ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2007 МАТЕМАТИКА № 4 (539)

УДК 517.546

Л.А. АКСЕНТЬЕВ, А.Н. АХМЕТОВА, А.В. ХМЕЛЬНИЦКАЯ

О ВЫПУКЛОСТИ ПОВЕРХНОСТЕЙ, ОПРЕДЕЛЯЕМЫХ КОНФОРМНЫМ РАДИУСОМ ПЛОСКОЙ ОБЛАСТИ

Как уже отмечалось (напр., [1]–[3]), поверхность конформного радиуса

$$R(\zeta) \equiv R(f(E), f(\zeta)) = |f'(\zeta)|(1-|\zeta|^2), \quad \zeta \in E, \tag{1}$$

односвязной области $D = f(E)$ (образа единичного круга $E = \{\zeta : |\zeta| < 1\}$ при отображении регулярной функцией $z = f(\zeta)$) обладает замечательным качеством. Именно, она является выпуклой вверх над областью D тогда и только тогда, когда D — выпуклая область. Интересный эффект вносят такие области D, дополнения которых до полной плоскости являются выпуклыми множествами. Критерием для этих областей является выпуклость вниз поверхности конформного радиуса.

Для поверхностей с уравнением $S = \ln R(f^{-1}(z))$ таких наглядных качеств не существует, хотя критерии выпуклости вверх поверхностей над конечной и над бесконечной областями D легко выписываются. Это сделано в первой части статьи. Выделяются также подклассы функций, удовлетворяющих таким критериям и не удовлетворяющих им.

Во второй части проводится анализ поверхностей для аналогов конформных радиусов в двусвязном случае. Эти аналоги отличаются от внутренних радиусов ([4], п. 4.8) и обычно называются гиперболическими радиусами [5], потому что формула

$$R(\zeta) = R(D, f(\zeta)) = \frac{1}{\lambda(D, f(\zeta))} \tag{2}$$

не зависит от порядка связности гиперболической области D. В этой формуле $\lambda(D, f(\zeta))$ является коэффициентом гиперболической метрики области D, а $f(\zeta)$ — функция, которая конформно отображает круг E на универсальную поверхность наложения области D при порядке связности ≥ 2. Напомним, что в односвязном случае внутренний радиус и конформный (гиперболический) радиус совпадают.

Сохраняя название "конформный радиус" за формулами (1) и (2), будем отождествлять конформный радиус универсальной поверхности наложения области D и конформный радиус самой области D.

Возвращаясь к описанию второй части, отметим, что в ней дается краткая характеристика поверхности с уравнением $\omega = R(\zeta)$ для концентрического кольца, для внешности круга с выколотой бесконечно удаленной точкой [6] и для круга с выколотым центром.

В третьей части собраны дополнительные новые сведения о конформных радиусах для областей с выпуклыми полигональными границами.

1. Для отыскания критических точек конформного радиуса (1) нужно решить уравнение $\frac{\partial R}{\partial \zeta} = 0$. Это уравнение, содержащее $f'(\zeta)$ и $f''(\zeta)$, проще получить, если взять поверхность в форме

$$\Omega = \ln R^2(\zeta) = \ln f'(\zeta) + \ln \overline{f'(\zeta)} + 2\ln(1-\zeta\overline{\zeta}). \tag{3}$$

Тогда $\frac{\partial R}{\partial \zeta} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial \Omega}{\partial \zeta} = 0$ и поэтому

$$\frac{f''(\zeta)}{f'(\zeta)} - \frac{2\overline{\zeta}}{1-|\zeta|^2} = 0. \tag{4}$$

Довольно просто получается локальное представление для поверхности (3) над кругом E и над областью $f(E) = D$. Для этого подсчитаем две серии производных. Первая серия (производные по ζ) включает в себя левую часть из (4), т.е.

$$\Omega_\zeta \equiv \frac{\partial \Omega}{\partial \zeta} = \frac{f''(\zeta)}{f'(\zeta)} - \frac{2\overline{\zeta}}{1-|\zeta|^2},$$

и далее

$$\Omega_{\zeta\zeta} = \left(\frac{f''}{f'}\right)' - \frac{2\overline{\zeta}^2}{(1-|\zeta|^2)^2},$$
$$\Omega_{\zeta\overline{\zeta}} = -2\left[\frac{1}{1-|\zeta|^2} + \overline{\zeta}\frac{\zeta}{(1-|\zeta|^2)^2}\right] = \frac{-2}{(1-|\zeta|^2)^2}. \tag{5}$$

Вторая серия начинается с $\Omega_z = \frac{\partial \Omega}{\partial \zeta} / \frac{\partial z}{\partial \zeta} = (\frac{f''(\zeta)}{f'(\zeta)} - \frac{2\overline{\zeta}}{1-|\zeta|^2})/f'(\zeta)$ и приводит к двум следующим формулам:

$$\Omega_{zz} = \frac{\partial}{\partial \zeta}\left(\frac{\partial \Omega}{\partial z}\right) \Big/ \frac{\partial z}{\partial \zeta} =$$
$$= \left\{\left[\left(\frac{f''}{f'}\right)' - \frac{2\overline{\zeta}^2}{(1-|\zeta|^2)^2}\right]\frac{1}{f'(\zeta)} - \left(\frac{f''}{f'} - \frac{2\overline{\zeta}}{1-|\zeta|^2}\right)\frac{f''}{f'^2}\right\}\frac{1}{f'(\zeta)} =$$
$$= \frac{1}{f'^2}\left[\left(\frac{f''}{f'}\right)' - \frac{2\overline{\zeta}^2}{(1-|\zeta|^2)^2} - \frac{f''}{f'}\left(\frac{f''}{f'} - \frac{2\overline{\zeta}}{1-|\zeta|^2}\right)\right]$$

