ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2001 МАТЕМАТИКА № 10 (473)

УДК 517.988

И.Н. МАЙБОРОДА, Л.А. ОСТРОВЕЦКИЙ

О НЕПОДВИЖНЫХ ТОЧКАХ ОПЕРАТОРОВ С ГЕТЕРОТОННОЙ ПРОИЗВОДНОЙ

Теория уравнений с монотонными операторами в пространствах с конусами развита в работах М.А. Красносельского, И.А. Бахтина, В.Я. Стеценко и других авторов [1]–[4]. Теория монотонных операторов была перенесена В.И. Опойцевым [5] на гетеротонные операторы. В работе [6] исследовались двусторонние конструкции немонотонных операторов с производными, обладающими свойствами монотонности.

В данной статье некоторые из отмеченных результатов распространяются на операторы с гетеротонной производной в банаховых пространствах с конусами. В работе приводятся различные достаточные условия существования по крайней мере одной неподвижной точки у нелинейного отображения T, имеющего гетеротонную производную Фреше T', определенного на некотором множестве D полуупорядоченного банахова пространства E и действующего в D. При этом предполагается, что полуупорядоченность в E введена при помощи конуса K.

Ниже использована терминология теории пространств с конусами и теории положительных операторных уравнений из [1], [7]. Напомним кратко эти определения.

Конусом K называется замкнутое выпуклое множество, обладающее свойствами:

1) $x, y \in K \Rightarrow \alpha x + \beta y \in K \ \forall \alpha, \beta > 0$;

2) из двух векторов x и $-x$ по крайней мере один не принадлежит K, если $x \neq \theta$ (θ — нуль пространства E).

По определению $x \leq y$, если $y - x \in K$. Из замкнутости конуса вытекает важное свойство полуупорядоченности, определенное при помощи конуса — возможность перехода к пределу в неравенствах: если $x_n \leq y_n$, $n = 1, 2, \dots$, и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y$, то $x \leq y$.

Конус K называется миниэдральным, если каждое конечное число элементов $x_1, x_2, \dots, x_n \in E$ имеет точную верхнюю границу; сильно миниэдральным, если каждое ограниченное сверху множество имеет точную верхнюю границу; вполне миниэдральным, если любое ограниченное по норме множество $F \subset K$ имеет в E точную верхнюю границу.

Конус K называется телесным, если он содержит внутренние элементы.

Конус называется нормальным, если существует $\delta > 0$ такое, что для любых элементов $l_1, l_2 \in K$, $\|l_1\| = \|l_2\| = 1$, имеет место неравенство $\|l_1 + l_2\| > \delta$. Необходимым и достаточным условием нормальности конуса является полумонотонность нормы: существует такое число $M > 0$, что $\theta \leq x \leq y \Rightarrow \|x\| \leq M\|y\|$.

Конус K называется воспроизводящим, если линейная оболочка его элементов совпадает со всем пространством. Конусы неотрицательных функций и неотрицательных вектор-функций в обычных пространствах (C, L_p и т.д.) будут воспроизводящими и нормальными. В конечномерном пространстве каждый конус нормален.

Конус K называется правильным, если каждая ограниченная последовательность сходится по норме; вполне правильным, если каждая ограниченная по норме монотонная последовательность сходится по норме. Вполне правильный конус является правильным.

Множество $\langle u; v\rangle = \{x \in E : u \leq x \leq v\}$ называется отрезком. В случаях воспроизводящего или нормального конусов получим ограниченность $\langle u; v\rangle$ по норме.

Пусть нелинейное операторное уравнение

$$x = Tx \tag{1}$$

задано на некотором выпуклом множестве $D \subset E$ с полуупорядоченным конусом K. Предположим, что оператор T имеет на D производную T' по Фреше, которая обладает свойством гетеротонности на $\langle u_0; v_0 \rangle \subset D$, где u_0, v_0 — начальные приближения к решению уравнения (1). Последующие приближения определяются алгоритмом

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= Tu_n + PB(u_n, v_n)(u_{n+1} - u_n), \\ v_{n+1} &= Tv_n + PB(u_n, v_n)(v_{n+1} - v_n), \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \end{aligned} \tag{2}$$

где P — линейный проектор ($P^2 = P$), производная PT' является гетеротонным оператором [5]. Сопутствующий ей оператор будем обозначать через $PB(u, v)(PB : D \times D \to D)$, т. е.

$$PB(x, x) = PT'x, \quad PB(u, v) \leq PB(x, y), \text{ если } u \leq x; \; y \leq v. \tag{3}$$

Предполагается, что для любого n существуют единственные решения уравнений (2) и для расщепления PT' справедлива формула Ньютона–Лейбница.

