ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2002 МАТЕМАТИКА № 8 (483)

УДК 517.518

М.Б. СИХОВ

НЕРАВЕНСТВА ТИПА БЕРНШТЕЙНА, ДЖЕКСОНА–НИКОЛЬСКОГО И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

1. Необходимые определения и постановка задачи

Пусть $\pi_s = [-\pi, \pi]^s$ — s-мерный куб, $L^p(\pi_s)$, $1 \le p < \infty$, — множество всех измеримых 2π-периодических по каждой переменной функций $f(x) = f(x_1, \dots, x_s)$ таких, что

$$\|f\|_p = (2\pi)^{-s} \biggl(\int_{\pi_s} |f(x)|^p dx \biggr)^{\frac{1}{p}} < \infty,$$

$$L_0^p(\pi_s) = \biggl\{ f \in L^p(\pi_s) : \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx_j = 0, \ j = 1, \dots, s \biggr\}.$$

Для подмножества B евклидова пространства R^s через B_0 и B_+ обозначим множества, состоящие из всех элементов $x = (x_1, \dots, x_s) \in B$, каждая компонента которых неотрицательна и положительна соответственно. Через Z^s, как обычно, обозначим целочисленную решетку R^s. Для $n \in Z_+^s$ положим $\|n\|_1 = n_1 + \dots + n_s$, $2^{-n} = (2^{-n_1}, \dots, 2^{-n_s})$.

Для $f \in L^p(\pi_s)$ введем смешанный модуль гладкости порядка $k \in Z_+^s$

$$\Omega_k(f; t)_p \equiv \Omega_k(f; t_1, \dots, t_s)_p = \sup_{\substack{|h_j| \le t_j \\ j=1,\dots,s}} \|\Delta_h^k f(x)\|_p, \quad t \in [0,1]^s,$$

где $\Delta_h^k f(x) = \Delta_{h_s}^{k_s} \dots \Delta_{h_1}^{k_1} f(x)$, $\Delta_{h_j}^{k_j} = \Delta_{h_j}^1(\Delta_{h_j}^{k_j-1})$, $\Delta_{h_j}^1 f(x) = f(x_1, \dots, x_j + h_j, \dots, x_s) - f(x_1, \dots, x_j, \dots, x_s)$.

Для $f \in L^p(\pi_s)$ через $E_G(f)_p$ обозначается наилучшее приближение функции f полиномами из $T(G)$, где G — конечное множество точек Z^s, а

$$T(G) = \biggl\{ t(x) : t(x) = \sum_{n \in G} c_n e^{i(n,x)} \biggr\}.$$

В данной работе спектр G будет задан посредством непрерывной на $[0,1]^s$ функции $\Lambda(t) = \Lambda(t_1, \dots, t_s)$, неубывающей по каждой переменной при любых фиксированных остальных и такой, что $\Lambda(t) > 0$ ($\Lambda(t) = 0$) при $\prod\limits_{j=1}^s t_j > 0$ $\Bigl(\prod\limits_{j=1}^s t_j = 0 \Bigr)$.

Для $N > 0$ определим множества

$$\Gamma(\Lambda, N) = \{ m \in Z_+^s : \Lambda(2^{-m}) \ge \tfrac{1}{N} \}, \quad \Gamma^\perp(\Lambda, N) = Z_+^s \setminus \Gamma(\Lambda, N),$$

$$\rho(n) = \{ m = (m_1, \dots, m_s) \in Z^s : 2^{n_j - 1} \le |m_j| < 2^{n_j} \} \ \ (n \in Z_+^s),$$

$$Q(\Lambda, N) = \bigcup_{n \in \Gamma(\Lambda, N)} \rho(n).$$

Введем некоторые ограничения на мажорантные функции $\Lambda(t)$ (заметим, что разные типы таких ограничений представлены в [1]).

По С.Н. Бернштейну ([2], с. 493) функция $\varphi(t)$ называется почти возрастающей (почти убывающей) на (a,b), где $0 \le a < b \le \infty$, если существует постоянная $C > 0$ такая, что $\varphi(t_1) \le C\varphi(t_2)$ ($\varphi(t_1) \ge C\varphi(t_2)$) для всех $a < t_1 < t_2 < b$.

Функция одного переменного $\varphi(\tau) \ge 0$ удовлетворяет условию (S^α) (или (S_α)) на (a,b) при $\alpha > 0$, если $\varphi(\tau)/\tau^\alpha$ почти возрастает (почти убывает) на (a,b). Также вводится условие (S) на $\varphi(\tau)$ как выполнение условия (S^α) для некоторого α, $0 < \alpha < 1$, и в этом смысле $(S) = \bigcup\limits_{0<\alpha<1} (S^\alpha)$.