и

$$\Omega_{z\overline{z}} = \frac{\partial}{\partial \overline{\zeta}}\left(\frac{\partial \Omega}{\partial z}\right) \Big/ \frac{\partial \overline{z}}{\partial \overline{\zeta}} = -\frac{2}{(1-|\zeta|^2)^2} \Big/ |f'(\zeta)|^2. \tag{5$'$}$$

Условия выпуклости поверхности $\Omega = 2\ln R(\zeta) = 2\ln R(f^{-1}(z))$ следуют из локального представления

$$\Omega(\zeta_0 + re^{i\theta}) = \Omega(\zeta_0) + 2\,\mathrm{Re}(\Omega_\zeta(\zeta_0)e^{i\theta})r + \Big(\mathrm{Re}(\Omega_{\zeta\zeta}(\zeta_0)e^{i2\theta}) + \Omega_{\zeta\overline{\zeta}}(\zeta_0)\Big)r^2 + O(r^3)$$

и из аналогичного представления для $\Omega[f^{-1}(z_0 + re^{i\theta})]$. Поэтому условия выпуклости вверх записываются в виде

$$\mathrm{Re}(\Omega_{\zeta\zeta}e^{i2\theta}) + \Omega_{\zeta\overline{\zeta}} \le 0 \quad \Leftrightarrow \quad |\Omega_{\zeta\zeta}| \le -\Omega_{\zeta\overline{\zeta}}, \tag{6}$$

и с изменением знака в оценке коэффициента при r^2 получаются условия выпуклости вниз

$$\mathrm{Re}(\Omega_{\zeta\zeta}e^{i2\theta}) + \Omega_{\zeta\overline{\zeta}} \ge 0 \quad \Leftrightarrow \quad |\Omega_{\zeta\zeta}| \le \Omega_{\zeta\overline{\zeta}}. \tag{7}$$

Аналогично выглядят условия выпуклости вверх и вниз для поверхности $\Omega = 2\ln R[f^{-1}(z)]$ над областью $f(E)$

$$\mathrm{Re}(\Omega_{zz}e^{i2\theta}) + \Omega_{z\overline{z}} \le 0 \quad \Leftrightarrow \quad |\Omega_{zz}| \le -\Omega_{z\overline{z}} \tag{6$'$}$$

(выпуклость вверх),

$$\mathrm{Re}(\Omega_{zz}e^{i2\theta}) + \Omega_{z\overline{z}} \ge 0 \quad \Leftrightarrow \quad |\Omega_{zz}| \le \Omega_{z\overline{z}} \tag{7$'$}$$

(выпуклость вниз).

Так как $\Omega_{\zeta\overline{\zeta}}$ и $\Omega_{z\overline{z}}$ в силу (5) и (5′) строго отрицательны и условия (7) и (7′) невыполнимы, то поверхности $\Omega = 2\ln R(\zeta)$ и $\Omega = 2\ln R(f^{-1}(z))$ не будут выпуклыми вниз (даже локально!). Выполнение условий (6) и (6′) приводит к такому утверждению.

Теорема 1. *Поверхность с уравнением* (3) *над кругом E будет выпуклой вверх при условии*

$$\left|\left(\frac{f''}{f'}\right)' - \frac{2\overline{\zeta}^2}{(1-|\zeta|^2)^2}\right| \leq \frac{2}{(1-|\zeta|^2)^2}. \tag{8}$$

Над областью $D = f(E)$ поверхность с уравнением $\Omega = \ln R^2(f^{-1}(z))$ будет выпуклой вверх при условии

$$\left|\left(\frac{f''}{f'}\right)' - \frac{2\overline{\zeta}^2}{(1-|\zeta|^2)^2} - \frac{f''}{f'}\left(\frac{f''}{f'} - \frac{2\overline{\zeta}}{1-|\zeta|^2}\right)\right| \leq \frac{2}{(1-|\zeta|^2)^2}. \tag{9}$$

Точка, в которой выполняется равенство (4), *будет точкой максимума поверхности, если выполнится неравенство*

$$|\{f,\zeta\}| \leq \frac{2}{(1-|\zeta|^2)^2},$$

где $\{f,\zeta\} = (f''/f')' - (f''/f')^2/2$.

Доказательство. Подставим выражения для производных $\Omega_{\zeta\zeta}$, $\Omega_{\zeta\overline{\zeta}}$, Ω_{zz}, $\Omega_{z\overline{z}}$ в неравенства (6), (6′). При выполнении (4) заменим в (8) и (9) $\frac{2\overline{\zeta}}{1-|\zeta|^2}$ на $\frac{f''}{f'}$ и получим в левых частях этих формул представление для шварциана $\{f,\zeta\}$. Если же в гладкой критической точке поверхности она будет локально выпукла вверх, то эта точка определит максимальную точку поверхности. □

По плану доказательства теоремы 1 с использованием формул из [2] обосновывается

Теорема 2. *Поверхность с уравнением $\Omega = \ln R^2(\omega)$ для области $D^- = F(E^-)$ над $E^- = \{\omega : |\omega| > 1\}$ (внешность круга E) будет выпуклой вверх при условии*

$$\left|\left(\frac{F''}{F'}\right)' - \frac{2\overline{\omega}^2}{(|\omega|^2-1)^2}\right| \leq \frac{2}{(|\omega|^2-1)^2}. \tag{10}$$

Над областью $D^- = F(E^-)$ поверхность с уравнением $\Omega = \ln R^2(F^{-1}(z))$ будет выпуклой вверх при условии

$$\left|\left(\frac{F''}{F'}\right)' - \frac{2\overline{\omega}^2}{(|\omega|^2-1)^2} - \frac{F''}{F'}\left(\frac{F''}{F'} + \frac{2\overline{\omega}}{|\omega|^2-1}\right)\right| \leq \frac{2}{(|\omega|^2-1)^2}.$$

Критическая точка, в которой выполняется равенство $\frac{F''}{F'} + \frac{2\overline{\omega}}{|\omega|^2-1} = 0$, будет точкой локального максимума, если окажется справедливым неравенство

$$|\{F,\omega\}| \leq \frac{2}{(|\omega|^2-1)^2}.$$

Определим некоторые семейства функций, для которых справедливо условие (8) из теоремы 1.

