И З В Е С Т И Я   В Ы С Ш И Х   У Ч Е Б Н Ы Х   З А В Е Д Е Н И Й

2004 МАТЕМАТИКА № 10 (509)

УДК 514.752

М.А. АКИВИС, В.В. ГОЛЬДБЕРГ, А.В. ЧАКМАЗЯН

ИНДУЦИРОВАННЫЕ СВЯЗНОСТИ НА МНОГООБРАЗИЯХ В ПРОСТРАНСТВАХ С ФУНДАМЕНТАЛЬНЫМИ ГРУППАМИ

Введение

Теория конгруэнций и псевдоконгруэнций подпространств проективного пространства тесно связана с теорией многообразий с вырожденным гауссовым отображением.

Теория конгруэнций в трехмерном проективном пространстве $\mathbb{P}^3$, а также в трехмерных пространствах, снабженных проективной структурой (таких как аффинное, евклидово и неевклидовы пространства), изучалась многими геометрами. Имеются обширные монографии, посвященные этому предмету (напр., [1]).

В данной работе установлены взаимосвязи теории многообразий в проективных пространствах с вырожденным гауссовым отображением с теорией конгруэнций и псевдоконгруэнций подпространств и показано, как эти две теории могут быть применены к построению индуцированных связностей на подмногообразиях в проективных пространствах и других пространствах, снабженных проективной структурой.

1. Основные уравнения многообразия с вырожденным гауссовым отображением

Многообразие X размерности n, которое является подмногообразием проективного пространства $\mathbb{P}^N$, $X \subset \mathbb{P}^N$, называется *тангенциально вырожденным многообразием* или *многообразием с вырожденным гауссовым отображением*, если ранг его гауссова отображения

$$\gamma : X \to \mathbb{G}(n, N)$$

меньше, чем n, $0 \leq r = \operatorname{rank} \gamma < n$; здесь $\gamma(x) = T_x(X)$, а $T_x(X)$ — касательное подпространство к X в точке x, рассматриваемое как n-мерное проективное пространство $\mathbb{P}^n$. Число r называют также *рангом* многообразия X, $r = \operatorname{rank} X$. Случай $r = 0$ является тривиальным: многообразие X оказывается n-плоскостью.

Пусть $X \subset \mathbb{P}^N$ — почти всюду гладкое n-мерное многообразие с вырожденным гауссовым отображением. Предположим, что $0 < \operatorname{rank} \gamma = r < n$. Обозначим через L слой отображения

$$\gamma : L = \gamma^{-1}(T_x) \subset X; \quad \dim L = n - r = l.$$

Как доказано в ([2], теорема 3.1, с. 95), многообразие с вырожденным гауссовым отображением ранга r расслаивается на плоские слои L размерности l, вдоль которых касательное подпространство $T_x(X)$ постоянно. Касательное подпространство $T_x(X)$ является постоянным, когда точка x пробегает множество регулярных точек слоя L. По этой причине мы обозначаем его T_L, $L \subset T_L$. Пара (L, T_L) на многообразии X зависит от r параметров.

Вышеописанное слоение на многообразии X называется *слоением Монжа–Ампера*.

Многообразия ранга $r < n$ являются многомерными аналогами развертывающихся поверхностей трехмерного евклидова пространства.

Изложение основных результатов геометрии многообразий с вырожденным гауссовым отображением и дальнейшую литературу по этому вопросу можно найти в ([3], гл. 4), а также в [2].

Данный параграф посвящен отысканию основных уравнений многообразия X с вырожденным гауссовым отображением размерности n и ранга r в проективном пространстве $\mathbb{P}^N$.

В дальнейшем используемые индексы будут пробегать следующие области значений:

$$a, b, c = 1, \dots, l; \quad p, q = l+1, \dots, n; \quad \alpha, \beta = n+1, \dots, N.$$

Точка $x \in X$ называется *регулярной точкой* отображения γ (или многообразия X), если $\dim T_x(X) = \dim X = n$.

Свяжем с многообразием X семейство подвижных реперов $\{A_u\}$, $u = 0, 1, \dots, N$, таким образом, что точка $A_0 = x$ является регулярной точкой слоя L многообразия X, точки A_a принадлежат слою L слоения Монжа–Ампера, проходящему через точку A_0, точки A_p вместе с точками A_0, A_a определяют касательное подпространство $T_L(X)$ к многообразию X, а точки A_α расположены вне подпространства $T_L(X)$.

Уравнения инфинитезимального перемещения подвижного репера $\{A_u\}$ имеют вид

$$dA_u = \omega_u^v A_v, \quad u, v = 0, 1, \dots, N,$$

где ω_u^v — 1-формы, удовлетворяющие структурным уравнениям проективного пространства $\mathbb{P}^N$:

$$d\omega_u^v = \omega_u^w \wedge \omega_w^v, \quad u, v, w = 0, 1, \dots, N.$$

В результате вышеуказанной специализации подвижного репера получим следующие уравнения многообразия X ([2], секция 3.1):

$$\omega_0^\alpha = 0, \quad \omega_a^\alpha = 0,$$

$$\omega_p^\alpha = b_{pq}^\alpha \omega^q, \quad b_{pq}^\alpha = b_{qp}^\alpha, \tag{1}$$

$$\omega_a^p = c_{aq}^p \omega^q. \tag{2}$$

В этих уравнениях 1-формы $\omega^q := \omega_0^q$ являются базисными формами гауссова образа $\gamma(X)$ многообразия X, а величины b_{pq}^α образуют второй фундаментальный тензор многообразия X в точке $x = A_0$. Величины b_{pq}^α и c_{aq}^p связаны следующими соотношениями:

$$b_{sq}^\alpha c_{ap}^s = b_{sp}^\alpha c_{aq}^s. \tag{3}$$

Уравнения (1) и (2) называются *основными уравнениями* многообразия X с вырожденным гауссовым отображением ([2], секция 3.1).