Лемма 1 ([8]). *Пусть для начальных приближений $u_0, v_0 \in D$ выполняются неравенства*

$$u_0 \leq v_0, \quad u_0 \leq Tu_0, \quad Tv_0 \leq v_0. \tag{4}$$

Если при всех $u, v \in \langle u_0; v_0 \rangle$ оператор $QT' \geq 0$ ($Q = I - P$, I — тождественный оператор), а оператор $I - PB(u, v)$ имеет положительный обратный $\Gamma = [I - PB(u, v)]^{-1} > 0$, то последовательные приближения, определяемые алгоритмом (2), удовлетворяют неравенствам

$$u_n \leq u_{n+1} \leq v_{n+1} \leq v_n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{5}$$

В [8] также доказано, что если конус K правилен, оператор $(T - PB)$ непрерывен или K-нормален, а $(T - PB)$ вполне непрерывен, то в условиях леммы уравнение (1) имеет на $\langle u_0; v_0 \rangle$ по крайней мере одно решение x, к которому сходятся последовательности $\{u_n\}$, $\{v_n\}$.

Теорема 1. *Пусть E — банахово пространство, полуупорядоченное конусом $K \subset E$, и выполняются условия леммы. Если справедливо хотя бы одно из следующих условий*:

а) *конус K сильно миниэдрален*;

б) *на отрезке $\langle u_0; v_0 \rangle$ оператор T непрерывен, $PB(u, v)$ ограничен по совокупности переменных, существует оператор F, удовлетворяющий условию $F(x+y) - F(x) \geq \alpha(\|y\|)z$, $(x, x+y \in \langle u_0; v_0 \rangle$, $y \in K)$, где $z \neq 0$ — фиксированный элемент из K, $\alpha(r) > 0$ при $r > 0$ — неубывающая непрерывная функция такая, что $\lim\limits_{r \to \infty} r\alpha(r) = \infty$*;

в) *конус K нормален, оператор $(T - PB)$ слабо непрерывен, пространство E слабо полно, единичный шар в E слабо компактен*;

г) *конус K телесен, нормален и миниэдрален, оператор $\Gamma_0[T - PB]$, где $\Gamma_0 = [I - PB(u_0, v_0)]^{-1}$, компактен на $\langle u_0; v_0 \rangle$.*

Тогда у оператора T существует на $\langle u_0; v_0 \rangle$ по крайней мере одна неподвижная точка x^* и

$$u_n \leq u_{n+1} \leq x^* \leq v_{n+1} \leq v_n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{6}$$

Если $\lim\limits_{n \to \infty} u_n = \lim\limits_{n \to \infty} v_n$, то x^* — единственная точка.

Доказательство. Пусть $Ax = x + \Gamma_0(Tx - x) = \Gamma_0[Tx - PB(u_0, v_0)x]$. Покажем, что A, а следовательно и T, имеют неподвижную точку $x^* \in \langle u_0; v_0 \rangle$.

а) Обозначим через U множество элементов $x \in \langle u_0; v_0 \rangle$ таких, что $x \leq Ax$. Это множество не пусто, т. к. $Au_0 = u_0 + \Gamma_0(Tu_0 - u_0) \geq u_0$. Оператор A изотонный на $\langle u_0; v_0 \rangle$. Действительно, если $x \leq y$, $x, y \in \langle u_0; v_0 \rangle$, то

$$Ax - Ay = x - y + \Gamma_0[Tx - Ty - (x - y)] =$$

$$= x - y + \Gamma_0\left[\int_0^1 PB(y + \tau(x-y), y + \tau(x-y))(x-y)d\tau + \int_0^1 QT'(y + \tau(x-y))(x-y)d\tau - (x-y)\right] \leq$$

$$\leq x - y - \Gamma_0[(I - PB(u_0, v_0))(x - y)] + \Gamma_0 \int_0^1 QT'(y + \tau(x-y))(x-y)d\tau \leq \theta.$$

Так как $A(Ax) \geq Ax$ для любого $x \in U$ в силу изотонности A, то $AU \subset U$. Пусть $x^* = \sup U$. Очевидно, $u_0 \leq x^* \leq v_0$, т. е. $x^* \in \langle u_0; v_0 \rangle$. Из изотонности A следует $Ax^* \geq Ax \geq x$ $\forall x \in U$. Это значит, что элемент Ax^* является верхней границей для U. Следовательно, $Ax^* \geq x^*$. Но тогда $x^* \in U$, в силу чего $Ax^* \in U$ и $Ax^* \leq x^*$. Итак, $Ax^* = x^*$.