Семейство, которое определяется соотношением

$$\frac{f''}{f'} = C \quad \Leftrightarrow \quad f(\zeta) = \frac{1}{C}e^{C\zeta + C_1} + C_2,$$

удовлетворяет условию (8), которое приводится к очевидному неравенству $2|\zeta|^2 \leq 2$.

В случае семейства, определяемого неравенством

$$\left|\frac{f''(\zeta)}{f'(\zeta)}\right| \leq M \leq 2, \quad \zeta \in E,$$

в силу леммы Шварца

$$\left|\left(\frac{f''(\zeta)}{f'(\zeta)}\right)'\right| \le \frac{M}{1-|\zeta|^2},$$

и поэтому

$$\left|\left(\frac{f''}{f'}\right)' - \frac{2\overline{\zeta}^2}{(1-|\zeta|^2)^2}\right| \le \frac{M(1-|\zeta|^2)+2|\zeta|^2}{(1-|\zeta|^2)^2} \le \frac{M+(2-M)|\zeta|^2}{(1-|\zeta|^2)^2} \le \frac{2}{(1-|\zeta|^2)^2},$$

т. е. условие (8) выполнится.

Для всего класса выпуклых областей будет выполняться критерий (9). Это утверждение основано на неравенстве (6′), которое справедливо для конформного радиуса выпуклой области. Действительно, дифференцируя функцию $S = \ln R(f^{-1}(z))$, запишем $S_z = \frac{R_z}{R}$, $S_{zz} = \frac{R_{zz}}{R} - \frac{{R_z}^2}{R^2}$, $S_{z\overline{z}} = \frac{R_{z\overline{z}}}{R} - \frac{|R_z|^2}{R^2}$. Поэтому критерий выпуклости вверх для поверхности $S = \ln R(f^{-1}(z))$ запишется в форме

$$|S_{zz}| \le -S_{z\overline{z}} \quad \Leftrightarrow \quad \left|\frac{R_{zz}}{R} - \frac{{R_z}^2}{R^2}\right| \le \frac{|R_z|^2}{R^2} - \frac{R_{z\overline{z}}}{R}$$

и будет выполняться, т. к. (в силу $|R_{zz}| \le -R_{z\overline{z}}$)

$$\left|\frac{R_{zz}}{R} - \frac{{R_z}^2}{R^2}\right| \le \frac{|R_{zz}|}{R} + \frac{|R_z|^2}{R^2} \le \frac{|R_z|^2}{R^2} - \frac{R_{z\overline{z}}}{R}.$$

Укажем классы функций, для которых неравенство (10) невыполнимо. Это функции, отображающие внешность единичного круга на внешность любого прямоугольника, и функции, отображающие внешность единичного круга на внешность любого правильного многоугольника. Данный факт легко устанавливается при асимптотической оценке указанного неравенства в окрестности бесконечно удаленной точки. Приведем эти вычисления для случая прямоугольника (для многоугольника проводятся аналогичные рассуждения). А именно,

$$F'(\omega) = \frac{\sqrt{(\omega^2 - e^{i2\alpha})(\omega^2 - e^{-i2\alpha})}}{\omega^2},$$

$$\frac{F''}{F'} = 2\frac{\cos 2\alpha \cdot \omega^2 - 1}{\omega(\omega^4 - 2\cos 2\alpha \cdot \omega^2 + 1)} = O\left(\frac{1}{\omega^3}\right), \omega \to \infty.$$

Тогда

$$\left(\frac{F''}{F'}\right)' = O\left(\frac{1}{\omega^4}\right), \frac{2\overline{\omega}^2}{(|\omega|^2-1)^2} = O\left(\frac{1}{\omega^2}\right), \omega \to \infty.$$

В левой части неравенства (10) будем иметь

$$\left|\left(\frac{F''}{F'}\right)' - \frac{2\overline{\omega}^2}{(|\omega|^2-1)^2}\right| \ge \frac{C}{|\omega|^2}, \omega \to \infty, C > 0.$$

Все неравенство (10) в окрестности бесконечно удаленной точки перейдет в следующее заведомо ложное неравенство:

$$\frac{C}{|\omega|^2} \le \frac{2}{(|\omega|^2-1)^2},$$

откуда сразу же следует факт невыпуклости вверх поверхности логарифма конформного радиуса для внешности прямоугольника.