Отметим, что при преобразованиях точек A_p величины c_{aq}^p преобразуются как тензоры по отношению к индексам p и q. По отношению к индексу a, величины c_{aq}^p тензора не образуют. Тем не менее, при преобразованиях точек A_0 и A_a величины c_{aq}^p вместе с единичным тензором δ_q^p преобразуются как тензоры. По этой причине система величин c_{aq}^p называется *квазитензором.*

Обозначим через B^α и C_a следующие $r \times r$-матрицы, состоящие из коэффициентов уравнений (1) и (2):

$$B^\alpha = (b_{pq}^\alpha), \quad C_a = (c_{aq}^p).$$

В некоторых случаях мы будем использовать единичную матрицу $C_0 = (\delta_q^p)$ и индекс $i = 0, 1, \dots, l$, т. е. $\{i\} = \{0, a\}$. Соотношения (1) и (3) можно объединить и записать в матричном виде

$$(B^\alpha C_i)^T = (B^\alpha C_i),$$

что означает симметричность матриц

$$H_i^\alpha = B^\alpha C_i = (b_{qs}^\alpha c_{ip}^s).$$

Квадратичные формы

$$\Phi^\alpha = b_{pq}^\alpha \omega^p \omega^q$$

являются *вторыми фундаментальными формами* многообразия X в точке $x = A_0$, а формы

$$\Phi^\alpha = b_{ps}^\alpha (\delta_q^s x^0 + c_{aq}^s x^a) \omega^p \, \omega^q$$

являются *вторыми фундаментальными формами* многообразия X в точке $x = x^0 A_0 + x^a A_a \in L$.

Пусть $\{\alpha^u\}$ — корепер (или тангенциальный репер) в пространстве $(\mathbb{P}^N)^*$, дуальный к реперу $\{A_u\}$. Тогда гиперплоскости α^u репера $\{\alpha^u\}$ связаны с вершинами репера $\{A_u\}$ условиями

$$(\alpha^u, A_v) = \delta^u_v. \tag{4}$$

Условия (4) означают, что гиперплоскость α^u содержит все точки A_v, $v \neq u$, а также что выполнено следующее условие нормировки: $(\alpha^u, A_u) = 1$.

Уравнение

$$\xi_\beta \alpha^\beta = 0$$

определяет систему касательных гиперплоскостей, проходящих через касательное подпространство $T_L(X)$. Эта система касательных гиперплоскостей определяет систему вторых фундаментальных форм

$$\mathrm{II} = \xi_\beta b^\beta_{pq} \omega^p \omega^q$$

и систему вторых фундаментальных тензоров $\xi_\beta b^\beta_{pq}$ многообразия X в точке $x = A_0$.

Многообразие X с вырожденным гауссовым отображением является *дуально невырожденным*, если размерность его дуального многообразия X^* равна $N - l - 1$. Согласно обобщенной теореме Гриффитса–Харриса (теорема 3.2 и следствие 3.3 в [2], с. 97–99) *многообразие X с вырожденным гауссовым отображением является дуально невырожденным тогда и только тогда, когда в любой гладкой точке $x \in X$ найдется по крайней мере одна невырожденная вторая фундаментальная форма в системе вторых фундаментальных форм $\xi_\alpha b^\alpha_{pq} \omega^p \omega^q$ многообразия X.*

В дальнейшем будем рассматривать только дуально невырожденные многообразия X с вырожденным гауссовым отображением.

2. Фокальные образы многообразия с вырожденным гауссовым отображением

Предположим, что X — многообразие с вырожденным гауссовым отображением размерности n и ранга r в пространстве $\mathbb{CP}^N$. Как было ранее замечено, такое многообразие несет на себе r-параметрическое семейство l-мерных плоскостных образующих L размерности $l = n - r$. Пусть $x = x^0 A_0 + x^a A_a$ — произвольная точка образующей L. Для такой точки имеем

$$dx = (dx^0 + x^0 \omega^0_0 + x^a \omega^0_a) A_0 + (dx^a + x^0 \omega^a + x^b \omega^a_b) A_a + (x^0 \omega^p + x^a \omega^p_a) A_p.$$

В соответствии с (2) отсюда следует

$$dx \equiv (x^0 \delta^p_q + x^a c^p_{aq}) A_p \omega^q \pmod{L}. \tag{5}$$

Матрица $(J^p_q) = (x^0 \delta^p_q + x^a c^p_{aq})$ является *матрицей Якоби* отображения $\gamma : X \to \mathbb{G}(n, N)$, а определитель

$$J(x) = \det(J^p_q)$$

этой матрицы является *якобианом* отображения γ. Легко видеть, что $J(x) \neq 0$ в регулярных точках и $J(x) = 0$ в особых точках.

В соответствии с (2) и (5) множество особых точек образующей L многообразия X определяется уравнением

$$\det(\delta^p_q x^0 + c^p_{aq} x^a) = 0. \tag{6}$$

Таким образом, это множество является *алгебраической гиперповерхностью размерности $l-1$ и степени r в образующей L*. Эта гиперповерхность (в L) называется *фокусной гиперповерхностью* и обозначается F_L.

Поскольку при $x^a = 0$ левая часть уравнения (6) принимает вид

$$\det(x^0 \delta^p_q) = (x^0)^r,$$

то отсюда следует, что точка A_0 является регулярной точкой образующей L.

Будем называть касательную гиперплоскость $\xi = (\xi_\alpha)$ *особой* (или *фокусной гиперплоскостью*), если

$$\det(\xi_\alpha b^\alpha_{pq}) = 0, \tag{7}$$

т. е. если матрица $(\xi_\alpha b^\alpha_{pq})$ имеет пониженный ранг. Условие (7) представляет собой уравнение степени r по отношению к тангенциальным координатам ξ_α гиперплоскости ξ, содержащей касательное подпространство $T_L(X)$.

Поскольку в данной работе рассматриваются только дуально невырожденные многообразия с вырожденным гауссовым отображением, то *найдется по крайней мере одна невырожденная форма в системе вторых фундаментальных форм многообразия* X (см. конец § 1). Отсюда следует, что уравнение (7) определяет в пространстве $\mathbb{P}^N$ алгебраический гиперконус степени r, вершиной которого является касательное подпространство $T_L(X)$. Этот гиперконус называется *фокусным гиперконусом* и обозначается Φ_L ([3], с. 119).

