ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1998 МАТЕМАТИКА № 5 (432)

УДК 517.544

С.Р. МИРОНОВА

СИНГУЛЯРНЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ НА СЧЕТНОМ МНОЖЕСТВЕ ЗАМКНУТЫХ НЕСПРЯМЛЯЕМЫХ И ФРАКТАЛЬНЫХ КРИВЫХ

В данной работе рассматривается характеристическое сингулярное уравнение

$$\mathcal{K}^0\varphi \equiv a(t)\varphi(t) + b(t)S_\Gamma\varphi(t) = f(t) \tag{1}$$

в случае, когда контур Γ состоит из счетного множества замкнутых неспрямляемых кривых Γ_k, не вложенных друг в друга и имеющих точку сгущения $z_0 \neq \infty$. На заданные функции $a(t)$, $b(t)$, $f(t)$ и искомую функцию $\varphi(t)$ точек контура Γ налагаются некоторые условия в терминах фрактальной размерности, которые будут указаны ниже. Здесь S_Γ — это сингулярный интегральный оператор на контуре Γ. Поскольку контур Γ состоит из неспрямляемых кривых, то этот интегральный оператор понимается в обобщенном смысле.

1. *Введение.* Интегральное уравнение (1) хорошо изучено в случае, когда контур Γ состоит из конечного числа замкнутых и разомкнутых простых гладких и кусочно-гладких кривых (напр., [1]–[5]).

В классических монографиях Ф.Д. Гахова и Н.И. Мусхелишвили [1], [2] сингулярный интеграл определялся формулой

$$S^*_\Gamma\varphi(t) = \frac{1}{\pi i}\,\mathrm{v.\,p.}\int\limits_\Gamma \frac{\varphi(\tau)d\tau}{\tau - t},$$

а в работах Д.А. Квеселава [3], В.Д. Купрадзе [4], Т.Г. Гегелия [5] — формулой

$$\widetilde{S}_\Gamma\varphi(t) = \frac{1}{\pi i}\,\mathrm{v.\,p.}\int\limits_\Gamma \frac{\varphi(\tau) - \varphi(t)}{\tau - t}d\tau + \varphi(t).$$

Для гладких кривых $S^*_\Gamma\varphi = \widetilde{S}_\Gamma\varphi$.

На протяжении последних лет появился ряд работ, в которых определяется и исследуется интеграл по неспрямляемой кривой (напр., [6]–[10]). Воспользуемся этим обобщенным интегралом, чтобы придать смысл интегральному оператору $\widetilde{S}_\Gamma$ на контуре Γ, состоящем из неспрямляемых кривых, получим формулы Сохоцкого для этого оператора и изучим вопросы эквивалентности сингулярного уравнения (1) краевой задаче Римана на счетном множестве неспрямляемых кривых, исследованной Б.А. Кацем [11].

2. *Интеграл по неспрямляемой кривой и по счетному множеству неспрямляемых кривых.* Предлагаемые в [7]–[10] определения интеграла по неспрямляемой (фрактальной) кривой в случае плоской замкнутой кривой сводятся к следующему. Пусть Γ — простая замкнутая кривая,

Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (грант 95-01-00674).

ограничивающая область $\mathcal{D}^+$. Если функция $u(z)$ непрерывна в $\overline{\mathcal{D}}^+$ и имеет интегрируемые частные производные в $\mathcal{D}^+$, то для спрямляемой кривой Γ справедлива формула Стокса

$$\int\limits_{\Gamma} u(z)dz = -\iint\limits_{\mathcal{D}^+} \frac{\partial u}{\partial \overline{z}} dz\, d\overline{z}. \tag{2}$$

Если Γ — неспрямляемая кривая, то правая часть равенства (2) может рассматриваться как определение левой. Таким образом, для того, чтобы проинтегрировать заданную на Γ функцию $f(z)$, мы должны продолжить ее до заданной в $\overline{\mathcal{D}}^+$ функции $u(z)$ (это возможно для любой непрерывной функции f; см. [12]) и воспользоваться формулой (2). При этом возникают два вопроса.