2. Пусть $\mathbf{Q} = \{z \in \mathbf{C} : 1 < |z| < Q < \infty\}$ и α, β — корни уравнений

$$\tan(\pi\alpha) = \frac{\ln Q}{\pi}, \quad 0 < \alpha < \frac{1}{2}, \quad \text{и} \quad \tan(\pi\beta) = -\frac{\pi}{\ln Q}, \quad \frac{1}{2} < \beta < 1.$$

Теорема 3. *Поверхность конформного радиуса над кольцом* $\mathbf{Q}$ *состоит из следующих трех частей*:

а) *поверхность над кольцом* $1 < |z| < Q^{\alpha}$ *является выпуклой вниз,*
б) *поверхность над кольцом* $Q^{\beta} < |z| < Q$ *является выпуклой вверх,*
в) *поверхность над кольцом* $Q^{\alpha} < |z| < Q^{\beta}$ *состоит из седловых точек.*

Доказательство. Рассмотрим функцию $z = F(\zeta) = \exp\{-i\frac{\ln Q}{\pi}\ln(i\frac{1+\zeta}{1-\zeta})\}, \zeta \in E$, определяющую универсальную поверхность наложения для кольца $\mathbf{Q}$. Проведем предварительные подсчеты, необходимые для аналитического представления конформного радиуса в данном случае. Запишем

$$|F'(\zeta)| = 2\frac{\ln Q}{\pi}\frac{|z|}{|1-\zeta^2|}.$$

Введем вспомогательную переменную $\omega = i\frac{1+\zeta}{1-\zeta}$. Поэтому

$$\zeta = \frac{\omega - i}{\omega + i}, \quad 1-|\zeta|^2 = 4\frac{\operatorname{Im}\omega}{|\omega+i|^2}, \quad |1-\zeta^2| = \frac{4|\omega|}{|\omega+i|^2}.$$

Из представления $z = F(\zeta(\omega))$ получим

$$\omega = \exp\left\{i\frac{\pi\ln z}{\ln Q}\right\} = |\omega|\exp\left\{i\frac{\pi\ln|z|}{\ln Q}\right\}.$$

Тогда

$$R(z, F(E)) = |F'(\zeta)|(1-|\zeta|^2) = 2\frac{\ln Q}{\pi}|z|\frac{\operatorname{Im}\ \omega}{|\omega|} = 2\frac{\ln Q}{\pi}|z|\sin\frac{\pi\ln|z|}{\ln Q}, \quad 1 < |z| < Q. \tag{11}$$

Для выяснения поведения поверхности конформного радиуса в кольце $\mathbf{Q}$ приведем несложные выкладки с учетом обозначения $\phi = \frac{\pi\ln|z|}{\ln Q}$

$$R_z = \frac{\ln Q}{\pi}\sqrt{\frac{\overline{z}}{z}}\left(\sin\phi + \frac{\pi}{\ln Q}\cos\phi\right),$$
$$R_{zz} = -\frac{\ln^2 Q + \pi^2}{2\pi\ln Q}\frac{|z|}{z^2}\sin\phi, \quad R_{z\overline{z}} = \frac{1}{|z|}\left(\cos\phi + \frac{\ln^2 Q - \pi^2}{2\pi\ln Q}\sin\phi\right).$$

Преобразуя соотношение вида $(7')$

$$|R_{zz}| \le R_{z\overline{z}}, \tag{12}$$

получим неравенство $\tan\phi \le \frac{\ln Q}{\pi}$, $0 < \phi < \pi/2$, которое выполняется при всех $\phi \le \pi\alpha$, $0 < \alpha < \frac{1}{2}$. Это означает, что поверхность конформного радиуса, построенная над кольцом $1 < |z| < Q^{\alpha} < Q$, является поверхностью, выпуклой вниз.

Для отыскания области, над которой поверхность будет выпуклой вверх, достаточно решить неравенство

$$|R_{zz}| \le -R_{z\overline{z}} \tag{13}$$

в оставшейся части кольца $\mathbf{Q}$, т. е. неравенство вида $(6')$ для функции $R(z)$. Преобразуем его к виду $\tan\phi \ge -\frac{\pi}{\ln Q}$, $\pi/2 < \phi < \pi$. Это неравенство выполняется при всех $\phi \ge \pi\beta$, $\frac{1}{2} < \beta < 1$. Поэтому поверхность конформного радиуса, построенная над кольцом $Q^{\beta} < |z| < Q$, является поверхностью, выпуклой вверх.

В кольце $Q^{\alpha} < |z| < Q^{\beta}$ поверхность теряет локальную выпуклость. Это связано с наличием седловых точек в структуре поверхности. Для доказательства этого факта достаточно указать две кривые, имеющие различные направления выпуклости. Для удобства введем систему координат (x, y, u), зафиксируем точку на поверхности $(r_0, 0, 2\frac{\ln Q}{\pi} r_0 \sin\frac{\pi \ln r_0}{\ln Q})$, где $r_0 \in (Q^\alpha, Q^\beta)$. Одна кривая — часть окружности, описываемой системой

$$
\begin{gathered}
x^2 + y^2 = r_0^2, \\
u = 2\frac{\ln Q}{\pi} r_0 \sin\frac{\pi \ln r_0}{\ln Q},
\end{gathered}
$$

является выпуклой вниз. Другая кривая, описываемая системой

$$
\begin{cases}
x = r, \\
y = 0, \\
u = 2\dfrac{\ln Q}{\pi} r \sin\dfrac{\pi \ln r}{\ln Q},
\end{cases}
$$

является выпуклой вверх, т. к. $u_{rr} = \frac{2}{r}\big(\cos\phi - \frac{\pi}{\ln Q}\sin\phi\big) < 0$ при $r \in (Q^\alpha, Q^\beta)$. Отметим, что указанные кривые будут лежать в разных полупространствах относительно касательной плоскости к поверхности конформного радиуса в точке $(r_0, 0, 2\frac{\ln Q}{\pi} r_0 \sin\frac{\pi \ln r_0}{\ln Q})$. $\square$

Следствие 1 (ср. с [6], теорема 16). Поверхность конформного радиуса над внешностью круга с выколотой бесконечно удаленной точкой будет выпуклой вниз при $1 < |z| < \infty$.