Будем говорить, что $\Lambda(t) = \Lambda(t_1,\dots,t_s)$ удовлетворяет условию $(S^{\boldsymbol\alpha})$ ((S) или $(S_{\boldsymbol\alpha})$) на $(a,b)^s$ при $\boldsymbol\alpha = (\alpha_1,\dots,\alpha_s)$, если при каждом $j = 1,\dots,s$ функция $\Lambda(t)$ удовлетворяет условию (S^{α_j}) ((S) или (S_{α_j})) на $(a,b)^s$ по переменной t_j при фиксированных остальных. Здесь и в дальнейшем выражение "при фиксированных остальных переменных" будет означать, что константа в соответствующем определении не зависит от этих переменных.

Будем также употреблять введенные (S)-условия для функций $D(n)$, определенных на Z^s, с заменой в соответствующих определениях $\varphi(\tau)/\tau^\delta$ на $|D(|k|)|/|k|^\delta$, где $|k| \in Z_+$.

Пусть на Z^s определены функции или, что то же самое, последовательности: действительнозначная $D(n)$ и $\alpha(n) = (\alpha_1(n),\dots,\alpha_s(n))$ со значениями из R^s. В случае, когда $\alpha(n) \equiv \boldsymbol\alpha = (\alpha_1,\dots,\alpha_s) \in R^s$, вся последовательность $\{\alpha(n)\}_{n\in Z^s}$ обозначается через $\boldsymbol\alpha$.

Предположим, что $f \in L(\pi_s)$ и

$$\sigma(f;x) \equiv \sum_{n\in Z^s} \widehat{f}(n) e^{i(n,x)} \tag{1}$$

— ее ряд Фурье–Лебега, а ряд

$$\sum_{n\in Z^s} D(n) e^{i(\frac{\pi\alpha(n)}{2},1)} \widehat{f}(n) e^{i(n,x)} \tag{2}$$

является рядом Фурье–Лебега некоторой функции. Эту функцию назовем (D,α)-производной функции f и обозначим через $f^{(D)}(x,\alpha)$, саму же функцию f назовем (D,α)-дифференцируемой.

При $D(n) \equiv 1$, $\boldsymbol\alpha \equiv 0$ получаем $f^{(1)}(x,0) \equiv f(x)$. При $s = 1$, целом положительном r и $D(n) = n^r$, $\alpha = r$ из приведенного определения с соблюдением необходимых оговорок получаем определение обычной производной $f^{(r)}$, а в симметричном случае $D(n) = n^{-r}$ $(n \ne 0)$, $\alpha = -r$ (D,α)-дифференцирование функции $f \in L(\pi_1)$ с $\widehat{f}(0) = 0$ сводится к r-кратному интегрированию ее ряда Фурье

$$\sum_{n\in Z\setminus\{0\}} \widehat{f}(n) \frac{e^{i(n,x)}}{(in)^r} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\Psi_r(x-t)dt, \quad \text{где} \quad \Psi_r(t) = \sum_{n\in Z\setminus\{0\}} \frac{e^{i(n,t)}}{(in)^r}$$

есть алгебраический многочлен степени r при $-\pi < t < \pi$. Таким образом, при $s = 1$ и $D(n) = |n|^r$ $(n \ne 0)$, $\alpha(n) = r \operatorname{sign} n$ для целых r в определении (1)–(2) содержится обычное интегрирование при $r < 0$ и дифференцирование при $r > 0$, обьединенное под общим названием "дифференцирование".

Дальнейшее обобщение производной состояло в замене числа r под знаком exp на произвольное число α. По-видимому, впервые это было предложено в [3]. Смысл введения α состоит в том, что при $\alpha = r + 2k$ (k целое) (D,α)-производная совпадает с производной (D,r), а при $\alpha = r + 1 + 2k$ — с функцией, сопряженной с (D,r)-производной.

Для нецелых r_j, $j = 1,\dots,s$ (и тогда (D,α)-производная называется вейлевской [4]), при надлежащих уточнениях (см., напр., в одномерном случае ([5], с. 200–214; [6], с. 129–134) и в многомерном случае ([7], с. 237–249)) соответствующее дифференцирование сводится к определению (1)–(2) с

$$D(n) = D(n_1,\dots,n_s) = \prod_{j=1}^{s} |n|_j^{r_j}, \quad \alpha_j(n) = r_j \operatorname{sign} n_j, \quad j = 1,\dots,s.$$

В одномерном случае исследования с привлечением (D,α)-производных с различными условиями на D и α проведены разными авторами (см., напр., [8] и библиографию в ней).