1. При каких условиях производная $\partial u/\partial\overline{z}$ интегрируема в $\mathcal{D}^+$?

2. Не будет ли интеграл в правой части равенства (2) зависеть от выбранного нами продолжения, которое очевидным образом неединственно?

Приведем ответы на эти вопросы в удобной для последующего изложения форме.

С каждым компактным множеством $\Gamma \subset \mathbb{C}$ связан оператор продолжения Уитни E_0 (напр., [12], с. 205). Он продолжает любую непрерывную на Γ функцию $f(z)$ до непрерывной в $\mathbb{C}$ функции $u(z)$ таким образом, что

а) если $f \in H_\lambda(\Gamma)$, т. е. удовлетворяет на Γ условию Гёльдера с показателем $\lambda \in (0, 1]$, то $u(z)$ удовлетворяет такому же условию во всей комплексной плоскости;

б) в $\mathbb{C} \setminus \Gamma$ продолжение $u(z)$ имеет производные первого порядка, причем

$$|\operatorname{grad} u(z)| \le C(\operatorname{dist}(z, \Gamma))^{\lambda-1}, \quad C = \operatorname{const}.$$

Будем называть продолжения, обладающие этими двумя свойствами, продолжениями типа Уитни.

В работе [7] показано, что для продолжения типа Уитни интеграл в правой части (2) существует при условии

$$\lambda > \alpha(\Gamma) - 1, \tag{3}$$

где $\alpha(\Gamma)$ — верхняя метрическая размерность компакта Γ (см., напр., [13]); эту величину также называют клеточной размерностью Γ [14]. Далее, при этом условии для любой пары продолжений типа Уитни u_1, u_2 справедливо равенство

$$\iint\limits_{\mathcal{D}^+} \frac{\partial u_1}{\partial \overline{z}} dz\, d\overline{z} = \iint\limits_{\mathcal{D}^+} \frac{\partial u_2}{\partial \overline{z}} dz\, d\overline{z}.$$

Отметим, что из неравенства (3) следует $\alpha(\Gamma) < 2$; это значит, что кривая Γ имеет площадь 0 и ограничиваемая ею область измерима. Все это делает корректным

Определение 1. Если замкнутая кривая Γ имеет клеточную размерность $\alpha(\Gamma)$, $f \in H_\lambda(\Gamma)$ и выполнено условие (3), то

$$\int\limits_{\Gamma} f(z)dz \stackrel{\text{def}}{=} -\iint\limits_{\mathcal{D}^+} \frac{\partial(vu_0)}{\partial \overline{z}} dz\, d\overline{z}, \tag{4}$$

где u — любое продолжение типа Уитни функции f.

Легко видеть, что для спрямляемой кривой значение интеграла (4) совпадает с обычным.

Пусть Γ_k, $k = \overline{1, \infty}$, — простые замкнутые кривые, ограничивающие конечные области $\mathcal{D}_k^+$ и сгущающиеся к конечной точке z_0. Будем считать, что области $\mathcal{D}_k^+$ попарно не пересекаются, причем $z_0 \notin \Gamma_k$, $k = \overline{1, \infty}$.

Ниже будут использованы следующие обозначения:

$$\Gamma = \bigcup_{k\ge 1} \Gamma_k, \quad \overline{\Gamma} = \Gamma \bigcup \{z_0\}, \quad n_k(z) = \begin{cases} 1 & \text{при } z \in \overline{\mathcal{D}}_k^+, \\ 0 & \text{при } z \in \overline{\mathbb{C}} \setminus \overline{\mathcal{D}}_k^+, \end{cases} \quad n(z) = \sum_{k\ge 1} n_k(z).$$

Очевидно, в нашем случае сумма $n(z)$ равна 1 на множестве $\mathcal{D}^+ = \bigcup\limits_{k\ge 1} \mathcal{D}_k^+$ и нулю в области $\mathcal{D}^- = \overline{\mathbb{C}} \setminus \overline{\mathcal{D}}^+$.

