ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1998 МАТЕМАТИКА № 5 (432)

УДК 517.518

М.Б. ВАКАРЧУК

О СВЯЗИ МЕЖДУ КОМПЛЕКСНОЙ СПЛАЙН-АППРОКСИМАЦИЕЙ И НЕПРЕРЫВНОЙ ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОСТЬЮ ФУНКЦИЙ НА КРИВОЙ

Важное место в теории приближения занимают вопросы, связанные с аппроксимацией функций на кривых. Одним из аппаратов приближения в $\mathbb{C}$ являются комплексные полиномиальные сплайны ([1], [2], с. 78–93), впервые определенные в [3]. В данной работе получено соотношение, характеризующее условие непрерывной дифференцируемости функций на кривой через последовательность ее наилучших приближений комплексными полиномиальными сплайнами. Вопросы о связи между дробно-рациональными и кусочно-алгебраическими приближениями и некоторыми структурными свойствами функции рассматривались в работах [4], [5].

Пусть M — ограниченное замкнутое множество с односвязным дополнением в $\overline{\mathbb{C}}$, граница ∂M которого состоит из конечного числа жордановых дуг, и пусть $\varphi(z) = \varphi(z, M)$ — функция, осуществляющая конформное отображение внешности M на внешность единичного круга с центром в точке $z = 0$ так, что $\lim\limits_{z\to\infty} \varphi(z)/z$ существует и равен некоторому положительному числу. Обозначим через C_R $(R \geq 1)$ линию уровня, определяемую равенством $|\varphi(z)| = R$, и введем следующие величины:

$$d(z,R)_{\partial M} = \inf\{|z-t| : t \in C_R\}, \quad z \in \partial M; \quad d(R)_{\partial M} = \inf\{d(z,R)_{\partial M} : z \in \partial M\}.$$

Пусть Γ — замкнутая спрямляемая жорданова кривая, для любых двух точек которой z_1 и z_2 $(z_1 \neq z_2)$ существует такая постоянная K_Γ, зависящая только от кривой Γ, что

$$L(\overset{\smile}{z_1, z_2}) \leq K_\Gamma |z_1 - z_2|. \tag{1}$$

Здесь $L(\overset{\smile}{z_1, z_2})$ — длина меньшей из дуг, на которые Γ разбивается точками z_1 и z_2. Множество всех таких кривых в комплексной плоскости $\mathbb{C}$ обозначим символом $\mathcal{L}$ [6]. Пусть $C^k(\Gamma)$ $(k \in \mathbb{N})$ — класс комплекснозначных функций $f(z)$, определенных на кривой Γ, у которых производные, взятые вдоль Γ, непрерывны вплоть до k-й. Через $L_\infty(\Gamma)$ обозначим множество функций $f(z)$, определенных на Γ, таких, что $\|f\|_{L_\infty(\Gamma)} = \sup\operatorname{vrai}\{|f(z)| : z \in \Gamma\} < \infty$.

Введем натуральную параметризацию на кривой $\Gamma \in \mathcal{L}$, длину которой обозначим $L(\Gamma)$, $\Gamma = \{z(s) : 0 \leq s \leq L(\Gamma)\}$. При этом подразумеваем, что при возрастании s от 0 до $L(\Gamma)$ точка $z(s)$ движется по Γ против часовой стрелки. Полагаем $z(s_1) \preccurlyeq z(s_2)$, если $s_1 \leq s_2$. Под $\Delta_n = \{z_j = z(jL(\Gamma)/n)\}_{j=0}^n$ понимаем разбиение кривой Γ.

Определим $\Gamma_j = \{z \in \Gamma : z_{j-1} \preccurlyeq z \preccurlyeq z_j\}$, $j = \overline{1,n}$. Рассмотрим далее разбиение Δ'_{n+1}, получающееся из Δ_n путем добавления к нему точки, которая делит дугу Γ_1 на две дуги равной длины. Разбиение Δ'_{n+2}, в свою очередь, получается из Δ'_{n+1} путем добавления точки, делящей Γ_2 на две равные по длине дуги, и так далее. Заметим, что у разбиений вида $\Delta'_{2^j n}$ $(j = 0, 1, 2, \dots)$ узловые точки делят Γ на $2^j n$ дуг одинаковой длины.