Предложенное нами определение (1)–(2) есть обобщение операции дифференцирования в многомерном случае. Формально оно сводится к замене множителя $D(n)$ и $\alpha(n)$ на функции многих переменных. При $D(n) = \prod\limits_{j=1}^{s} |n_j|^{r_j}$ и $\alpha_j(n) = \alpha_j \operatorname{sign} n_j$ получаем определение $(\mathbf{r}, \boldsymbol{\alpha})$-производной функции f (напр., [9]).

В данной работе для полиномов из $T(Q(\Omega, N))$ получены неравенства Бернштейна (нормы полинома и его (D,α)-производной измеряются в метрике пространства L^p, $1 < p < \infty$) и неравенства Джексона–Никольского, связывающие нормы полинома в различных метриках. Затем эти неравенства так же, как и в одномерном случае, применяются для получения теорем вложения в стиле Конюшкова–Стечкина [10] и Ульянова [11] (см. также [12]).

2. Вспомогательные утверждения

Лемма 1. *Пусть для s-кратной числовой последовательности $\{\lambda(k)\} = \{\lambda(k_1, \dots, k_s)\}$ существует число M, не зависящее от n и такое, что*

$$|\lambda(k)| \le M, \quad k \in Z^s, \quad \sum_{k \in \rho(n)} |\Delta_1 \dots \Delta_s \lambda(k)| \le M, \quad n \in Z_0^s,$$

где $\Delta_j \lambda(k_1, \dots, k_s) = \lambda(k_1, \dots, k_j + 1, \dots, k_s) - \lambda(k_1, \dots, k_s)$ (параллелепипед $\rho(n)$, в общем случае s-мерный, вырождается в параллелепипед меньшей размерности, если некоторые из n_j равны нулю). Тогда если

$$f(x) \sim \sum_{k \in Z^s} \widehat{f}(k) e^{i(k,x)} \in L^p(\pi_s), \quad 1 < p < \infty,$$

то $\Lambda f \sim \sum\limits_{k \in Z^s} \lambda(k) \widehat{f}(k) e^{i(k,x)} \in L^p(\pi_s)$ и $\|\Lambda f\|_p \ll \|f\|_p$.

Это теорема Марцинкевича о мультипликаторах (напр., [13], с.57).

Здесь и в дальнейшем при положительных A и B запись $B \ll A$ будет означать $B \le C(\alpha, \beta, \dots) \cdot A$, где $C(\alpha, \beta, \dots)$ — некоторые положительные постоянные, зависящие лишь от указанных в скобках параметров, а запись $A \asymp B$ означает $A \ll B \ll A$. Вообще говоря, всюду ниже параметры $\alpha, \beta, \dots$ однозначно определяются по смыслу утверждений, поэтому в целях сокращения записей их указывать не будем.

Лемма 2. *Пусть $1 < p < \infty$. Тогда для каждой функции $f \in L_0^p(\pi_s)$ справедливо соотношение*

$$\left\| \left[\sum_{n \in Z_+^s} |\delta_n(f, x)|^2 \right]^{\frac{1}{2}} \right\|_p \asymp \|f\|_p,$$

где $\delta_n(f; x) = \sum\limits_{m \in \rho(n)} \widehat{f}(m) e^{i(m,x)}$ — двоичная пачка ряда Фурье функции f.

Эта лемма является обобщением на многомерный случай теоремы Литтлвуда–Пэли (напр., [13], с. 55).

Лемма 3 ([9], с. 9). *Пусть $1 < p < q < \infty$, $\beta = 1/p - 1/q$, $f(x) \sim \sum\limits_{k \in Z^s} \widehat{f}(k) e^{i(k,x)} \in L_0^p(\pi_s)$, тогда*

$$A_\beta f \sim \sum_{k \in Z^s} \widehat{f}(k) \left(\prod_{j=1}^{s} |k_j| \right)^{-\beta} e^{i(k,x)} \in L_0^q(\pi_s) \quad \text{и} \quad \|A_\beta f\|_q \ll \|f\|_p.$$

Следующее утверждение доказывается аналогично лемме 3.3 из ([9], с. 27).