При $f \in H_\lambda(\overline{\Gamma})$ по определению имеем

$$\int\limits_{\Gamma} f(z)dz = \sum_{k\ge 1} \int\limits_{\Gamma_k} f(z)dz = -\sum_{k\ge 1} \iint\limits_{\mathcal{D}_k^+} \frac{\partial u}{\partial \overline{z}} dz\, d\overline{z} = -\iint\limits_{\mathbb{C}} \frac{\partial u}{\partial \overline{z}} n(z) dz\, d\overline{z} \tag{5}$$

(в силу независимости интеграла (4) от выбора продолжения типа Уитни можно во всех слагаемых использовать одно и то же продолжение $u(z)$, равное продолжению Уитни функции $f(z)$ со всего компакта $\overline{\Gamma}$ в целом).

В работе [15] доказано, что производная $\partial u/\partial \overline{z}$ интегрируема в любой конечной части плоскости в любой степени, не превосходящей величины $(2 - \alpha(\overline{\Gamma}))/(1-\lambda)$. Поэтому ряд (5) из интегралов сходится при условии (3).

Замечание 1. Если Γ — одна спрямляемая кривая, то $\alpha(\Gamma) = 1$. Однако для системы $\Gamma = \{\Gamma_k\}_{k\ge 1}$ счетного множества кривых размерность $\alpha(\overline{\Gamma})$ может оказаться больше единицы, даже если каждая из составляющих ее кривых Γ_k спрямляема. Поэтому условие сходимости (3) является содержательным даже в случае, когда ряд (5) состоит из обычных интегралов по спрямляемым кривым.

3. *Несобственный интеграл по неспрямляемому контуру.* Если Γ — спрямляемая кривая, то во многих случаях интегральная часть оператора $\widetilde{S}_\Gamma$ имеет смысл как несобственный интеграл. Ориентируясь на эти ситуации, дадим определение несобственного интеграла по неспрямляемой кривой. По-видимому, такое определение дается впервые.

Пусть сначала Γ — одна неспрямляемая кривая, которая является замкнутой и ограничивающей область $\mathcal{D}^+$, $f(z)$ — заданная на Γ функция, теряющая непрерывность в точке $t \in \Gamma$. Для продолжения f внутрь $\mathcal{D}^+$ мы не можем воспользоваться оператором продолжения Уитни E_0, т.к. он "размажет" точечную особенность на некотором подмножестве $\mathcal{D}^+$ (линии или даже области). Чтобы избежать этого, опишем особенность f в точке t в весовых терминах.

Пусть $v(z)$ — непрерывная в $\overline{\mathcal{D}}^+ \setminus \{t\}$ и непрерывно дифференцируемая в $\mathcal{D}^+$ функция, удовлетворяющая условиям

$$|v(z)| \le C|z-t|^{-1}, \quad |\partial v/\partial \overline{z}| \le C|z-t|^{-1}, \quad z \in \overline{\mathcal{D}}^+ \setminus \{t\}. \tag{6}$$

Будем относить функцию f к классу $H_\lambda^0(\Gamma, v)$, если она представима в виде $f = v \cdot f_0$, где $f \in H_\lambda(\Gamma)$ и $f_0(t) = 0$. Если $u_0(z)$ есть продолжение типа Уитни функции f, то $u(z) = v(z) \cdot u_0(z)$ есть продолжение функции f, оставляющее особенность сосредоточенной в точке t. В силу условия (6) интеграл

$$\iint\limits_{\mathcal{D}^+} \frac{\partial u}{\partial \overline{z}} dz\, d\overline{z} = \iint\limits_{\mathcal{D}^+} v(z) \frac{\partial u_0}{\partial \overline{z}} dz\, d\overline{z} + \iint\limits_{\mathcal{D}^+} \frac{\partial v}{\partial \overline{z}} u_0(z) dz\, d\overline{z} \tag{7}$$