Очевидно, что A оставляет инвариантным конусный отрезок $\langle u_n; v_n \rangle$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ Тогда (6) следует из монотонности последовательностей $\{u_n\}$ и $\{v_n\}$ и $x^* \in \langle u_n; v_n \rangle$. Если $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = x^* = \lim\limits_{n\to\infty} v_n$, то x^* — единственная неподвижная точка на $\langle u_0; v_0 \rangle$.

б) Предположим, что последовательность $\{u_n\}$ не сходится. Тогда для некоторой подпоследовательности $u_0 \leq u_{n_1} \leq u_{n_2} \leq \cdots \leq u_{n_k} \leq \cdots \leq v_0$ и некоторого $\varepsilon > 0$ будут выполнены неравенства $\|u_{n_{k+1}} - u_{n_k}\| > \varepsilon$, $k = 1, 2, \ldots$ Поэтому $Fu_{n_{k+1}} \geq Fu_{n_k} + \alpha(\varepsilon)z \geq \cdots \geq Fu_{n_1} + k\alpha(\varepsilon)z$. Отсюда $\frac{1}{k\alpha(\varepsilon)}(Fv_0 - Fu_0) \geq z$, $k = 1, 2, \ldots$ Переходя в этом неравенстве к пределу при $k \to \infty$, получим $z \leq \theta$. Это противоречит тому, что $z \neq \theta \in K$.

Аналогично доказывается сходимость последовательности $\{v_n\}$. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = u^*$, $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = v^*$. Переходя к пределу в алгоритме (2), убеждаемся, что $u^* \leq v^*$. Если z^* — произвольное решение этого уравнения на отрезке $\langle u_0; v_0 \rangle$, то элементы u_0, z^* удовлетворяют всем условиям леммы и по доказанному $u_n \leq z^*$. Переходя к пределу в этом неравенстве, получим $u^* \leq z^*$, т. е. u^* — наименьшее решение. Аналогично доказывается, что v^* наибольшее, т. е. имеет место неравенство $u_n \leq u^* \leq z^* \leq v^* \leq v_n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$

в) Доказательство следует из принципа Тихонова о неподвижной точке. Последовательности $\{u_n\}$ и $\{v_n\}$ сходятся к неподвижным точкам слабо [1].

г) Так как $U = A\langle u_0; v_0 \rangle$ — компактное множество, то $u_1 = Au_0 \in U$. Обозначим через U_1 множество тех элементов из U, для которых $Ax \geq x$. Так как $Au_1 = A(Au_0) \geq Au_0 = u_1$, то U_1 не пусто. Поскольку множество U_1 компактно и ограничено сверху, то существует $x^* = \sup U_1$ [2]. Тогда $x^* = Ax^*$. Это следует из доказательства п. а). $\square$

Условия а) и г) теоремы существенно различны. Действительно, конус неотрицательных функций в $C[0; 1]$ является телесным, нормальным и миниэдральным, но не является сильно миниэдральным [1].

Из п. г) теоремы 1 вытекает

Следствие. Пусть Ω — ограниченное замкнутое множество конечномерного евклидова пространства R^n, $C(\Omega)$ — пространство всех непрерывных на Ω функций $x(t)$ с нормой $\|x(t)\| = \max\limits_{\Omega} |x(t)|$, полуупорядоченное конусом K неотрицательных функций. Оператор $A = \Gamma_0[T - PB]$ компактно отображает шар $S(x_0; R) \subset C(\Omega)$ в себя. Тогда T имеет в шаре по крайней мере одну неподвижную точку.

Действительно, шар $S(x_0; R) \subset C(\Omega)$ можно рассматривать как конусный отрезок $\langle u_0; v_0 \rangle$, где $u_0 = u_0(t) \equiv x_0(t) - R$, $v_0 = v_0(t) \equiv x_0(t) + R$. Конус K пространства $C(\Omega)$ телесен, нормален и миниэдрален. Поэтому выполняется случай г) теоремы.