Заметим, что в случае, когда многообразие X является дуально вырожденным, уравнения (7) на этом многообразии удовлетворяются тождественно и многообразие X не имеет фокусных гиперконусов.

Фокусная гиперповерхность $F_L \subset L$ и фокусный гиперконус Φ_L с вершиной T_L называются *фокальными образами* многообразия X с вырожденным гауссовым отображением.

3. Конгруэнции и псевдоконгруэнции в проективном пространстве

Рассмотрим семейство Y l-мерных подпространств L, $\dim L = l$, в проективном пространстве $\mathbb{P}^n$, зависящее от $r = n - l$ параметров. Будем предполагать, что через всякую точку $x \in \mathbb{P}^n$ проходит не более конечного числа подпространств L этого семейства. Если ограничиться рассмотрением малой окрестности подпространства L, то можно считать, что только одно подпространство $L \in Y$ проходит через произвольную точку $x \in L$. Семейства такого вида в пространстве $\mathbb{P}^n$ называются *конгруэнциями*.

Дуальным образом для конгруэнции Y l-мерных подпространств в $\mathbb{P}^n$ является *псевдоконгруэнция* Y^*, представляющая собой r-параметрическое семейство подпространств размерности $r-1$. Всякая гиперплоскость $\xi \subset \mathbb{P}^n$ содержит не более чем конечное число подпространств $L^* \in Y^*$. Однако, если рассматривать достаточно малую окрестность подпространства L^* псевдоконгруэнции Y^*, то гиперплоскость ξ будет содержать только единственное подпространство L^*.

Установим связь теории многообразий с вырожденным гауссовым отображением в проективных пространствах с теорией конгруэнций и псевдоконгруэнций подпространств и покажем, как эти две теории могут быть применены к построению индуцированных связностей на подмногообразиях проективных пространств, а также других пространств, снабженных проективной структурой.

Итак, рассмотрим в проективном пространстве $\mathbb{P}^n$ конгруэнцию Y l-мерных подпространств L. Свяжем с любым элементом L конгруэнции Y семейство проективных реперов $\{A_0, A_1, \dots, A_n\}$, выбранных таким образом, что точки $A_0, A_1, \dots, A_l$ принадлежат подпространству L, а точки $A_{l+1}, \dots, A_n$ расположены вне этого подпространства. Уравнения инфинитезимального перемещения для таких реперов имеют вид

$$\begin{cases} dA_i = \omega_i^j A_j + \omega_i^p A_p, \\ dA_p = \omega_p^i A_i + \omega_p^q A_q, \end{cases} \tag{8}$$

где $i, j = 0, 1, \dots, l$; $p, q = l+1, \dots, n$, а $L = A_0 \wedge A_1 \wedge \dots \wedge A_l$ — образующая рассматриваемой конгруэнции Y. Поскольку эта образующая зависит от r параметров и является фиксированной при $\omega_i^p = 0$, то формы ω_i^p линейно выражаются через дифференциалы этих r параметров или через линейно независимые 1-формы θ^p, являющиеся линейными комбинациями этих дифференциалов:

$$\omega_i^p = c^p_{iq}\theta^q. \tag{9}$$

При допустимых линейных преобразованиях базисных форм θ^p матрицы $C_i = (c^p_{iq})$ преобразуются по тензорному закону по отношению к индексам p и q.

Точка $F \in L \subset Y$ называется *фокусом* образующей L, если $dF \in L$ при некотором условии на базисные формы θ^p. Для отыскания фокусов представим их в виде $F = x^i A_i$. Тогда

$$dF \equiv x^i \omega^p_i A_p \pmod{L};$$

поэтому фокусы определяются системой уравнений

$$x^i \omega^p_i = 0.$$

В соответствии с (9) эта система принимает вид

$$x^i c^p_{iq} \theta^q = 0. \tag{10}$$

Система (10) имеет нетривиальное решение по отношению к формам θ^q тогда и только тогда, когда

$$\det(x^i c^p_{iq}) = 0. \tag{11}$$

Уравнение (11) определяет на L фокусную гиперповерхность F_L, представляющую собой алгебраическую гиперповерхность степени r.

Предположим, что точка A_0 рассматриваемого подвижного репера не принадлежит гиперповерхности F_L. Тогда 1-формы ω^p_0 являются линейно независимыми, и мы можем взять эти формы в качестве базисных форм конгруэнции Y. В результате уравнения (9) приобретают вид

$$\omega^p_a = c^p_{aq} \omega^q_0, \tag{12}$$

где $a = 1, \dots, l$, а $c^p_{0q} = \delta^p_q$. Теперь уравнения (12) совпадают с уравнениями (2). Поэтому уравнение (11) фокусной гиперповерхности F_L запишется в форме

$$\det(x^0 \delta^p_q + x^a c^p_{aq}) = 0. \tag{13}$$

Уравнение (13) совпадает с уравнением (6), определяющим фокусы на плоской образующей L многообразия X с вырожденным гауссовым отображением ранга r. Однако в отличие от § 1 эти величины c^p_{aq} не связаны никакими соотношениями типа (3), поскольку в данном случае нет матриц $B^\alpha = (b^\alpha_{pq})$. Таким образом, фокусные гиперповерхности F_L, определяемые уравнением (13), являются произвольными детерминантными многообразиями на образующих L рассматриваемой конгруэнции Y.

В частности, если $l = 1$ и $n = r+1$, то Y становится прямолинейной конгруэнцией. Уравнение (13), определяющее фокусные гиперповерхности F_L такой конгруэнции, принимает вид

$$\det(x^0 \delta^p_q + x^1 c^p_{1q}) = 0.$$

Следовательно, каждая из фокусных гиперповерхностей F_L конгруэнции Y распадается на r вещественных или комплексных точек при условии, что каждая из них считается столько раз, какова ее кратность. Каждая из этих точек описывает *фокальное многообразие* в пространстве $\mathbb{P}^n$, касательное к образующим L конгруэнции Y.