существует, если производная $\partial u_0/\partial \overline{z}$ интегрируема в некоторой степени, большей двух. Согласно уже упоминавшемуся результату из [15] для этого достаточно потребовать

$$\lambda > \alpha(\Gamma)/2. \tag{8}$$

Повторяя рассуждения [15], нетрудно доказать, что величина интеграла (7) не зависит при этом от выбора продолжения типа Уитни $u_0(z)$.

Определение 2. Если замкнутая кривая Γ имеет клеточную размерность $\alpha(\Gamma)$, $f \in H^0_\lambda(\Gamma, v)$, вес v удовлетворяет условиям (6) и выполнено неравенство (8), то

$$\int\limits_\Gamma f(z)dz \stackrel{\text{def}}{=} -\iint\limits_{\mathcal{D}^+} \frac{\partial(vu_0)}{\partial\overline{z}} dz\, d\overline{z},$$

где u_0 — любое продолжение типа Уитни функции $f_0 = v^{-1} \cdot f$.

Легко видеть, что для спрямляемой кривой этот интеграл совпадает с обычным несобственным интегралом.

Переход к ситуации, когда Γ представляет собой систему из конечного или счетного числа кривых, не вызывает никаких осложнений, пока особенность t принадлежит лишь одной из этих кривых, поскольку тогда лишь один из интегралов ряда (5) становится несобственным. Поэтому для $f \in H^0_\lambda(\Gamma, v)$ этот ряд сходится, если заменить условие (3) неравенством (8). Итак, неравенство (8) является достаточным условием сходимости интеграла (5) по счетной системе невложенных кривых $\{\Gamma_k\}_{k\geq 1}$ с плотностью $f \in H^0_\lambda(\Gamma, v)$, если вес v удовлетворяет (6).

Замечание 2. Вообще говоря, мы должны заменить ограничение (3) более жестким (8) лишь вблизи точки t, скажем, лишь на той кривой Γ_k, где лежит эта точка. Но в дальнейшем t пробегает все множество $\overline{\Gamma} \setminus \{z_0\}$, поэтому мы не используем здесь эту возможность ослабления ограничения (8).

4. *Сингулярный интегральный оператор.* Если $\varphi \in H_\lambda(\Gamma)$, то функция $\psi(z) = \frac{\varphi(z)-\varphi(t)}{z-t}$ принадлежит при $t \in \Gamma$ классу $H^0_\lambda(\Gamma, v)$, где вес $v(z) = (z-t)^{-1}$ удовлетворяет условиям (6). Поэтому можем рассмотреть обобщенный несобственный интеграл

$$\frac{1}{\pi i}\int\limits_\Gamma \frac{\varphi(z) - \varphi(t)}{z - t} dz, \quad t \in \Gamma.$$

Он корректно определен, если кривая Γ одна либо состоит из счетного множества невложенных контуров и выполнено условие (8). Действуя формально, запишем

$$S_\Gamma\varphi(t) = \frac{1}{\pi i}\int\limits_\Gamma \frac{\varphi(z)dz}{z-t} = \frac{1}{\pi i}\int\limits_\Gamma \frac{\varphi(z) - \varphi(t)}{z - t} dz + \frac{\varphi(t)}{\pi i}\int\limits_\Gamma \frac{dz}{z-t},$$

и теперь нужно придать смысл выражению $\frac{1}{\pi i}$ v. p. $\int\limits_\Gamma \frac{dz}{z-t}$. Определение оператора $\widetilde{S}_\Gamma\varphi$ основано на замене этого выражения единицей. Поступая аналогично в случае счетной системы невложенных кривых, его также заменим единицей. Таким образом, по определению полагаем

$$S_\Gamma\varphi(t) = \varphi(t) + \frac{1}{\pi i}\int\limits_\Gamma \frac{\varphi(z) - \varphi(t)}{z - t} dz, \quad t \in \Gamma, \tag{9}$$