Определение 1. Изотонный ($x \leq y \Rightarrow Ax \leq Ay$) оператор A, преобразующий в себя некоторое множество $D \subset E$, называется предельно монотонно компактным на D, если компактна каждая последовательность

$$x_0 \geq Ax_1 \geq A^2x_2 \geq \cdots \geq A^nx_n \geq \cdots \tag{7}$$

или

$$x_0 \leq Ax_1 \leq A^2x_2 \leq \cdots \leq A^nx_n \leq \cdots, \quad x_k \in D. \tag{8}$$

Понятие предельной монотонной компактности охватывает широкие классы нелинейных операторов. К ним относятся, например, все компактные операторы A и операторы, некоторая степень A^m которых компактна. Если конус K вполне правильный, то свойством предельной монотонной компактности обладают все нелинейные ограниченные на D по норме операторы (все конусы в конечномерном пространстве вполне правильны, конус неотрицательных функций в пространстве L_p, $1 \le p < \infty$, вполне правилен). Если конус K правилен, а множество D ограничено снизу (сверху для случая (8)) некоторым элементом, то любой монотонный оператор предельно компактен [3].

Теорема 2. *Пусть выполняются условия леммы. Оператор A предельно монотонно компактен на $\langle u_0; v_0\rangle$. Тогда оператор T имеет на $\langle u_0; v_0\rangle$ по крайней мере одну неподвижную точку.*

Доказательство. Обозначим через U множество тех элементов $x \in \langle u_0; v_0\rangle$, для которых $Tx \le x$. Это множество не пусто, т. к. $Tv_n \le v_n$ для любого $n = 0, 1, 2, \dots$ Действительно, согласно (4) $Tv_0 \le v_0$. Покажем, что $Tv_1 \le v_1$. Именно,

$$v_1 - Tv_1 = Tv_0 + PB(u_0, v_0)(v_1 - v_0) - Tv_1 = PTv_0 - PTv_1 - PB(u_0, v_0)(v_0 - v_1) + QTv_0 - QTv_1 =$$
$$= \int_0^1 [PB(v_1 + \tau(v_0 - v_1), v_1 + \tau(v_0 - v_1)) - PB(u_0, v_0)](v_0 - v_1)d\tau +$$
$$+ \int_0^1 QT'(v_1 + \tau(v_0 - v_1))(v_0 - v_1)d\tau \ge 0$$

согласно (3)–(5) и положительности QT'. Методом математической индукции неравенство доказывается для любого n. Так как $A = I + \Gamma_0(T - I)$, то из $Tx \le x$ следует $Ax \le x$ для любого $x \in U$.

Определим на $\langle u_0; v_0\rangle$ функционалы

$$\alpha(v; k) = \sup \|A^k u - A^k \omega\|, \quad k = 1, 2, 3, \dots ; \quad A^k u \le A^k \omega \le v, \quad u, v \in U, \tag{9}$$

которые имеют смысл, т. к. для каждого $v \in U$ в силу монотонности A выполнены неравенства $A^k v \le v$. При возрастании k функционалы (9) не возрастают, а потому существует предел

$$\alpha(v) = \lim_{k \to \infty} \alpha(v; k), \quad v \in U.$$

Докажем, что в силу предельно монотонной компактности оператора A

$$\inf \alpha(v) = 0, \quad y \in U; \quad v \le y, \quad v \in U. \tag{10}$$

Предположим противное. Тогда найдутся такие $y_0 \in U$ и $\beta_0 > 0$, что при всех $v \le y_0$, $v \in U$, и всех k выполняется неравенство $\alpha(v; k) > \beta_0$. Поэтому последовательность

$$y_0 \ge A^2 x_1 \ge A^2 y_1 \ge A^4 x_2 \ge A^4 y_2 \ge \dots \ge A^{2s} x_s \ge A^{2s} y_s \ge \cdots , \tag{11}$$

для которой $\|A^{2s} x_s - A^{2s} y_s\| > \beta_0$, $x_s, y_s \in U$, не сходится. Но (11) — это последовательность вида (7); поэтому она компактна, а компактные монотонные последовательности сходятся. Пришли к противоречию. Равенство (10) позволяет по элементу v_0 из (4) построить последовательность (7) такую, что

$$\alpha(A^k v_k) < \frac{1}{k}, \quad v_k \in U, \quad k = 1, 2, 3, \dots \tag{12}$$

