail:` achmetowa@inbox.ru