где интеграл по системе Γ понимается как ряд из (обобщенных) интегралов по составляющим систему Γ кривым Γ_k. Из соотношений (5) и (7) немедленно следует

$$S_\Gamma\varphi(t) = \varphi(t) - \frac{1}{\pi i}\iint\limits_{\mathbb{C}} \frac{\partial u}{\partial\overline{z}} \cdot \frac{n(z)dz\, d\overline{z}}{z - t}, \tag{10}$$

где u — любое продолжение типа Уитни функции φ. Свойства входящего в (10) интегрального оператора хорошо известны (напр., [16], с. 54–69). В частности, если произведение $n(z)\partial u/\partial\overline{z}$ интегрируемо в степени $p > 2$, то этот интеграл дает функцию, удовлетворяющую в $\mathbb{C}$ условию Гёльдера с показателем $1 - 2p^{-1}$. Поэтому из [15] следует, что в случае невложенных кривых функция $S_\Gamma\varphi(t)$ удовлетворяет на $\overline{\Gamma}$ условию Гёльдера с любым показателем, меньшим величины

$$\mathcal{A}(\lambda, \Gamma) = 1 - 2((2 - \alpha(\overline{\Gamma}))/(1 - \lambda))^{-1} = (2\lambda - \alpha(\overline{\Gamma}))/(2 - \alpha(\overline{\Gamma})).$$

Таким образом, оператор S_Γ не отображает ни одно из пространств Гёльдера H_λ $(0 < \lambda < 1)$ на себя. Классическое соотношение $S_\Gamma^2 = J$ теряет смысл (здесь и ниже J — тождественный оператор), поскольку функция $S_\Gamma\varphi(t)$ может оказаться неинтегрируемой в смысле приведенных выше определений.

Рассмотрим теперь интеграл типа Коши

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma \frac{\varphi(t)dt}{t-z}, \quad z \in \mathbb{C}\setminus\overline{\Gamma}. \tag{11}$$

При фиксированном $z \in \mathbb{C}\setminus\overline{\Gamma}$ и $\varphi \in H_\lambda(\overline{\Gamma})$ имеем $\varphi(t)(t-z)^{-1} \in H_\lambda(\overline{\Gamma})$, поэтому этот интеграл определен на невложенных кривых при условии (3). Очевидно, функция $\Phi(z)$ голоморфна в $\overline{\mathbb{C}}\setminus\overline{\Gamma}$, $\Phi(\infty) = 0$ и в $\mathbb{C}\setminus\overline{\Gamma}$ она имеет представление

$$\Phi(z) = u(z)n(z) - \frac{1}{2\pi i}\iint\limits_{\mathbb{C}} \frac{\partial u}{\partial\overline{\zeta}}\cdot\frac{n(\zeta)d\zeta\, d\overline{\zeta}}{\zeta - z}. \tag{12}$$

Интегральный член этого представления непрерывен в $\overline{\mathbb{C}}$ при условии (8). Поэтому в каждой точке $t \in \Gamma$ функция $\Phi(z)$ имеет при этом условии непрерывные предельные значения с обеих сторон $\Phi^+(t)$ и $\Phi^-(t)$, причем

$$\Phi^+(t) = \varphi(t) - \frac{1}{2\pi i}\iint\limits_{\mathcal{D}^+}\frac{\partial u}{\partial\overline{z}}\cdot\frac{dz\,d\overline{z}}{z-t},$$
$$\Phi^-(t) = -\frac{1}{2\pi i}\iint\limits_{\mathcal{D}^+}\frac{\partial u}{\partial\overline{z}}\cdot\frac{dz\,d\overline{z}}{z-t}.$$

Отсюда получаем формулы Сохоцкого

$$\Phi^+(t) = \frac{1}{2}(J + S_\Gamma)\varphi, \quad \Phi^-(t) = \frac{1}{2}(J - S_\Gamma)\varphi,$$
$$\Phi^+(t) - \Phi^-(t) = \varphi(t), \quad \Phi^+(t) + \Phi^-(t) = S_\Gamma\varphi(t), \quad t \in \overline{\Gamma}\setminus\{z_0\},$$

для счетных систем замкнутых неспрямляемых кривых при тех же условиях, при которых в начале этого пункта был определен сингулярный интегральный оператор S_Γ.