Рассмотрим далее псевдоконгруэнцию Y^* в пространстве $\mathbb{P}^n$. Ее образующая L^* имеет размерность $r-1$ и зависит от r параметров. Поместим точки A_p, $p = l+1, \dots, n$, $l = n - r$, рассматриваемого подвижного репера на образующую $L^* \in Y^*$, а точки A_i, $i = 0, 1, \dots, l$, вне образующей L^*. Уравнения инфинитезимального перемещения таких реперов снова имеют вид (8), однако в данном случае 1-формы ω^i_p являются линейными комбинациями базисных форм θ^p, определяющих смещение образующей $L^* = A_{l+1} \wedge \dots \wedge A_n$. Таким образом, в этом случае имеем

$$\omega^i_p = b^i_{pq} \theta^q$$

и

$$dA_p = \omega_p^q A_q + b_{pq}^i \theta^q A_i. \tag{14}$$

Рассмотрим гиперплоскость ξ, проходящую через образующую $L^* \in Y^*$. По отношению к рассматриваемому подвижному реперу уравнение гиперплоскости ξ имеет вид $\xi_i x^i = 0$, где ξ_i — тангенциальные координаты этой гиперплоскости. Гиперплоскость ξ, которая кроме образующей L^* содержит также бесконечно близкую образующую $'L^*$, определяемую точками A_p и dA_p, называется *фокусной гиперплоскостью.* В соответствии с (14) уравнения, определяющие фокусные гиперплоскости, имеют вид

$$\xi_i b_{pq}^i \theta^q = 0. \tag{15}$$

Система уравнений (14) определяет смещение образующей L^* тогда и только тогда, когда система (15) имеет нетривиальное решение по отношению к формам θ^q. Необходимым и достаточным условием существования такого нетривиального решения является обращение в нуль определителя системы (15):

$$\det(\xi_i b_{pq}^i) = 0. \tag{16}$$

Уравнение (16) определяет семейство фокусных гиперплоскостей, проходящих через образующую $L^* \in Y^*$. Это семейство представляет собой алгебраический гиперконус степени r, вершиной которого является образующая L^*. Заметим, что уравнение (16) аналогично уравнению (7) фокусного гиперконуса Φ_L многообразия с вырожденным гауссовым отображением.

4. Нормализованные многообразия в многомерном проективном пространстве

1. Рассмотрим гладкое r-мерное многообразие X в проективном пространстве $\mathbb{P}^n$, $r < n$. Дифференциальная геометрия такого многообразия беднее, чем дифференциальная геометрия многообразия в евклидовом пространстве или пространствах постоянной кривизны $\mathbb{S}^n$ и $\mathbb{H}^n$, где $\mathbb{S}^n$ и $\mathbb{H}^n$ означают соответственно n-мерные эллиптическое и гиперболическое пространства. С окрестностью первого порядка точки $x \in X \subset \mathbb{P}^n$ ассоциируется только касательное подпространство $T_x(X)$. Например, в ([2], секция 1.4) показано, что для того чтобы обогатить дифференциальную геометрию кривой на проективной плоскости $\mathbb{P}^2$, необходимо использовать дифференциальные продолжения уравнения кривой достаточно высоких порядков.

Однако мы можем обогатить дифференциальную геометрию многообразия $X \subset \mathbb{P}^n$, снабжая X дополнительной конструкцией, состоящей из подпространства $N_x(X)$ размерности $n - r$ такого, что $T_x(X) \cap N_x(X) = x$, и $(r-1)$-мерного подпространства $K_x(X)$, $K_x(X) \subset T_x(X)$, $x \notin K_x(X)$. Будем обозначать эти подпространства символами N_x и K_x и называть *нормалями первого и второго рода* (или просто *первой* и *второй нормалями*) многообразия X соответственно ([4], с. 198).

Семейство первых нормалей образует *конгруэнцию* N, а семейство вторых нормалей образует *псевдоконгруэнцию* K в пространстве $\mathbb{P}^n$. Если с каждой точкой $x \in X$ ассоциированы единственная первая нормаль N_x и единственная вторая нормаль K_x, то многообразие X называется *нормализованным* ([4], с. 198; [3], гл. 6).

Как будет видно из дальнейшего, в случае многообразий в евклидовом пространстве $\mathbb{E}^n$, а также неевклидовых пространствах $\mathbb{S}^n$ и $\mathbb{H}^n$, первые и вторые нормали определяются геометрией этих пространств, в то время как в случае многообразий в аффинном пространстве $\mathbb{A}^n$ и в проективном пространстве $\mathbb{P}^n$ эти нормали должны быть выбраны искусственно или же для нахождения их следует использовать окрестности точки $x \in X$ высоких порядков. В этой статье мы будем применять первый метод. Заметим, что второй метод сопряжен со значительными вычислительными трудностями. Подробное изложение этого метода и ссылки на соответствующую литературу можно найти в ([3], гл. 6, 7; [4], гл. 5).

Итак, рассмотрим нормализованное многообразие X размерности r в проективном пространстве $\mathbb{P}^n$. Свяжем с X семейство проективных реперов $\{A_0, A_1, \dots, A_n\}$ таким образом, что $A_0 = x$,

$A_a \in N_x$, $a = 1, \dots, l$, где $l = n - r$, и $A_p \in K_x$, $p = l+1, \dots, n$. Уравнения инфинитезимального перемещения таких реперов имеют вид

$$\begin{cases} dA_0 = \omega_0^0 A_0 \qquad\qquad + \omega^p A_p, \\ dA_a = \omega_a^0 A_0 + \omega_a^b A_b + \omega_a^p A_p, \\ dA_p = \omega_p^0 A_0 + \omega_p^a A_a + \omega_p^q A_q. \end{cases} \tag{17}$$