Лемма 4. *Пусть $1 \le p < q < \infty$, $0 < \tau_1 \le \dots \le \tau_s$ и функция $\Lambda(t)$ удовлетворяет условию (S^{τ}) на $(0,1]^s$ при $\boldsymbol{\tau} = (\tau_1, \dots, \tau_s)$. Если $t_n \in T(Q(\Lambda, 2^n))$ и ряд*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} t_n(x)$$

сходится в L^p к $f(x)$, то

$$\|f\|_q^q \ll \sum_{n=0}^{\infty} \|t_n\|_p^q 2^{\frac{n}{\tau_1}(\frac{q}{p}-1)}$$

в том смысле, что если ряд, стоящий справа, сходится, то $f \in L_0^q(\pi_s)$ и выполняется указанное неравенство.

3. Основные результаты

Теорема 1. *Пусть даны числа $1 < p < \infty$, $0 < \tau_1 = \dots = \tau_\nu < \tau_{\nu+1} \le \dots \le \tau_s$, $0 < \beta_1 = \dots = \beta_t < \beta_{t+1} \le \dots \le \beta_s$, $1 \le \nu \le t \le s$, такие, что $\beta_j \tau_1 \le \beta_1 \tau_j$, $j = t+1, \dots, s$. Пусть функция $\Lambda(t)$ удовлетворяет условию (S^{τ}) на $(0,1]^s$ при $\boldsymbol{\tau} = (\tau_1, \dots, \tau_s)$, а функция $D(n) \ne 0$, $n \in Z^s$, — условию $(S_{\boldsymbol{\beta}})$ при $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \dots, \beta_s)$. Если для функций $D(n)$, $\alpha(n)$ существует число $C > 0$ такое, что для всех $k \in \rho(n)$, $n \in Z_0^s$*

$$\left|\frac{D(k)}{D(2^n)}\right| \le C, \quad \frac{1}{|D(2^n)|} \sum_{k \in \rho(n)} |\Delta_1 \dots \Delta_s D(k) e^{i(\frac{\pi\alpha(k)}{2},1)}| \le C, \tag{3}$$

то имеет место неравенство

$$\sup_{t \in T(Q(\Lambda,N))} \frac{\|t^{(D)}(x,\alpha)\|_p}{\|t(x)\|_p} \ll N^{\frac{\beta_1}{\tau_1}}. \tag{4}$$

Доказательство. Пусть $t(x) \in T(Q(\Lambda, N))$. Тогда в силу лемм 1 и 2 имеем

$$\|t^{(D)}(x,\alpha)\|_p = \left\| \sum_{n \in \Gamma(\Lambda,N)} D(2^n) \sum_{k \in \rho(n)} \frac{D(k)}{D(2^n)} e^{i(\frac{\pi\alpha(k)}{2},1)} \cdot \widehat{t}(k) \cdot e^{i(k,x)} \right\|_p \ll$$
$$\ll \left\| \sum_{n \in \Gamma(\Lambda,N)} D(2^n) \sum_{k \in \rho(n)} \widehat{t}(k) \cdot e^{i(k,x)} \right\|_p \ll$$
$$\ll \left\| \left\{ \sum_{n \in \Gamma(\Lambda,N)} \left| D(2^n) \sum_{k \in \rho(n)} \widehat{t}(k) \cdot e^{i(k,x)} \right|^2 \right\}^{1/2} \right\|_p. \tag{5}$$

Далее, пользуясь условиями (S^{τ}) для функции $\Lambda(t)$ и $(S_{\boldsymbol{\beta}})$ для функции $|D(n)|$, получаем

$$\Lambda(2^{-n}) = \frac{\Lambda(2^{-n})}{\prod_{j=1}^{s} 2^{-n_j\tau_j}} \prod_{j=1}^{s} 2^{-n_j\tau_j} \ll \Lambda(1) 2^{-(\boldsymbol{\tau},n)},$$

$$|D(2^n)| = \frac{|D(2^n)|}{\prod_{j=1}^{s} 2^{n_j\beta_j}} \prod_{j=1}^{s} 2^{n_j\beta_j} \ll |D(1)| 2^{(\boldsymbol{\beta},n)}.$$

Отсюда, поскольку

$$(\boldsymbol{\beta}, n) = \beta_1 \left(n_1 + \dots + n_t + \frac{\beta_{t+1}}{\beta_1} n_{t+1} + \dots + \frac{\beta_s}{\beta_1} n_s \right) \le$$

$$\le \beta_1 \left(n_1 + \dots + n_t + \frac{\tau_{t+1}}{\tau_1} n_{t+1} + \dots + \frac{\tau_s}{\tau_1} n_s \right) \le$$

$$\le \beta_1 \left(n_1 + \dots + n_\nu + \frac{\tau_{\nu+1}}{\tau_1} n_{\nu+1} + \dots + \frac{\tau_{t+1}}{\tau_1} n_{t+1} + \dots + \frac{\tau_s}{\tau_1} n_s \right) = \frac{\beta_1}{\tau_1} (\boldsymbol{\tau}, n),$$