Отметим еще одно свойство интеграла типа Коши (11). В силу представления (12) сужения $\Phi(z)$ на $\mathcal{D}^+$ и на $\mathcal{D}^-$ удовлетворяют условию Гёльдера с любым показателем, меньшим $\mathcal{A}(\lambda, \Gamma)$.

5. *Условия эквивалентности характеристического сингулярного интегрального уравнения задаче Римана.* Рассмотрим уравнение (1), понимая в нем оператор S_Γ в соответствии с определением предыдущего пункта. В частности, это означает, что искомая функция $\varphi(t)$ принадлежит классу $H_\lambda(\overline{\Gamma})$ при $\lambda > \alpha(\overline{\Gamma})/2$. Будем предполагать, что заданные функции $a(t)$, $b(t)$, $f(t)$ также удовлетворяют такому условию. Введем в рассмотрение функцию (11). Стандартные преобразования, основанные на формулах Сохоцкого, дают (напр., [1], [2])

$$\Phi^+(t) = G(t)\Phi^-(t) + g(t), \quad t \in \Gamma, \tag{13}$$

где $G(t) = \frac{a(t)-b(t)}{a(t)+b(t)}$, $g(t) = \frac{f(t)}{a(t)+b(t)}$. Таким образом, всякое решение уравнения (1) порождает решение задачи Римана (13) в классе функций, исчезающих в бесконечности, удовлетворяющих в $\mathcal{D}^+$ и $\mathcal{D}^-$ условию Гёльдера с любым показателем, меньшим $\mathcal{A}(\lambda, \overline{\Gamma})$. Для доказательства эквивалентности уравнения (1) такой задаче Римана мы должны проверить обратное соответствие, т. е. установить, можно ли из решения $\Phi(z)$ задачи (13) в указанном классе получить по формуле

$$\varphi(t) = \Phi^+(t) - \Phi^-(t)$$

решение уравнения (1). Это значит, что скачок $\Phi^+(t) - \Phi^-(t)$ должен удовлетворять условию Гёльдера с некоторым показателем $\mu > \alpha(\overline{\Gamma})/2$, а также должно соблюдаться равенство

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \frac{\Phi^+(t) - \Phi^-(t)}{t - z} dt. \tag{14}$$

Из результатов Б.А. Каца [11] следует, что при условиях $G, g \in H_\nu(\overline{\Gamma})$, $G(t) \neq 0$, $\nu > \alpha(\overline{\Gamma})/2$ краевые значения $\Phi^+(t)$ и $\Phi^-(t)$ удовлетворяют условию Гёльдера с любым показателем, меньшим $\mathcal{A}(\nu, \overline{\Gamma})$. Таким образом, скачок $\Phi^+(t) - \Phi^-(t)$ попадает в область определения оператора S_Γ, если

$$\mathcal{A}(\nu, \overline{\Gamma}) > \alpha(\overline{\Gamma})/2. \tag{15}$$

Далее, при этом условии в обеих частях равенства (14) стоят функции с одинаковым скачком на контуре $\overline{\Gamma}$. Их разность представляет собой функцию, которая непрерывна в $\overline{\mathbb{C}}$, голоморфна в $\overline{\mathbb{C}} \setminus \overline{\Gamma}$ и исчезает в точке ∞. Если установим, что она голоморфна в $\mathbb{C}$, то отсюда будет следовать равенство (14) по теореме Е.П. Долженко [17]: если функция $\mathcal{F}(z)$ удовлетворяет условию Гёльдера с показателем μ в области $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}$ и голоморфна в области $\Delta \subset \mathcal{D}$, где размерность Хаусдорфа α_H множества $\mathcal{D} \setminus \Delta$ строго меньше $\mu + 1$, то функция $\mathcal{F}(z)$ голоморфна в $\mathcal{D}$.