Доказательство. При выполнении предельного перехода от кольца $\mathbf{Q}$ к кольцу $1 < |z| < \infty$ при $Q \to \infty$ получим выпуклость вниз предельного положения первой части из теоремы 1, когда $1 < |z| < \infty$. Две другие части в пределе пропадают, т. к.

$$
\lim_{Q\to\infty} Q^\alpha = \lim_{Q\to\infty} Q^\beta = \infty. \quad \square
$$

Заметим, что формула

$$
\lim_{Q\to\infty} R(z, F(E)) = 2|z| \ln|z| \lim_{Q\to\infty} \frac{\sin\frac{\pi \ln|z|}{\ln Q}}{\frac{\pi \ln|z|}{\ln Q}} = 2|z|\ln|z| = R(z, f(E)), \quad 1 < |z| < \infty, \tag{14}
$$

есть конформный радиус для области $f(E)$ с функцией $z = f(\zeta) = \exp\frac{1+\zeta}{1-\zeta}$, $\zeta \in E$, которая определяет универсальную поверхность наложения для области $1 < |z| < \infty$. Критических точек не обнаруживается, т. к. уравнение $R_z = \sqrt{\frac{\overline{z}}{z}}\,(\ln|z| + 1) = 0$ не имеет решений при $|z| > 1$.

Подставляя вторые производные

$$
R_{zz} = -\frac{\ln|z|}{2}\sqrt{\frac{\overline{z}}{z^3}}, \quad R_{z\overline{z}} = \frac{\ln|z| + 2}{2|z|}
$$

в неравенство (12), получим $\frac{\ln|z|}{2|z|} - \frac{\ln|z|+2}{2|z|} \le 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{|z|} \le 0$. Поэтому поверхность конформного радиуса является выпуклой вниз и имеет форму чаши, прикрепленной к окружности $|z| = 1$.

Рассмотрим кольцо $\mathbf{q} = \{z \in \mathbf{C} : q = \frac{1}{Q} < |z| < 1\}$. Функция $z^* = \frac{z}{Q}$ переведет кольцо $\mathbf{Q}$ в $\mathbf{q}$. Пусть $\widetilde{\alpha}$, $\widetilde{\beta}$ — корни уравнений

$$
\tan(\pi\widetilde{\alpha}) = \frac{\ln q}{\pi}, \quad \frac{1}{2} < \widetilde{\alpha} < 1, \quad \text{и} \quad \tan(\pi\widetilde{\beta}) = -\frac{\pi}{\ln q}, \quad 0 < \widetilde{\beta} < \frac{1}{2}.
$$

Теорема 3 будет верна и в случае кольца $\mathbf{q}$. А именно, имеет место

Теорема 4. *Поверхность конформного радиуса над кольцом* $\mathbf{q}$ *состоит из следующих трех частей*:

а) *поверхность над кольцом* $q < |z| < q^{\widetilde{\alpha}}$ *является выпуклой вниз,*

б) *поверхность над кольцом* $q^{\widetilde{\beta}} < |z| < 1$ *является выпуклой вверх,* в) *поверхность над кольцом* $q^{\widetilde{\alpha}} < |z| < q^{\widetilde{\beta}}$ *состоит из седловых точек.*

Доказательство. Отображение $z = F(\zeta) = q\exp\{i\frac{\ln q}{\pi}\ln(i\frac{1+\zeta}{1-\zeta})\}, |\zeta| < 1$, определит универсальную поверхность наложения для кольца $\mathbf{q}$. Конформный радиус в данном случае будет иметь вид

$$R(z, F(E)) = -2\frac{\ln q}{\pi}|z|\sin\frac{\pi\ln|z|}{\ln q}, \quad q < |z| < 1. \tag{15}$$

Поскольку (15) отличается от (11) лишь знаком, воспользуемся вычислениями, приведенными для кольца $\mathbf{Q}$. В выражениях для производных появится знак минус, но на промежутках выпуклости он не отразится. Действительно, учитывая $\phi = \frac{\pi\ln|z|}{\ln q}$, $0 < \phi < \pi$, имеем

$$R_{zz} = \frac{|z|}{z^2}\frac{\ln^2 q + \pi^2}{2\pi\ln q}\sin\phi, \quad R_{z\overline{z}} = -\frac{1}{|z|}\left(\cos\phi + \frac{\ln^2 q - \pi^2}{2\pi\ln q}\sin\phi\right).$$

Неравенство (12) в данном случае преобразуется к виду $\tan\phi \geq \frac{\ln q}{\pi}$ и будет выполняться при всех значениях $\phi \geq \pi\widetilde{\alpha}$, $\frac{1}{2} < \widetilde{\alpha} < 1$. Следовательно, поверхность конформного радиуса над $q < |z| < q^{\widetilde{\alpha}}$ является выпуклой вниз.

Неравенство (13) запишется в виде

$$\tan\phi \leq -\frac{\pi}{\ln q}. \tag{16}$$

Ему удовлетворяют значения $\phi \leq \pi\widetilde{\beta}$, $0 < \widetilde{\beta} < \frac{1}{2}$, и поверхность над $q^{\widetilde{\beta}} < |z| < 1$ будет выпуклой вверх. В кольце $q^{\widetilde{\alpha}} < |z| < q^{\widetilde{\beta}}$ поверхность теряет локальную выпуклость. Обоснование этого факта аналогично обоснованию, приведенному в доказательстве теоремы 3. □

Следствие 2. Поверхность конформного радиуса над кругом с выколотым центром состоит из двух частей:

а) поверхность над кольцом $e^{-1} < |z| < 1$ является выпуклой вверх,
б) поверхность над кольцом $0 < |z| < e^{-1}$ состоит из седловых точек.