следует

$$|D(2^n)| \ll 2^{(\boldsymbol{\beta}, n)} \ll 2^{\frac{\beta_1}{\tau_1}(\boldsymbol{\tau}, n)} \ll \left(\frac{1}{\Lambda(2^{-n})} \right)^{\beta_1/\tau_1}.$$

Наконец, подставляя эту оценку в (5) и применяя лемму 2, получаем

$$\|t^{(D)}(x,\alpha)\|_p \ll N^{\frac{\beta_1}{\tau_1}} \left\| \left\{ \sum_{n \in \Gamma(\Lambda, N)} \left| \sum_{k \in \rho(n)} \widehat{t}(k) \cdot e^{i(k,x)} \right|^2 \right\}^{1/2} \right\|_p \ll N^{\frac{\beta_1}{\tau_1}} \|t(x)\|_p.$$

Тем самым неравенство (4) доказано. □

Замечание 1. Пусть для каждого $j = 1, \dots, s$ на Z определена четная функция $D_j(n)$ такая, что

$$0 < D_j(n) \le D_j(n+1), \quad D_j(2n) \le C D_j(n), \quad C > 0, \quad n \in Z_+. \tag{6}$$

Тогда функции $D(n) = \prod_{j=1}^{s} D_j(n_j)$ и $\alpha(n) \equiv \boldsymbol{\alpha} \in R^s$ удовлетворяют условию (3).

Теорема 2. *Пусть* $1 < p < q < \infty$, $0 < \tau_1 \le \dots \le \tau_s$ *и функция* $\Lambda(t)$ *удовлетворяет условию* $(S^{\boldsymbol{\tau}})$ *на* $(0,1]^s$ *при* $\boldsymbol{\tau} = (\tau_1, \dots, \tau_s)$. *Тогда*

$$\sup_{t \in T(Q(\Lambda, N))} \frac{\|t\|_q}{\|t\|_p} \ll N^{\frac{1}{\tau_1}(\frac{1}{p} - \frac{1}{q})}. \tag{7}$$

Доказательство. Пусть $t(x) \in T(Q(\Lambda, N))$ и $\gamma = 1/p - 1/q$. Ясно, что

$$t(x) = \left(\sum_{k \in Q(\Lambda, N)} \prod_{j=1}^{s} |k_j|^{-\gamma} \widehat{t}(k) e^{i(k,\cdot)} \right)^{(\gamma, \dots, \gamma)} (x, 0) = (A_{\boldsymbol{\gamma}} t)^{(\gamma, \dots, \gamma)}.$$

Отсюда, применяя неравенство (4) и лемму 3, находим $\|t\|_q \ll N^{\frac{\gamma}{\tau_1}} \|A_\gamma t\|_q \ll N^{\frac{1}{\tau_1}(\frac{1}{p} - \frac{1}{q})} \|t\|_p$. □

Из теорем 1 и 2 следует

Теорема 3. *Пусть даны числа* $1 < p \le q < \infty$ *и выполнены условия теоремы* 1. *Тогда имеет место неравенство*

$$\sup_{t \in T(Q(\Lambda, N))} \frac{\|t^{(D)}(x, \alpha)\|_q}{\|t(x)\|_p} \ll N^{\frac{1}{\tau_1}(\beta_1 + \frac{1}{p} - \frac{1}{q})}.$$

Замечание 2. Неравенство Бернштейна (4) в многомерном случае устанавливает связь в одной и той же метрике $L^p(\pi_s)$ между геометрией спектра и способом дифференцирования полинома, которые определяются наборами β, $\Lambda(t)$, N и τ, $D(n)$, $\alpha(n)$ соответственно.

При конкретном выборе $1 < p < \infty$

$$\Lambda(t) = \prod_{j=1}^{s} t_j^{\gamma_j}, \quad 1 = \gamma_1 \le \cdots \le \gamma_s, \quad t \in [0,1]^s, \tag{8}$$

$$D(n) = \prod_{j=1}^{s} |n|_j^{r\gamma_j}, \quad r \ge 0, \quad \alpha_j(n) = \alpha_j \operatorname{sign} n_j, \quad n \in Z^s,$$

в случае, когда $r\boldsymbol{\gamma} = r(\gamma_1, \ldots, \gamma_s)$ есть целочисленный вектор, неравенство (4) сводится к результатам из [14], а при произвольном $r\boldsymbol{\gamma}$ — к результатам из [15].