Левая часть (14) удовлетворяет в $\mathcal{D}^+$ и $\mathcal{D}^-$ условию Гёльдера с любым показателем, меньшим $\mathcal{A}(\nu, \overline{\Gamma})$, а правая — с любым показателем, меньшим

$$\mathcal{A}_1(\nu, \overline{\Gamma}) = \mathcal{A}(\mathcal{A}(\nu, \overline{\Gamma}), \overline{\Gamma}) = 1 - 4(1-\nu)/(2 - \alpha(\overline{\Gamma}))^2.$$

В интересующих нас интервалах изменения параметров ν и $\alpha(\overline{\Gamma})$, т.е. при $0 < \nu \leq 1$, $1 \leq \alpha(\overline{\Gamma}) < 2$, имеем $\mathcal{A}_1(\nu, \overline{\Gamma}) \leq \mathcal{A}(\nu, \overline{\Gamma})$. Таким образом, равенство (14) справедливо при условии

$$\mathcal{A}_1(\nu, \overline{\Gamma}) > \alpha_H(\overline{\Gamma}) - 1, \tag{16}$$

где $\alpha_H(\overline{\Gamma})$ — размерность Хаусдорфа $\overline{\Gamma}$. Нетрудно убедиться, что условие (16) влечет (15).

Итак, установлена эквивалентность уравнения (1) задаче (13) при условии (16). Теперь опишем картину разрешимости уравнения (1) на основе известной [11] картины разрешимости задачи (13).

Теорема 1. *Пусть* $\Gamma = \{\Gamma_k\}_{k \geq 1}$ *— счетная система неспрямляемых замкнутых невложенных кривых, сгущающихся к конечной точке* z_0*, а заданные на ней функции* $a(t)$*,* $b(t)$*,* $f(t)$ *удовлетворяют условиям* $a, b, f \in H_\nu(\overline{\Gamma})$ *и* $a^2(t) \neq b^2(t)$*,* $t \in \overline{\Gamma}$*, причем показатель* ν *удовлетворяет неравенству* (16)*. Тогда размерности ядра и коядра уравнения* (1) *равны* $\max\{\varkappa; 0\}$ *и* $\max\{-\varkappa; 0\}$ *соответственно, где*

$$\varkappa = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \left[\arg \frac{a(t) - b(t)}{a(t) + b(t)} \right]_{\Gamma_k}$$

(*в этой сумме разве лишь конечное число слагаемых, отличных от нуля*).

Используя [11], выпишем решение и условия разрешимости уравнения (1) в явном виде. Именно, справедлива

Теорема 2. а) *При* $\varkappa \geq 0$ *общее решение уравнения* (1) *имеет вид*

$$\varphi(t) = a(t) f(t) - b(t) Z(t) S_\Gamma(f/Z)(t) - 2b(t) Z(t) P_\varkappa(t), \tag{17}$$

где $P_\varkappa(t)$ *— произвольный полином степени не выше* $\varkappa$*,* $\mathrm{X}(z)$ *— каноническая функция однородной задачи Римана* (13) ($g \equiv 0$)*,* $Z(t) = [a(t) - b(t)]\mathrm{X}^-(t) = [a(t) + b(t)]\mathrm{X}^+(t)$*; причем последнее слагаемое формулы* (17) *представляет собой общее решение однородного уравнения* $\mathcal{K}^0\varphi \equiv 0$*, а сумма первых двух слагаемых — некоторое частное решение неоднородного уравнения* (1);