Уравнения (17) показывают, что рассматриваемое семейство подвижных реперов удовлетворяет системе дифференциальных уравнений

$$\omega^a = 0, \tag{18}$$

а 1-формы ω^p являются базисными формами, поскольку они определяют смещение точки $A_0 = x$ вдоль многообразия X. Внешнее дифференцирование уравнения (18) и использование леммы Картана приводит к уравнениям

$$\omega_p^a = b_{pq}^a \omega^q, \quad b_{pq}^a = b_{qp}^a. \tag{19}$$

Величины b_{pq}^a образуют тензор и являются коэффициентами вторых фундаментальных форм многообразия X в точке x ([2], секция 2.1):

$$\Phi^a = b_{pq}^a \omega^p \omega^q.$$

2. Точки A_p принадлежат касательному подпространству $T_x(X)$. Будем предполагать, что эти точки принадлежат второй нормали $K_x \subset T_x(X)$, $K_x = A_{l+1} \wedge \dots \wedge A_n$. Тогда при $\omega^p = 0$ 1-формы ω_p^0 также должны обращаться в нуль, в результате чего имеем

$$\omega_p^0 = l_{pq} \omega^q. \tag{20}$$

Далее, поместим точки A_a рассматриваемого подвижного репера на первую нормаль N_x многообразия X, $N_x = A_0 \wedge A_1 \wedge \dots \wedge A_l$. Тогда при $\omega^p = 0$ получаем $\omega_a^p = 0$, откуда

$$\omega_a^p = c_{aq}^p \omega^q. \tag{21}$$

Рассмотрим точку $y \in N_x$ на первой нормали. Имеем $y = y^0 A_0 + y^a A_a$. Дифференцируя это соотношение и используя (17), получаем

$$dy = (dy^0 + y^0 \omega_0^0 + y^a \omega_a^0) A_0 + (y^0 \omega^p + y^a \omega_a^p) A_p + (dy^a + y^b \omega_b^a) A_a. \tag{22}$$

Точка y является *фокусом* первой нормали N_x, если $dy \in N_x$. В соответствии с (22) из этого условия следует

$$y^0 \omega^p + y^a \omega_a^p = 0.$$

Применяя соотношения (21), находим

$$(y^0 \delta_q^p + y^a c_{aq}^p) \omega^q = 0.$$

Эта система имеет нетривиальное решение по отношению к формам ω^q тогда и только тогда, когда

$$\det(y^0 \delta_q^p + y^a c_{aq}^p) = 0. \tag{23}$$

Уравнение (23) отличается от уравнения (13) только обозначениями и определяет фокусную гиперповерхность F_x в образующей N_x конгруэнции первых нормалей, ассоциированной с многообразием X. Из уравнения (23) следует, что точка $x \in X$ с координатами $x^0 = 1$, $x^a = 0$ не принадлежит фокусной гиперповерхности F_x.

Найдем фокусные гиперконусы Φ_x псевдоконгруэнции K вторых нормалей многообразия X. Гиперконус Φ_x образован гиперплоскостями ξ пространства $\mathbb{P}^n$, содержащими вторую нормаль

$K_x = A_{l+1} \wedge \dots \wedge A_n \subset T_x(X)$ и бесконечно близкую нормаль $K_x + dK_x$, содержащую не только точки A_p, но также и точки

$$dA_p \equiv \omega_p^0 A_0 + \omega_p^a A_a \pmod{N_x}.$$

Таким образом, тангенциальные координаты ξ_0 и ξ_a такой гиперплоскости удовлетворяют уравнениям

$$\xi_0 \omega_p^0 + \xi_a \omega_p^a = 0.$$

В соответствии с (20) и (19) из этого уравнения следует

$$(\xi_0 l_{pq} + \xi_a b_{pq}^a)\, \omega^q = 0.$$

Эта система имеет нетривиальное решение по отношению к формам ω^q тогда и только тогда, когда обращается в нуль ее определитель:

$$\det(\xi_0 l_{pq} + \xi_a b_{pq}^a) = 0. \tag{24}$$

Уравнение (24) определяет алгебраический гиперконус порядка r, вершиной которого является образующая K_x псевдоконгруэнции K вторых нормалей. Этот гиперконус называется *фокусным гиперконусом* псевдоконгруэнции K.

3. Рассмотрим теперь касательное и нормальное расслоения, ассоциированные с нормализованным многообразием X. Базой каждого из этих расслоений является само многообразие X, слоями касательного расслоения являются касательные подпространства T_x, а слоями нормального расслоения являются первые нормали N_x.

Пусть $'x = x + x^p A_p$ — произвольная точка касательного подпространства T_x, а $\boldsymbol{x} = {}'x - x = x^p A_p$ — вектор в касательном расслоении $T(X)$. Дифференциал этого вектора имеет вид

$$d\boldsymbol{x} = (dx^p + x^q \omega_q^p) A_p + x^p (l_{pq} A_0 + b_{pq}^a A_a) \omega^q. \tag{25}$$

Первое слагаемое в правой части соотношения (25) принадлежит касательному подпространству T_x, а второе слагаемое принадлежит нормали N_x. 1-форма

$$Dx^p = dx^p + x^q \omega_q^p$$

называется *ковариантным дифференциалом* вектора $\boldsymbol{x} = (x^p)$ по отношению к аффинной связности γ_t, индуцированной на многообразии X нормализацией (N, K). 1-формы ω_q^p суть компоненты *формы связности* $\omega = \{\omega_q^p\}$ связности γ_t.

Векторное поле $\boldsymbol{x}$ называется *параллельным* в связности γ_t, если его ковариантный дифференциал Dx^p обращается в нуль, т. е. если

$$Dx^p = dx^p + x^q \omega_q^p = 0.$$

Найдем внешние дифференциалы компонент ω_q^p формы связности ω. Из формул (19), (20) и (21) следует, что эти внешние дифференциалы имеют вид

$$d\omega_q^p = \omega_q^s \wedge \omega_s^p + (l_{qs} \delta_t^p + b_{qs}^a c_{at}^p) \omega^s \wedge \omega^t. \tag{26}$$

2-форма

$$\Omega_q^p = d\omega_q^p - \omega_q^s \wedge \omega_s^p$$

называется *формой кривизны* аффинной связности γ_t, индуцированной на многообразии X. Из уравнения (26) следует, что

$$\Omega_q^p = \tfrac{1}{2} R_{qst}^p \omega^s \wedge \omega^t,$$

где

$$R_{qst}^p = l_{qs} \delta_t^p + b_{qs}^a c_{at}^p - l_{qt} \delta_s^p - b_{qt}^a c_{as}^p \tag{27}$$

— *тензор кривизны* аффинной связности γ_t на X. Уравнения (27) позволяют вычислять тензоры кривизны для различных нормализаций многообразия X.