Через $S^1_m(\Delta'_p, \Gamma)$ $(p \geq n)$ обозначим подпространство комплексных полиномиальных сплайнов степени m, дефекта 1, определенных по разбиению Δ'_p кривой Γ, т. е. $g(z) \in S^1_m(\Delta'_p, \Gamma)$, если $g(z) \in C^{m-1}(\Gamma)$ и на каждой дуге разбиения Δ'_p $g(z)$ есть полином m-й степени. Пусть $f \in C(\Gamma)$, $E^{m,1}_p(f)_C$ — величина наилучшего приближения функции f множеством $S^1_m(\Delta'_p, \Gamma)$:

$E_p^{m,1}(f)_C = \inf\{\|f-g\|_{C(\Gamma)} : g \in S_m^1(\Delta'_p,\Gamma)\} = \|f-g_{m,p}\|_{C(\Gamma)}$; $\|f\|_{C(\Gamma)} = \sup\{|f(z)|,\ z\in\Gamma\}$. Очевидно, $S_m^1(\Delta'_p,\Gamma) \subset S_m^1(\Delta'_{p+k},\Gamma)$, $k=1,2,\ldots$ При этом $E_p^{m,1}(f)_C \geq E_{p+k}^{m,1}(f)_C$.

Теорема. *Пусть функция $f\in C(\Gamma)$, где $\Gamma\in\mathcal{L}$, и числа $n,m\in\mathbb{N}$ $(m\geq 2)$. Если*

$$\sum_{p=n}^{\infty} E_p^{m,1}(f)_C < \infty, \tag{2}$$

то f является непрерывно дифференцируемой по z на Γ и ряд, составленный из производных от сплайнов ее наилучших приближений, равномерно сходится к $f'(z)$ на Γ, т. е.

$$f'(z) = g'_{m,2^k n}(z) + \sum_{j=k}^{\infty}[g'_{m,2^{j+1}n}(z) - g'_{m,2^j n}(z)]. \tag{3}$$

Доказательство. Установим сначала справедливость неравенства

$$\|g^{(k)}\|_{L_\infty(\Gamma)} \leq c(m,\Gamma,k)n^k\|g\|_{C(\Gamma)}, \quad k=\overline{1,m}, \tag{4}$$

где $g\in S_m^1(\Delta_n,\Gamma)$, $c(m,\Gamma,k)$ — константа, зависящая только от указанных в скобках параметров.

Известно [7], что для незамкнутой жордановой кривой T

$$d(1+\tfrac{1}{m})_T \geq \alpha_T/(m(m+1)), \quad m\in\mathbb{N}, \tag{5}$$

где α_T — константа, зависящая только от кривой T. При этом [8]

$$(\operatorname{diam} T)/4 \leq \alpha_T \leq 2\operatorname{diam} T. \tag{6}$$

Пусть $A(z)$ есть положительная функция, определенная на T. Тогда [9] для производных всякого многочлена $P_m(z)$ степени не выше m, удовлетворяющего в точках $z\in T$ условию $P_m(z)\leq A(z)$, будет во всех этих точках выполняться неравенство

$$|P_m^{(k)}(z)| \leq (1+\varepsilon)ek!\,A(z)/[d,(z,1+\tfrac{1}{m})_T]^k, \tag{7}$$

где ε равномерно стремится к нулю при $m\to\infty$.

Рассмотрим далее дугу Γ_j. Очевидно, $\operatorname{diam}\Gamma_j \geq |z_j - z_{j-1}|$. Отсюда и из (1), (6) имеем

$$\alpha_{\Gamma_j} \geq |z_j - z_{j-1}|/4 \geq L(\overset{\smile}{z_{j-1}, z_j})/(4K_\Gamma). \tag{8}$$

Из (5) следует

$$d(1+\tfrac{1}{m})_{\Gamma_j} \geq L(\overset{\smile}{z_{j-1}, z_j})/(4K_\Gamma m(m+1)). \tag{9}$$

Полагая в (7) $A(z)=\max\{|P_m(z)|,\ z\in\Gamma_j\}$, учитывая (9) и тот факт, что $L(\overset{\smile}{z_{j-1}, z_j}) = L(\Gamma)/n$, получаем

$$\|P_m^{(k)}\|_{C(\Gamma_j)} \leq c(m,\Gamma,k)n^k\|P_m\|_{C(\Gamma_j)}, \quad c(m,\Gamma,k) = (1+\varepsilon)ek!\,[4K_\Gamma m(m+1)/L(\Gamma)]^k. \tag{10}$$