Доказательство. При выполнении предельного перехода от кольца $\mathbf{q}$ к кольцу $0 < |z| < 1$ при $q \to 0$ не получим выпуклости вниз предельного положения первой части из теоремы 4, когда $0 < |z| < 1$, т. к.

$$\lim_{q\to 0} q^{\widetilde{\alpha}} = 0.$$

Две другие части проявятся в предельном случае следующим образом. Вернемся к неравенству (16), характеризующему выпуклость вверх поверхности конформного радиуса для кольца $\mathbf{q}$, и перейдем в нем к пределу при $q \to 0$. Заметим, что $\phi = \frac{\pi\ln|z|}{\ln q} \to 0$, когда $q \to 0$, и, следовательно, $\tan\phi \to 0$, когда $q \to 0$. Поэтому имеем $-1 \leq \frac{\ln q}{\pi}\tan\frac{\pi\ln|z|}{\ln q} \xrightarrow[q\to 0]{} \ln|z| \Rightarrow |z| \geq e^{-1}$. Таким образом, поверхность конформного радиуса над кольцом $e^{-1} < |z| < 1$ является выпуклой вверх, над кольцом $0 < |z| < e^{-1}$ состоит из седловых точек. □

Заметим, что формула

$$\lim_{q\to 0} R(z, F(E)) = -2|z|\ln|z| \lim_{q\to 0}\frac{\sin\frac{\pi\ln|z|}{\ln q}}{\frac{\pi\ln|z|}{\ln q}} = -2|z|\ln|z| = R(z, f(E)), \quad 0 < |z| < 1, \tag{17}$$

есть конформный радиус для области $f(E)$ с функцией $z = f(\zeta) = \exp\frac{1+\zeta}{\zeta-1}$, $\zeta \in E$, которая определяет универсальную поверхность наложения для области $0 < |z| < 1$. Учитывая, что (17) отличается от (14) только знаком, запишем производные второго порядка

$$R_{zz} = \frac{\ln|z|}{2}\sqrt{\frac{\overline{z}}{z^3}}, \quad R_{z\overline{z}} = -\frac{\ln|z|+2}{2|z|}.$$

Неравенство (12) в данном случае несодержательно, а неравенство (13) имеет вид $\frac{\ln|z|+1}{|z|} \geq 0$ и выполняется при $|z| \geq e^{-1}$.

3. Приведем три теоремы, характеризующие поверхности конформных радиусов для многоугольных областей.

Теорема 5. *Поверхность Ω^+ конформного радиуса для любого прямоугольника, построенная над кругом, не является поверхностью, выпуклой вверх. Пересаженная на внутренность прямоугольника поверхность Ω^+ является выпуклой вверх.*

Доказательство. Для доказательства первой части теоремы достаточно убедиться в существовании хотя бы одной точки перегиба в каком-либо сечении поверхности конформного радиуса, перпендикулярном плоскости круга.

Интеграл Кристоффеля–Шварца для прямоугольника имеет вид

$$f(\zeta) = \int_0^\zeta \frac{d\zeta}{\sqrt{(\zeta^2 - e^{i2\alpha})(\zeta^2 - e^{-i2\alpha})}}, \quad \zeta \in E, \quad \alpha \in [0, \pi/2].$$

Обозначим $\zeta = \xi + i\eta$. Рассмотрим кривую в сечении поверхности плоскостью, проходящей через вещественную ось, т. е. при $\zeta = \xi$. Она описывается функцией

$$R(\xi) = \frac{1-\xi^2}{\sqrt{\xi^4 - 2\xi^2\cos 2\alpha + 1}}, \quad \xi \in [-1, 1], \quad \alpha \in [0, \pi/2].$$

Исследование данной функции при $\alpha \in (0, \pi/2)$ приводит к следующим выводам. Так как

$$R'(\xi) = \frac{-4\xi(\xi^2+1)\sin^2\alpha}{\sqrt{(\xi^4 - 2\xi^2\cos 2\alpha + 1)^3}} = 0,$$

то $\xi = 0$ — единственная точка экстремума, точка максимума. Поскольку

$$R''(\xi) = 4\sin^2\alpha \frac{3\xi^6 + 5\xi^4 - (4\cos 2\alpha + 3)\xi^2 - 1}{\sqrt{(\xi^4 - 2\xi^2\cos 2\alpha + 1)^5}},$$

то точки, подозрительные на перегиб, находятся среди корней уравнения

$$3\xi^6 + 5\xi^4 - (4\cos 2\alpha + 3)\xi^2 - 1 = 0.$$

Введем замену $\xi^2 = t$ и рассмотрим функцию $\varphi(t, \alpha) = 3t^3 + 5t^2 - (4\cos 2\alpha + 3)t - 1$, $t \in [0, 1]$. Проверим знак функции на границах

$$\varphi(0, \alpha) = -1 < 0, \quad \varphi(1, \alpha) = 4(1 - \cos 2\alpha) > 0.$$

Следовательно, существует $t_0 \in (0, 1)$ такое, что $\varphi(t_0, \alpha) = 0$. Построив график $\varphi(t, \alpha)$, нетрудно убедиться в единственности $t_0 \in (0, 1)$. Очевидно, значение t_0 будет зависеть от значения параметра α. Функция $t_0 = t_0(\alpha)$, заданная неявно уравнением $3t_0^3 + 5t_0^2 - (4\cos 2\alpha + 3)t_0 - 1 = 0$, является монотонной при используемых здесь значениях α. Более того, $\alpha = 0$ и $\alpha = \pi/2$, крайние значения параметра, являются точками экстремума для $t_0(\alpha)$. Именно, $\alpha = 0$ — точка максимума, $\alpha = \pi/2$ — точка минимума.