Если $R^p_{qst} = 0$ на многообразии X, то аффинная связность γ_t на X является *плоской*, и параллельное перенесение вектора $\boldsymbol{x}$ не зависит от пути (см., напр., [4], с. 118; [5], с. 70).

4. Рассмотрим далее векторное поле $\boldsymbol{y}$ в нормальном расслоении $N(X)$. Вектор $\boldsymbol{y}$ определяется точкой x и точкой $y = y^0 A_0 + y^a A_a$ слоя $N_x \subset N(X)$. Дифференциал точки y определяется уравнением (22).

1-форма

$$Dy^a = dy^a + y^b \omega_b^a$$

называется *ковариантным дифференциалом* векторного поля $\boldsymbol{y}$ в нормальном расслоении $N(X)$, а формы ω_a^b являются компонентами *формы связности нормальной связности* γ_n на нормализованном многообразии X (см., напр., [6], с. 242; дополнительную информацию о нормальной связности можно найти в [7] и [3], секция 6.3). 2-форма

$$\Omega_b^a = d\omega_b^a - \omega_b^c \wedge \omega_c^a$$

называется *формой кривизны* нормальной связности γ_n. Отметим, что Картан в [6] называл эту форму *гауссовым кручением* вложенного многообразия X.

Дифференцируя формы ω_b^a и применяя формулы (19) и (20), для формы кривизны находим выражение

$$\Omega_b^a = \tfrac{1}{2} R^a_{bst} \omega^s \wedge \omega^t,$$

где

$$R^a_{bst} = c^p_{bs} b^a_{pt} - c^p_{bt} b^a_{ps}. \tag{28}$$

Тензор R^a_{bst} называется *тензором нормальной кривизны* многообразия X.

Вторые нормали K_x, ассоциированные с многообразием X, позволяют получить распределение Δ_y r-мерных подпространств, ассоциированное с X. Элементы этого распределения Δ_y являются линейными оболочками точек $y \in N_x$ и вторых нормалей K_x, $\Delta_y = y \wedge K_x$. Из (22) следует, что распределение Δ_y определяется системой уравнений

$$dy^a + y^b \omega_b^a = 0. \tag{29}$$

В общем случае система уравнений (29) не является вполне интегрируемой, и когда точка x движется вдоль замкнутого контура $l \subset X$, соответствующая точка y не описывает замкнутого контура.

Однако точка y будет описывать замкнутый контур l', если система (29) является вполне интегрируемой. Условием полной интегрируемости системы (29) является обращение в нуль тензора кривизны (28) нормальной связности многообразия X. В этом случае распределение Δ_y, определенное системой (29), является вполне интегрируемым, и замкнутые контуры l' лежат на интегральных многообразиях этого распределения. Эти интегральные многообразия составляют $(n-r)$-параметрическое семейство r-мерных подмногообразий $X(y)$, которые "параллельны" многообразию X в том смысле, что подпространства $T_x(X)$ и $T_x(X(y))$ проходят через одну и ту же вторую нормаль K_x.

5. Нормализация многообразия $X \subset \mathbb{P}^n$ называется *центральной*, если все первые нормали N_x этой нормализации образуют связку с $(l-1)$-мерной вершиной S.

Теорема 1. *Нормализация нормализованного многообразия $X \subset \mathbb{P}^n$ является центральной тогда и только тогда, когда величины l_{pq} и c^p_{aq} в уравнениях* (20) *и* (21) *обращаются в нуль*:

$$l_{pq} = 0, \quad c^p_{aq} = 0. \tag{30}$$

Доказательство. Необходимость. Предположим, что нормализация многообразия $X \subset \mathbb{P}^n$ является центральной нормализацией с $(l-1)$-мерной вершиной S. Поместим точки A_a в эту вершину S. Тогда

$$dA_a = \omega_a^b A_b.$$

При этом из уравнения (17) следует

$$\omega_a^0 = 0, \;\; \omega_a^p = 0. \tag{31}$$

В соответствии с соотношениями (20) и (21) это означает (30).

Достаточность. Из (30) следует (31), откуда $dA_a = \omega_a^b A_b$. Таким образом, подпространство $S = A_1 \wedge \cdots \wedge A_l$ является постоянным. Все l-мерные первые нормали N_x проходят через S, и нормализация многообразия X является центральной с $(l-1)$-мерной вершиной S. □

Следствие. Индуцированная аффинная связность γ_t и нормальная связность γ_n центрально нормализованного многообразия $X \subset \mathbb{P}^n$ являются плоскими.

Доказательство. Поскольку для центрально нормализованного многообразия X выполняются соотношения (30), а тензор кривизны индуцированной аффинной связности γ_t имеет вид (27), то

$$R^p_{qst} = 0,$$

т. е. тензор кривизны индуцированной аффинной связности γ_t центрально нормализованного многообразия обращается в нуль.

Аналогичным образом из формулы (28) следует, что тензор кривизны нормальной связности γ_n центрально нормализованного многообразия также обращается в нуль.

Отметим, что оба этих факта вытекают также из того, что центрально нормализованное многообразие $X \subset \mathbb{P}^n$ может быть биективно спроектировано на r-мерное подпространство T, которое является дополнительным к вершине S расслоения первых нормалей N_x, и геометрия многообразия X, индуцированная этой центральной нормализацией, эквивалентна плоской геометрии пространства T. □

В [8] были найдены необходимые и достаточные условия, при которых нормализация многообразия X в аффинном пространстве $\mathbb{A}^N$ является центральной или тривиальной. Тривиальной нормализацией многообразия X в аффинном пространстве $\mathbb{A}^N$ называется нормализация, для которой все первые нормали N_x параллельны некоторой постоянной l-плоскости (т.е. образуют пучок параллельных l-плоскостей).