Неравенство Джексона–Никольского (7) для $(\mathbf{r}, \boldsymbol{\alpha})$-производных полиномов со спектром, определяемым функцией (8), установлено в ([9], с. 23).

Перейдем к теоремам вложения.

Теорема 4. *Пусть даны числа* $1 < p < q < \infty$, $0 < \tau_1 = \cdots = \tau_\nu < \tau_{\nu+1} \le \cdots \le \tau_s$, $0 < \beta_1 = \cdots = \beta_t < \beta_{t+1} \le \cdots \le \beta_s$ $(1 \le \nu \le t \le s)$ *такие, что* $\beta_j \tau_1 \le \beta_1 \tau_j$, $j = t+1, \ldots, s$. *Пусть функция* $\Lambda(t)$ *удовлетворяет условию* $(S^{\boldsymbol{\tau}})$ *на* $(0,1]^s$ *при* $\boldsymbol{\tau} = (\tau_1, \ldots, \tau_s)$, *а функция* $D(n) \ne 0$, $n \in Z^s$, — *условию* $(S_{\boldsymbol{\beta}})$ *при* $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \ldots, \beta_s)$ *и условию* (3) *вместе с* $\alpha(n)$. *Если* $f \in L_0^p(\pi_s)$ *и*

$$\sum_{l=0}^{\infty} 2^{l \frac{q}{\tau_1}(\beta_1 + \frac{1}{p} - \frac{1}{q})} E^q_{Q(\Lambda, 2^l)}(f)_p < \infty, \tag{9}$$

то функция $f(x)$ *имеет производную* (D, α), *принадлежащую пространству* $L_0^q(\pi_s)$, *и*

$$E_{Q(\Lambda, 2^n)}(f^{(D)}(x, \alpha))_q \ll \left[\sum_{l=n+1}^{\infty} 2^{l \frac{q}{\tau_1}(\beta_1 + \frac{1}{p} - \frac{1}{q})} E^q_{Q(\Lambda, 2^l)}(f)_p \right]^{\frac{1}{q}}.$$

Доказательство. Пусть $t_l(x) \in T(Q(\Lambda, 2^l))$ — полином наилучшего приближения $f(x)$ в метрике L^p. Тогда, полагая $f_l(x) = t_l(x) - t_{l-1}(x)$, $l = 1, 2, \ldots$, в силу теоремы 1 имеем

$$\sum_{l=1}^{\infty} \|f_l^{(D)}(x, \alpha)\|_p^q 2^{l \frac{q}{\tau_1}(\frac{1}{p} - \frac{1}{q})} \ll \sum_{l=1}^{\infty} 2^{l \frac{q}{\tau_1}(\beta_1 + \frac{1}{p} - \frac{1}{q})} \cdot \|f_l\|_p^q \ll \sum_{l=1}^{\infty} 2^{l \frac{q}{\tau_1}(\beta_1 + \frac{1}{p} - \frac{1}{q})} E^q_{Q(\Lambda, 2^l)}(f)_p < \infty.$$

Следовательно, в силу леммы 4 $f(x)$ имеет производную (D, α), принадлежащую пространству $L_0^q(\pi_s)$, и

$$E^q_{Q(\Lambda, 2^n)}\big(f^{(D)}(x, \alpha)\big)_q \ll \left\| \sum_{l=n+1}^{\infty} f_l^{(D)}(x, \alpha) \right\|_q^q \ll \sum_{l=n+1}^{\infty} \|f_l^{(D)}(x, \alpha)\|_p^q 2^{l \frac{q}{\tau_1}(\frac{1}{p} - \frac{1}{q})}.$$

Отсюда, как и выше, получаем требуемую оценку. □

Замечание 3. В одномерном случае при $\alpha(n) \equiv 0$, $\Lambda(t) = t$ и $D(n) \equiv 1$ теорема 4 была доказана в [11], а для $D(n)$, удовлетворяющих условию (6), — в [16]. В многомерном случае для $\Lambda(t)$ вида (8) и $(r, \boldsymbol{\alpha})$-производных эта теорема доказана в ([9], с. 28).