Рассмотрим сплайн $g(z)\in S_m^1(\Delta_n,\Gamma) : g(z) = \sum\limits_{j=1}^{n} P_{m,j}(z)\Phi_j(z)$; $\Phi_j(z) = \{1,$ если $z\in\Gamma_j$; $0,$ если $z\notin\Gamma_j\}$. Используя (10) и представление функции $g(z)$, получим

$$\|g^{(k)}\|_{L_\infty(\Gamma)} = \max_{1\leq j\leq n}\|P_{m,j}^{(k)}\|_{C(\Gamma_j)} = \|P_{m,j^*}^{(k)}\|_{C(\Gamma_{j^*})} \leq c(m,\Gamma,k)n^k\|P_{m,j^*}\|_{C(\Gamma_{j^*})} \leq c(m,\Gamma,k)n^k\|g\|_{C(\Gamma)}.$$

Неравенство (4) доказано.

Запишем далее, следуя [10], при $z\in\Gamma$, $k\in\mathbb{N}$

$$f(z) - g_{m,2^k n}(z) = \sum_{j=k}^{\infty}[g_{m,2^{j+1}n}(z) - g_{m,2^j n}(z)].$$

Установим равномерную сходимость ряда

$$\sum_{j=k}^{\infty}[g'_{m,2^{j+1}n}(z)-g'_{m,2^jn}(z)].$$

С учетом (2) и (4) имеем

$$\sum_{j=k}^{\infty}|g'_{m,2^{j+1}n}(z)-g'_{m,2^jn}(z)|\le\sum_{j=k}^{\infty}\|g'_{m,2^{j+1}n}-g'_{m,2^jn}\|_{C(\Gamma)}\le$$

$$\le c(m,\Gamma)\sum_{j=k}^{\infty}2^{j+1}n\|g_{m,2^{j+1}n}-g_{m,2^jn}\|_{C(\Gamma)}\le 8c(m,\Gamma)\sum_{j=1}^{\infty}(2^{j-1}nE^{m,1}_{2^jn}(f)_C)\le$$

$$\le 8c(m,\Gamma)\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{p=2^{j-1}n+1}^{2^jn}E^{m,1}_p(f)_C=8c(m,\Gamma)\sum_{p=n+1}^{\infty}E^{m,1}_p(f)_C<\infty.$$

Таким образом, функция f непрерывно дифференцируема по z на кривой Γ и имеет место равенство (3). $\square$

Литература

1. Goodman T., Lee S., Sharma A. *Approximation and interpolation by complex splines on the torus* // Proc. Edinburgh Math. Soc. – 1989. – V. 32. – № 2. – P. 197–212.
2. Wronicz Z. *Chebyshevian splines.* – Warshawa: Inst. Math. Polish Acad. Sci., 1990. – 100 p.
3. Ahlberg J.H., Nilson E.N., Walsh J.L. *Complex cubic splines* // Trans. Amer. Math. Soc. – 1967. – V. 129. – № 3. – P. 391–413.
4. Долженко Е.П. *Рациональные аппроксимации и граничные свойства аналитических функций* // Матем. сб. – 1966. – Т. 69. – № 4. – С. 497–524.
5. Долженко Е.П., Данченко В.И. *Отображение множеств конечной альфа-меры посредством рациональных функций* // Изв. АН СССР. Сер. матем. – 1987. – Т. 51. – № 6. – С. 1309–1321.
6. Шевчук И.А. *Приближение многочленами и следы непрерывных на отрезке функций.* – Киев: Наукова думка, 1992. – 224 с.
7. Тамразов П.М. *Экстремальные конформные отображения и полюсы квадратичных дифференциалов* // Изв. АН СССР. Сер. матем. – 1968. – Т. 32. – № 5. – С. 1033–1043.
8. Голузин Г.М. *Геометрическая теория функций комплексного переменного.* – 2-е изд. – М.: Наука, 1966. – 628 с.
9. Дзядык В.К. *О проблеме С.М. Никольского в комплексной области* // Изв. АН СССР. Сер. матем. – 1959. – Т. 23. – № 5. – С. 697–736.
10. Wronicz Z. *On approximation by complex splines* // Тр. Междунар. конф. по конструктивн. теории функций. Варна, 1–5 июня 1981. – София, 1983. – С. 577–583.

Днепропетровский государственный университет

Поступили
первый вариант 06.09.1994
окончательный вариант 29.07.1997