В обозначениях, принятых в данной работе, условия центральности нормализации, полученные в [8], имеют вид

$$c^p_{aq} = \delta^p_q c_a,$$

где δ^p_q — символы Кронекера, c_a — $(1,0)$-тензоры, а условия, при которых нормализация является тривиальной, имеют вид

$$c^p_{aq} = 0.$$

Однако в случае аффинного пространства (и, в частности, в случае евклидова пространства) всегда выполняется $l_{pq} = 0$. Кроме того, в проективном случае (так же, как и в аффинном случае), тривиальная нормализация является центральной нормализацией, вершина S которой принадлежит бесконечно удаленной гиперплоскости. Таким образом, результаты статьи [8] следуют из теоремы 1.

6. Рассмотрим нормализацию, дуальную центральной нормализации. При такой нормализации все вторые нормали K_x принадлежат фиксированной гиперплоскости α. Будем называть такую нормализацию *аффинной.*

Теорема 2. *Нормализация многообразия $X \subset \mathbb{P}^n$ является аффинной тогда и только тогда, когда 1-формы ω_p^0 и ω_a^0 в уравнениях* (17) *обращаются в нуль*:

$$\omega_p^0 = 0, \quad \omega_a^0 = 0. \tag{32}$$

Если нормализация многообразия $X \subset \mathbb{P}^n$ является аффинной, то проективное пространство $\mathbb{P}^n$ несет аффинную структуру, т. е. $\mathbb{P}^n$ является аффинным пространством $\mathbb{A}^n$.

Доказательство. Разместим точки $A_1, \dots, A_n$ подвижного репера на фиксированной гиперплоскости α. Поскольку при аффинной нормализации $K_x \subset \alpha$, и, следовательно, $dA_p \subset \alpha$, $p = l+1, \dots, n$, отсюда следует

$$\omega_p^0 = 0.$$

Более того, точки A_a, $a = 1, \dots, l$, первой нормали N_x также могут быть помещены в гиперплоскость α. Тогда $dA_a \subset \alpha$, откуда следует

$$\omega_a^0 = 0.$$

Обратно, если выполняется (32), то

$$dA_p \subset \alpha, \quad dA_a \subset \alpha,$$

где $\alpha = A_1 \wedge \dots \wedge A_n$. Таким образом, плоскость α является постоянной и нормализация многообразия X является аффинной, что и доказывает первую часть теоремы 2.

Для доказательства второй части теоремы 2 заметим, что можно принять гиперплоскость α за бесконечно удаленную гиперплоскость $\mathbb{P}_\infty$ пространства $\mathbb{P}^n$. Эта гиперплоскость определяет аффинную структуру в пространстве $\mathbb{P}^n$. Таким образом, пространство $\mathbb{P}^n$ становится аффинным пространством $\mathbb{A}^n$. $\square$

7. Предположим теперь, что нормализованное многообразие $X \subset \mathbb{P}^n$ имеет плоскую нормальную связность γ_n, т. е. $R^a_{bst} = 0$. При этом из выражения (28) вытекают соотношения

$$b^a_{pt} c^p_{bs} = b^a_{ps} c^p_{bt}, \tag{33}$$

которые только обозначениями отличаются от соотношений (3). Используя матрицы

$$B^a = (b^a_{pq}), \quad C_b = (c^p_{bq}),$$

запишем соотношения (33) в виде

$$(B^a C_b) = (B^a C_b)^T.$$

Как доказано в ([2], гл. 3 и 4), из этих соотношений следует, что матрицы B^a и C_b могут быть одновременно приведены к диагональному или блочно-диагональному виду. Таким образом, доказана

Теорема 3. *Фокусные гиперповерхности $F_x \subset N_x$ нормализованного многообразия X с плоской нормальной связностью распадаются на плоские образующие различных размерностей.*

Это свойство многообразий X с плоской нормальной связностью γ_n позволяет построить классификацию таких многообразий таким же способом, как это было осуществлено для многообразий с вырожденным гауссовым отображением в проективном пространстве. Для многообразий в аффинном и евклидовом пространствах такая классификация была описана в работах [9]–[11].

5. Нормализация многообразий в аффинном и евклидовом пространствах

1. Аффинное пространство $\mathbb{A}^n$ отличается от проективного пространства $\mathbb{P}^n$ тем, что в $\mathbb{A}^n$ фиксирована бесконечно удаленная гиперплоскость $\mathbb{P}_\infty$. Если поместить вершины A_i, $i = 1, \dots, n$, подвижного проективного репера в эту гиперплоскость, то уравнения инфинитезимального перемещения подвижного репера принимают вид ([2], уравнения (1.81))

$$\begin{cases} dA_0 = \omega_0^0 A_0 + \omega_0^i A_i, \\ dA_i = \qquad\quad \omega_i^j A_j, \end{cases} \qquad i, j = 1, \dots, n. \tag{34}$$

При этом структурными уравнениями аффинного пространства являются

$$d\omega_0^0 = 0, \quad d\omega_0^i = \omega_0^j \wedge \omega_j^i, \quad d\omega_j^i = \omega_j^k \wedge \omega_k^i.$$

Рассмотрим многообразие X размерности r в аффинном пространстве $\mathbb{A}^n$. Касательное пространство $T_x(X)$ пересекает бесконечно удаленную гиперплоскость $\mathbb{P}_\infty$ по подпространству K_x размерности $r-1$, $K_x = T_x \cap \mathbb{P}_\infty$. Таким образом, для нормализации многообразия X достаточно задать только семейство первых нормалей N_x. Если поместить точки $A_a, a = 1, \dots, l$, подвижного репера в подпространство $N_x \cap \mathbb{P}_\infty$, а точки A_p, $p = l+1, \dots, n$, в подпространство K_x, то уравнения (34) примут вид

$$\begin{cases} dA_0 = \omega_0^0 A_0 \qquad\quad + \omega_0^p A_p, \\ dA_a = \qquad\quad \omega_a^b A_b + \omega_a^p A_p, \\ dA_p = \qquad\quad \omega_p^a A_a + \omega_p^q A_q \end{cases} \tag{35}$$

(см. уравнения (17)).