Построенная последовательность сходится к некоторому элементу $v^* \in \langle u_0; v_0\rangle$. Согласно (7) $A^k v_k \ge v^*$, отсюда в силу изотонности A следует $A^{k+1} v_k \le Av^*$ и т. к. $A^k v_k \ge A^{k+1} v_k$, то $A^k v_k \ge Av^*$. Но v^* — предельный элемент, поэтому $Av^* \le v^*$, значит, $v^* \in U$. Следовательно, при любых k и m выполняются неравенства

$$A^k v_k \ge A^{k+m} v_{k+m} \ge v^* \ge Av^* \ge A^{k+m} v^*. \tag{13}$$

Из (12) вытекают оценки

$$\overline{\lim} \|A^{k+m} v_{k+m} - A^{k+m} v^*\| \le \frac{1}{k}, \quad k = 1, 2, 3, \dots \tag{14}$$

Из (13) следует неравенство $0 \le v^* - Av^* \le A^{k+m}v_{k+m} - A^{k+m}v^*$, а из (14) получим $v^* = Av^*$, следовательно, и $v^* = Tv^*$.

Аналогичную теорему можно доказать для последовательности (8).

Определение 2. Оператор A называется v-замкнутым сверху на множестве $D \subset E$, E — частично упорядоченное множество, если для любых линейно упорядоченных множеств $\{x_\alpha\}$ и $\{Ax_\alpha\}$ существует элемент $y = \sup\{Ax_\alpha\}$, который принадлежит D. Аналогично определяется v-замкнутость снизу оператора A, v-замкнутый снизу и сверху оператор A называют v-замкнутым [4].

Теорема 3. *Пусть выполняются условия леммы и оператор T является* 1) *v-замкнутым сверху на $\langle u_0; v_0\rangle$ либо* 2) *v-замкнутым снизу на $\langle u_0; v_0\rangle$. Тогда T имеет на $\langle u_0; v_0\rangle$ по крайней мере одну неподвижную точку.*

Доказательство. 1) Обозначим через U множество тех элементов $x \in \langle u_0; v_0\rangle$, для которых $x \le Tx$. Это множество не пусто, т. к. $u_n \le Tu_n$ для любого $n = 0, 1, 2, \ldots$ (Доказательство аналогично случаю $Tv_n \le v_n$.) Введем в U новую упорядоченность по правилу: $x \prec y$, если $x < y$ и $Tx \le Ty$. В новой упорядоченности каждое линейно упорядоченное множество $\{u_n\}$ ограничено сверху. Действительно, в старой упорядоченности $\{u_n\}$ и $\{Tu_n\}$ являются линейно упорядоченными множествами. Поэтому элемент $y = \sup\{Tu_n\}$ существует и принадлежит U. Кроме того, $u_n \le Tu_n \le y$ и $Tu_n \le y \le Ty$. Значит, каждое $u_n \prec y$, т. е. $\{u_n\}$ в новой упорядоченности ограничено сверху. По теореме Цорна для любого $u_n \in U$ в U существует хотя бы один максимальный элемент $x^* \succ u_n$. Очевидно, $y^* = Tx^* \ge x^*$ и $Ty^* \ge y^* = Tx^*$, т. е. $x^* \prec y^*$. Отсюда и из максимальности x^* следует $x^* = Tx^*$, где $u_n \le x^*$.

Доказательство 2) аналогично доказательству 1).

Литература

1. Красносельский М.А. *Положительные решения операторных уравнений. Главы нелинейного анализа.* – М.: Физматгиз, 1962. – 394 с.
2. Стеценко В.Я. *О неподвижных точках нелинейных отображений* // Сиб. матем. журн. – 1969. – Т. 10. – № 3. – С. 642–652.
3. Красносельский М.А., Соболев А.В. *О неподвижных точках разрывных операторов* // Сиб. матем. журн. – 1973. – Т. 14. – № 3. – С. 674–677.
4. Бахтин И.А. *О существовании общих неподвижных точек для абелевых совокупностей разрывных операторов* // Сиб. матем. журн. – 1972. – Т. 13. – № 2. – С. 243–251.
5. Опойцев В.И. *Обобщение теории монотонных и вогнутых операторов* // Тр. Моск. матем. о-ва. – 1978. – Т. 36. – С. 237–273.
6. Курпель Н.С., Шувар Б.А. *Двусторонние операторные неравенства и их применения.* – Киев: Наук. думка, 1980. – 267 с.
7. Крейн М.Г., Рутман М.А. *Линейные операторы, оставляющие инвариантным конус в пространстве Банаха* // УМН. – 1948. – Т. 3. – Вып. 1. – С. 3–95.
8. Шпортюк Г.А. *О проекционно-итеративном методе включения нулей операторов* // Препринт. Ин-т матем. АН УССР, ИМ-74-3. – Киев, 1974. – 27 с.

Черниговский педагогический университет (Украина)

Поступила
24.09.1999