Теперь можно дать полную характеристику кривой в рассматриваемом сечении. При $\alpha = 0$ имеем отрезок $R(\xi) = 1$, $\xi \in [-1, 1]$. При $\alpha \in (0, \pi/2]$ имеем кривую с двумя точками перегиба (в силу четности $R(\xi)$), которые при изменении параметра α от 0 до $\pi/2$ монотонно движутся от

± 1 к $\pm 1/\sqrt{3}$. Последние значения находятся непосредственным вычислением после подстановки $\alpha = 0$ и $\alpha = \pi/2$.

Таким образом, первая часть теоремы доказана. Справедливость второй части вытекает непосредственно из общего утверждения для выпуклых областей [2]. $\square$

Для того чтобы рассмотреть все возможные вырождения прямоугольника, запишем отображающую функцию в виде

$$f(\zeta) = \int_0^\zeta \frac{d\zeta}{\sqrt{(\zeta - e^{i\alpha})(\zeta - e^{i\beta})(\zeta - e^{i\gamma})(\zeta - e^{i\delta})}}.$$

Тогда получим следующие предельные положения. В случае равенства двух параметров (напр., $\alpha = \beta$) при отображении получится полуполоса. При попарном равенстве параметров (напр., $\alpha = \beta$, $\gamma = \delta$) при отображении получится полоса ширины $\pi/2$. При равенстве трех параметров получаем сектор раствора $\pi/2$. Наконец, при равенстве всех четырех параметров, участвующих в отображении, получаем полуплоскость. Отметим, что эти предельные области наследуют свойство невыпуклости поверхности конформного радиуса над кругом.

Теорема 6. *Поверхность Ω^- конформного радиуса для внешности любого прямоугольника, построенная над внешностью круга, не является поверхностью, выпуклой вниз. Пересаженная на внешность прямоугольника поверхность Ω^- является выпуклой вниз.*

Доказательство. Для доказательства первой части теоремы снова достаточно убедиться в существовании хотя бы одной точки перегиба в каком-либо сечении поверхности конформного радиуса, перпендикулярном плоскости круга.

Функция, осуществляющая переход от внешности круга во внешность прямоугольника, имеет вид

$$F(\omega) = \int_1^\omega \frac{\sqrt{(\omega^2 - e^{i2\alpha})(\omega^2 - e^{-i2\alpha})}}{\omega^2} d\omega, \quad \omega \in E^-, \quad \alpha \in [0, \pi/2].$$

Обозначим $\omega = u + iv$. Рассмотрим кривую в сечении поверхности плоскостью, проходящей через вещественную ось, т. е. при $v = 0$, $\omega = u$. Она описывается функцией

$$R(u) = \frac{u^2 - 1}{u}\sqrt{u^4 - 2u^2\cos 2\alpha + 1}, \quad |u| \geq 1, \quad \alpha \in [0, \pi/2].$$

Аналогично исследуем $R(u)$ при $\alpha \in (0, \pi/2)$. Имеем

$$R'(u) = \frac{2(u^6 - u^4\cos 2\alpha - u^2\cos 2\alpha + 1)}{u^3\sqrt{u^4 - 2u^2\cos 2\alpha + 1}} = \frac{2(u^2+1)(u^4 - (1+\cos 2\alpha)u^2 + 1)}{u^3\sqrt{u^4 - 2u^2\cos 2\alpha + 1}} \neq 0,$$

а критическая точка $u = 0 \notin (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$. Следовательно, точек экстремума не существует. Так как

$$R''(u) = \frac{2\varphi(u^2, \alpha)}{u^4\sqrt{(u^4 - 2u^2\cos 2\alpha + 1)^3}},$$

где $\varphi(u^2, \alpha) = u^{10} - 3\cos 2\alpha u^8 + 3(1 + \cos 2\alpha)u^6 - (4\cos^2 2\alpha + \cos 2\alpha + 5)u^4 + 9\cos 2\alpha u^2 - 3$, то точки, подозрительные на перегиб, находятся среди корней уравнения $\varphi(u^2, \alpha) = 0$. Произведем замену $u^2 = t$ и рассмотрим функцию $\varphi(t, \alpha)$, $t \geq 1$. Проверим ее знак на границах $\varphi(1, \alpha) = -4(\cos 2\alpha - 1)^2 < 0$, $\lim\limits_{t \to +\infty} \varphi(t, \alpha) = +\infty$. Поэтому функция $\varphi(t, \alpha)$ имеет нуль в некоторой точке $\widetilde{t_0}$. При подробном исследовании функции $\varphi(t, \alpha)$ устанавливается факт единственности нуля $\widetilde{t_0}$ при заданных условиях. Рассматривая $\widetilde{t_0}$ как функцию $\widetilde{t_0}(\alpha)$, $\alpha \in [0, \pi/2]$, обнаруживаем свойство монотонности, причем $\alpha = 0$ — точка минимума, $\alpha = \pi/2$ — точка максимума.

Теперь можно дать полную характеристику кривых в рассматриваемом сечении. При $\alpha = 0$ имеем кривые, выпуклые вниз. При $\alpha \in (0, \pi/2]$ имеем кривые с двумя точками перегиба, по одной для каждой из них (в силу четности $R(u)$), которые монотонным образом при изменении параметра α от 0 до $\pi/2$ симметрично движутся от ± 1 к $\pm\sqrt[4]{3}$. Последние значения находятся непосредственным вычислением после подстановки $\alpha = 0$ и $\alpha = \pi/2$.