Теорема 5. *Пусть даны числа* $1 < p < q < \infty$, $0 < \tau_1 = \cdots = \tau_\nu < \tau_{\nu+1} \le \cdots \le \tau_s$, $0 < \beta_1 = \cdots = \beta_t < \beta_{t+1} \le \cdots \le \beta_s$ $(1 \le \nu \le t \le s)$, $k_1 = \cdots = k_l < k_{l+1} \le \cdots \le k_s$ $(1 \le \nu \le l \le s)$ *такие, что* $\beta_j \tau_1 \le \beta_1 \tau_j$ $(j = t+1, \ldots, s)$, $k_m \tau_1 \le k_1 \tau_m$ $(m = l+1, \ldots, s)$. *Пусть функция* $\Lambda(t)$ *удовлетворяет условию* $(S^{\boldsymbol{\tau}})$ *на* $(0,1]^s$ *при* $\boldsymbol{\tau} = (\tau_1, \ldots, \tau_s)$, *а функция* $D(n) \ne 0$, $n \in Z^s$, — *условию* $(S_{\boldsymbol{\beta}})$ *при* $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \ldots, \beta_s)$ *и условию* (3) *вместе с* $\alpha(n)$. *Если* $f \in L_0^p(\pi_s)$ *и выполнено*

(9), *то функция* $f(x)$ *имеет производную* (D,α), *принадлежащую пространству* $L_0^q(\pi_s)$, *и*

$$\Omega_k(f^{(D)}(x,\alpha);2^{-n})_q \ll \frac{1}{2^{(n,k)}}\Bigg[\sum_{0\le l\le \frac{\tau_1}{k_1}(n,k)} 2^{l\frac{q}{\tau_1}(k_1+\beta_1+\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}E^q_{Q(\Lambda,2^l)}(f)_p\Bigg]^{\frac{1}{q}} +$$

$$+\Bigg[\sum_{\frac{\tau_1}{k_1}(n,k)<l<\infty} 2^{l\frac{q}{\tau_1}(\beta_1+\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}E^q_{Q(\Lambda,2^l)}(f)_p\Bigg]^{\frac{1}{q}},\quad k=(k_1,\dots,k_s),\quad n\in Z_+^s.$$

Доказательство. Как было отмечено в теореме 4, $f(x)$ имеет производную (D,α), принадлежащую $L_0^q(\pi_s)$.

Пусть $t_l(x)\in T(Q(\Lambda,2^l))$ — полином наилучшего приближения $f(x)$ в метрике L^p. При $t_0(x)\equiv 0$ в силу леммы 4 и теоремы 1 имеем

$$\|\Delta_h^k f^{(D)}(x,\alpha)\|_q^q \ll \Bigg\|\sum_{l=1}^{\infty}\Delta_h^k(f_l^{(D)}(x,\alpha))\Bigg\|_q^q \ll$$

$$\ll \sum_{l=1}^{\infty}\|[\Delta_h^k(f_l(x,\boldsymbol{\alpha}))]^{(D)}\|_p^q 2^{l\frac{q}{\tau_1}(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} \ll \sum_{l=1}^{\infty}\|\Delta_h^k(f_l(x,\alpha))\|_p^q 2^{l\frac{q}{\tau_1}(\beta_1+\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}.$$

Пользуясь известными неравенствами ([17], с. 32)

$$\|\Delta_h^k t_l\|_p \ll \prod_{j=1}^{s}|h_j|^{k_j}\cdot\|t_l^{(k)}\|_p,\quad \|\Delta_h^k t_l\|_p \ll \|t_l\|_p$$

и неравенством (4), при $D(n)=\prod_{j=1}^{s}|n|_j^{k_j}$, $\alpha_j(n)=k_j\operatorname{sign} n_j$ получаем

$$\|\Delta_h^k f^{(D)}(x,\alpha)\|_q^q \ll \prod_{j=1}^{s}|h_j|^{k_jq}\sum_{l=1}^{m}\|(f_l(x,\alpha))^{(k)}\|_p^q 2^{l\frac{q}{\tau_1}(\beta_1+\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} +$$

$$+\sum_{l=m+1}^{\infty}\|f_l(x,\alpha)\|_p^q 2^{l\frac{q}{\tau_1}(\beta_1+\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} \ll \prod_{j=1}^{s}|h_j|^{k_jq}\sum_{l=1}^{m}2^{l\frac{q}{\tau_1}(k_1+\beta_1+\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}E^q_{Q(\Lambda,2^l)}(f)_p +$$

$$+\sum_{l=m+1}^{\infty}2^{l\frac{q}{\tau_1}(\beta_1+\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}E^q_{Q(\Lambda,2^l)}(f)_p.$$

Наконец, выбирая $n\in Z_+^s$ таким, чтобы $2^{-(1+n_j)}<h_j\le 2^{-n_j}$, $j=1,\dots,s$, и полагая m равной целой части $\frac{\tau_1}{k_1}(n,k)$, а затем воспользовавшись неравенством $|a+b|^\gamma\le|a|^\gamma+|b|^\gamma$, $0\le\gamma\le 1$, придем к требуемой оценке. □

Замечание 4. В одномерном случае при $1\le p<q\le 2$, $\alpha(n)\equiv 0$, $\Lambda(t)=t$ и $D(n)\equiv 1$ теорема 5 была доказана в [18], а для $D(n)$, удовлетворяющих условию (6), — в [19], и для произвольных $1<p<q<\infty$ — в [20].