б) *при* $\varkappa \le -1$ *однородное уравнение неразрешимо, а неоднородное уравнение* (1) *разрешимо тогда и только тогда, когда его правая часть* $f(t)$ *удовлетворяет* $-\varkappa - 1$ *условиям разрешимости*

$$\iint\limits_{\mathcal{D}^+} \zeta^{m-1} \frac{\partial}{\partial \overline{\zeta}} \mathrm{E}_0\left(\frac{f}{Z}\right)(\zeta) d\xi\, d\eta = 0, \quad m = \overline{1, -\varkappa - 1}.$$

Замечание 3. Проведя рассуждения, как в вышеизложенном случае, можно получить картину разрешимости и для союзного сингулярного уравнения

$$\mathcal{K}_0'\psi \equiv a(t)\psi(t) - S_\Gamma(b\psi)(t) = h(t).$$

В заключение автор выражает признательность профессору Б.А. Кацу, который высказал ряд полезных замечаний, способствовавших улучшению изложения полученных результатов.

Литература

1. Гахов Ф.Д. *Краевые задачи.* – 3-е изд. – М.: Наука, 1977. – 640 с.
2. Мусхелишвили Н.И. *Сингулярные интегральные уравнения. Граничные задачи теории функций и некоторые их приложения к математической физике.* – 3-е изд. – М.: Наука, 1968. – 511 с.
3. Квеселава Д.А. *Граничная задача Гильберта и сингулярные интегральные уравнения в случае пересекающихся контуров* // Тр. Матем. ин-та АН ГрузССР. – Тбилиси, 1949. – Т. 17. – С. 1–27.
4. Купрадзе В.Д. *Некоторые новые замечания к теории сингулярных интегральных уравнений* // Тр. Тбилисск. ун-та. – 1951. – Т. 42. – С. 1–23.
5. Гегелия Т.Г. *О некоторых сингулярных интегральных уравнениях частного вида* // Сообщ. АН ГрузССР. – 1952. – Т. 13. – № 10. – С. 581–586.
6. Миронова С.Р. *Сингулярные интегральные уравнения на неспрямляемой кривой* // Изв. вузов. Математика. – 1993. – № 8. – С. 40–48.
7. Кац Б.А. *Задача о скачке и интеграл по неспрямляемой кривой* // Изв. вузов. Математика. – 1987. – № 5. – С. 49–67.
8. Harrison J., Norton A. *Geometric integration of fractal curves in the plane* // Indian Math. J. – 1991. – V. 40. – № 2. – P. 567–594.
9. Harrison J., Norton A. *The Gauss-Green theorem for fractal boundaries* // Duke Math. J. – 1992. – V. 67. – № 3. – P. 575–586.
10. Harrison J. *Stokes' theorem for nonsmooth chains* // Bull. Amer. Math. Soc. – 1993. – V. 29. – № 2. – P. 235–242.
11. Кац Б.А. *Об интеграле типа Коши и задаче Римана на счетном множестве замкнутых кривых* // Изв. вузов. Математика. – 1985. – № 3. – С. 20–29.
12. Стейн И.М. *Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций.* – М.: Мир, 1973. – 342 с.
13. Колмогоров А.Н., Тихомиров В.М. *ε-энтропия и ε-емкость множеств в функциональных пространствах* // УМН. – 1959. – Т. 14. – № 2. – С. 3–86.
14. Федер Е. *Фракталы.* – М.: Мир, 1991. – 325 с.
15. Кац Б.А. *Задача Римана на замкнутой жордановой кривой* // Изв. вузов. Математика. – 1983. – № 4. – С. 68–80.
16. Векуа И.Н. *Обобщенные аналитические функции.* – 2-е изд. – М.: Наука, 1988. – 509 с.
17. Долженко Е.П. *О "стирании" особенностей аналитических функций* // УМН. – 1963. – Т. 18. – № 4. – С. 135–142.

Казанский государственный
технический университет

Поступила
27.09.1995