Таким образом, первая часть теоремы доказана. Справедливость второй части вытекает непосредственно из общего утверждения для соответствующих областей [2]. $\square$

Отметим предельные положения параметра, при которых происходит вырождение области. При $\alpha = 0$ внешность прямоугольника вырождается во внешность горизонтального разреза $[-2, 2]$, при $\alpha = \pi/2$ – во внешность вертикального разреза $[-2i, 2i]$.

Для получения других возможных предельных положений запишем отображающую функцию в виде

$$F(\omega) = \int_1^\omega \frac{\sqrt{(\omega - e^{i\alpha})(\omega - e^{i\beta})(\omega - e^{i\gamma})(\omega - e^{i\delta})}}{\omega^2} d\omega$$

с условием $\operatorname*{Res}_{\omega=0} F'(\omega) = 0$. Установим, при каких значениях параметров будет выполняться условие однозначности. Для этого достаточно вычислить вычет подинтегральной функции в нуле

$$\operatorname*{Res}_{\omega=0} \frac{\sqrt{(\omega - e^{i\alpha})(\omega - e^{i\beta})(\omega - e^{i\gamma})(\omega - e^{i\delta})}}{\omega^2} =$$

$$= -\frac{1}{2} e^{-\frac{i}{2}(\alpha+\beta+\gamma+\delta)} [e^{i(\alpha+\beta+\gamma)} + e^{i(\alpha+\beta+\delta)} + e^{i(\alpha+\gamma+\delta)} + e^{i(\beta+\gamma+\delta)}].$$

Следовательно, условие однозначности выглядит так:

$$e^{i(\alpha+\beta+\gamma)} + e^{i(\alpha+\beta+\delta)} + e^{i(\alpha+\gamma+\delta)} + e^{i(\beta+\gamma+\delta)} = 0.$$

Оно эквивалентно равенству $e^{i\alpha} + e^{i\beta} + e^{i\gamma} + e^{i\delta} = 0$. Рассмотрев соответствующую векторную диаграмму, легко показать, что в этом случае четыре отмеченные точки являются вершинами прямоугольника, вписанного в единичный круг. Это значит, что поворотом круга можно добиться того, чтобы эти вершины заняли положение $\mp e^{\mp i\alpha}$ (с четырьмя комбинациями знаков). Следовательно, никаких других, кроме вышеуказанных, вырождений области не обнаруживается.

Теорема 7. *Существуют выпуклые многоугольные области, для которых поверхность Ω^+ конформного радиуса, построенная над кругом, не является поверхностью, выпуклой вверх.*

Доказательство. Организуем отображение единичного круга на внутренность многоугольной области следующим образом. Пусть точка $-i$ переходит в нуль, прообразом одной из вершин многоугольника является точка $e^{i\alpha}$, соседней с ней — точка $-e^{-i\alpha}$, а точка i и прообразы остальных вершин лежат между указанными двумя симметричными точками. Отображающая функция запишется в виде

$$f(\zeta) = \int_{-i}^{\zeta} \prod_{k=1}^{n} (\zeta - a_k)^{\alpha_k - 1} d\zeta.$$

Осуществим некоторые преобразования. Если стянуть точки $e^{i\alpha}$ и $-e^{-i\alpha}$ к i, а вместе с ними к i стянутся и все лежащие между ними, то при вычислении соответствующего интеграла Кристоффеля–Шварца будем иметь

$$\widetilde{f}(\zeta) = \int_{-i}^{\zeta} (\zeta - i)^{\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_n - n} d\zeta = \int_{-i}^{\zeta} (\zeta - i)^{n-2-n} d\zeta = \int_{-i}^{\zeta} (\zeta - i)^{-2} d\zeta = \frac{i}{2}\,\frac{\zeta + i}{\zeta - i}.$$

Полученное отображение переводит круг в полуплоскость, поверхность конформного радиуса которой не выпукла [3]. Тогда

$$f(\zeta) = \frac{i}{2}\,\frac{\zeta + i}{\zeta - i} + \varphi(\zeta),$$

где

$$\varphi(\zeta) = f(\zeta) - \widetilde{f}(\zeta) = \int_{-i}^{\zeta} \left[\prod_{k=1}^{n} (\zeta - a_k)^{\alpha_k - 1} - (\zeta - i)^{\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_n - n} \right] d\zeta$$

— функция, близкая к тождественному нулю внутри E. Следовательно, поверхность, соответствующая функции $f(\zeta)$, не может быть выпуклой вверх. $\square$

Замечание. Теорема 7 выполняется и для невыпуклых многоугольников, даже с усилением. Именно, утверждение теоремы справедливо для любого такого многоугольника, у которого хотя бы один внутренний угол больше π.

Литература

1. Ковалев Л.В. *Приведенные модули и теоремы искажения в теории однолистных функций.* – Дис. ... канд. физ.-матем. наук. – Владивосток, 2000. – 106 с.
2. Аксентьев Л.А. *Локальное строение поверхности внутреннего конформного радиуса для плоской области* // Изв. вузов. Математика. – 2002. – № 4. – С. 3–12.
3. Аксентьев Л.А. *Выпуклость поверхности конформного радиуса и оценки коэффициентов отображающей функции* // Изв. вузов. Математика. – 2004. – № 4. – С. 8–15.
4. Хейман В.К. *Многолистные функции.* – М.: Ин. лит., 1960. – 180 с.
5. Kovalev L.V. *Domains with convex hyperbolic radius* // Acta Math. Universitatis Comenianae. – 2001. – V. 70. – P. 207–213.
6. Avkhadiev F.G., Wirths K.-J. *The conformal radius as a function and its gradient image* // Israel J. of math. – 2005. – V. 145. – P. 349–374.

Казанский государственный университет

Поступила 21.06.2006