Замечание 5. Теоремы 4 и 5 справедливы и при $D(n)\equiv 1$, только в этом случае полагаем $\boldsymbol{\beta}=0$.

Литература

1. Ульянов П.Л. *О модулях непрерывности и коэффициентах Фурье* // Вестн. Моск. ун-та. Сер. матем., мех. – 1995. – № 1. – С. 37–52.
2. Бари Н.К., Стечкин С.Б. *Наилучшие приближения и дифференциальные свойства двух сопряженных функций* // Тр. Моск. матем. о-ва. – 1956. – Т. 5. – С. 483–522.
3. Nady B. *Sur une classe generale de procedes de sommation pour les series de Fourier* // Hung. Acta Math. – 1948. – V. 1. – № 3. – P. 14–62.

4. Weyl H. *Bemerkungen zum Begriff der Differentialquotienten gebrochener Ordnung* // Vierteljahrschrift d. Naturforscher Gesellschaft in Zurich. – 1917. – V. 62. – P. 296–302.
5. Зигмунд А. *Тригонометрические ряды.* Т. 2. – М.: Мир, 1965. – 537 с.
6. Тиман А.Ф. *Теория приближения функций действительного переменного.* – М.: Физматгиз, 1960. – 624 с.
7. Бесов О.В., Ильин В.П., Никольский С.М. *Интегральные представления функций и теоремы вложения.* – М.: Наука, 1975. – 480 с.
8. Степанец А.И. *Классификация и приближение периодических функций.* – Киев: Наукова думка, 1987. – 268 с.
9. Темляков В.Н. *Приближение функций с ограниченной смешанной производной* // Тр. матем. ин-та АН СССР. – 1986. – Т. 178. – 112 с.
10. Конюшков А.А. *Наилучшие приближения тригонометрическими полиномами и коэффициенты Фурье* // Матем. сб. – 1958. – Т. 44. – № 1. – С. 53–84.
11. Ульянов П.Л. *Теоремы вложения и соотношения между наилучшими приближениями (модулями непрерывности) в разных метриках* // Матем. сб. – 1970. – Т. 81. – № 1. – С. 104–131.
12. Темиргалиев Н. *Теоретико-числовые методы и теоретико-вероятностный подход к задачам анализа. Теория вложений и приближений, абсолютная сходимость и преобразования Фурье* // Вестн. Евразийск. ун-та. – 1997. – № 3. – С. 90–144.
13. Никольский С.М. *Приближение функций многих переменных и теоремы вложения.* – 2-е изд. – М.: Наука, 1977. – 455 с.
14. Митягин Б.С. *Приближение функций в пространствах L^p и C на торе* // Матем. сб. – 1962. – Т. 58. – № 4. – С. 397–414.
15. Никольская Н.С. *Приближение дифференцируемых функций многих переменных суммами Фурье в метрике L_p* // Сиб. матем. журн. – 1974. – Т. 15. – № 2. – С. 395–412.
16. Тиман М.Ф. *О вложении $L_p^{(k)}$ классов функций* // Изв. вузов. Математика. – 1974. – № 10. – С. 61–74.
17. Аманов Т.И. *Пространства дифференцируемых функций с доминирующей смешанной производной.* – Алма-Ата: Наука, 1976. – 223 с.
18. Тиман М.Ф. *Наилучшие приближения и модуль гладкости функций, заданных на всей вещественной оси* // Изв. вузов. Математика. – 1961. – № 6. – С. 108–120.
19. Кокилашвили В.М. *Об оценке наилучших приближений и модулей гладкости в различных лебеговских пространствах периодических функций с преобразованным рядом Фурье* // Сообщ. АН Груз. ССР. – 1964. – Т. 35. – № 1. – С. 3–8.
20. Сихов М.Б. *Об одной обратной теореме разных метрик для преобразованных рядов Фурье.* – В кн.: Теория функций, уравнения математической физики и их приложения. – Алма-Ата, 1988. – С. 47–50.

Казахский государственный
национальный университет им. аль-Фараби
(Республика Казахстан)

Поступила
29.01.2001