Как и в проективном пространстве, имеем уравнения (19), где b_{pq}^a — второй фундаментальный тензор многообразия X. Уравнения (21) также сохраняют свой вид, однако вместо уравнений (20) получаем следующие уравнения:

$$\omega_p^0 = 0. \tag{36}$$

Поскольку $l_{pq} = 0$, уравнения фокусной гиперповерхности $F_x \subset N_x$ сохраняют свой вид (23). Что же касается уравнения (24) фокусного гиперконуса Φ_x, то в соответствии с формулой (36) это уравнение принимает вид

$$\det(\xi_a b_{pq}^a) = 0. \tag{37}$$

Выражения (27) для компонент тензора кривизны аффинной связности γ_t, индуцированной на нормализованном многообразии $X \subset \mathbb{A}^n$, запишутся теперь в виде

$$R_{qst}^p = b_{qs}^a c_{at}^p - b_{qt}^a c_{as}^p. \tag{38}$$

Что же касается выражений (28) для компонент тензора нормальной кривизны многообразия X, то они сохраняются.

Рассмотрим тензор R_{st}, полученный из тензора кривизны R_{qst}^p аффинной связности γ_t сверткой по индексам p и q. Будем называть этот тензор *тензором типа Риччи связности* γ_t. Из выражения (38) следует

$$R_{st} = b_{ps}^a c_{at}^p - b_{pt}^a c_{as}^p.$$

Аналогичным образом определим *тензор типа Риччи нормальной связности* γ_n. Обозначим его $\widetilde{R}_{st}$. Из выражений (28) получим

$$\widetilde{R}_{st} = b_{pt}^a c_{as}^p - b_{ps}^a c_{at}^p.$$

Сравнивая последние два уравнения, заключаем, что

$$R_{st} = -\widetilde{R}_{st}.$$

Таким образом, имеет место

Теорема 4. *На многообразии $X \subset \mathbb{A}^n$, снабженном аффинной нормализацией, тензоры типа Риччи связностей γ_t и γ_n отличаются лишь знаком.*

В случае нормализованной гиперповерхности X в аффинном пространстве $\mathbb{A}^n$ имеет место

Теорема 5. *Если аффинная связность γ_t, индуцированная на нормализованной гиперповерхности $X \subset \mathbb{A}^n$, является плоской, то и нормальная связность γ_n является плоской.*

Доказательство. Действительно, в случае гиперповерхности X используемые индексы пробегают следующие области значений:

$$a, b = 1; \quad p, q, s, t = 2, \ldots, n.$$

Поэтому тензор кривизны нормальной связности γ_n имеет компоненты R^1_{1st}. Тогда из теоремы 4 следует

$$R^1_{1st} = -R^p_{pst}.$$

Однако если связность γ_t является плоской, то $R^p_{qst} = 0$ и, следовательно, $R^p_{pst} = 0$. В результате имеем $R^1_{1st} = 0$, и поэтому связность γ_n также является плоской. □

Так же, как было в проективном пространстве, в аффинном пространстве обращение в нуль тензора нормальной кривизны R^a_{bst} эквивалентно полной интегрируемости системы Пфаффа, определяющей распределение $\Delta_y = y \wedge K_x$, где $y \in N_x$. Но в аффинном пространстве элементы Δ_y этого распределения параллельны подпространству $T_x(X)$.

Таким образом, имеет место

Теорема 6. *Нормализованное многообразие $X \subset \mathbb{A}^n$ имеет плоскую нормальную связность γ_n тогда и только тогда, когда это многообразие допускает l-параметрическое семейство параллельных многообразий $X(y)$, где $y \in N_x$.*

2. Другая связь теории многообразий с вырожденным гауссовым отображением с теорией нормализованных многообразий была установлена в [12] (см. также [13], теорема 4; [14], теорема 1, с. 39). Изложим эту теорему.

Предположим, что в каждой точке x нормализованного многообразия X задано s-мерное направление $\nu^s(x)$ (т. е. s-мерная плоскость, проходящая через x), принадлежащее первой нормали $N_x(X)$. Это означает, что задано гладкое поле нормальных s-мерных направлений $\nu^s(x)$ на X, где $s \leq l = n - r$. Это поле определяет нормальное подрасслоение $\nu^s(X)$, слоями которого являются s-мерные центропроективные пространства.

Плоскость $N^s(x)$ этого поля, соответствующая точке $x \in X$, может быть задана точкой x и точками

$$B_f = \xi^a_f A_a \in N_x, \tag{39}$$

где $f, g, h = 1, \ldots, s$.

Кроме этого, плоскость $N^s(x)$ должна быть инвариантна по отношению к допустимым преобразованиям подвижного репера в $N_x(X)$. Необходимые и достаточные условия ее инвариантности имеют вид

$$dB_f = \theta^g_f B_g + \theta^0_f A_0 \pmod{\omega^p},$$

где θ^g_f и θ^0_f — линейно независимые 1-формы.

Поле ν^s называется *параллельным* по отношению к нормальной связности γ_n, если при любом инфинитезимальном смещении произвольной точки $x \in X$ смещение s-мерного направления $\nu^s(x)$ происходит в $(r+s)$-мерной плоскости, натянутой на касательное подпространство $T_x(X)$, $x \in X$, и направление $\nu^s(x)$.

Найдем аналитические условия параллельности поля ν^s. Всякое направление, принадлежащее s-мерному элементу поля ν^s, определяется точками $A_0 = x$ и

$$A = A_0 + \xi^f B_f, \tag{40}$$

где B_f имеют вид (39).

Дифференцируя соотношения (40) внешним образом и применяя (17), получаем

$$dA = (\omega_0^0 + \xi^f \xi_f^a \omega_a^0) A_0 + d\xi^f B_f + (\omega^p + \xi^f \xi_f^a \omega_a^p) A_p + \xi^f (d\xi_f^a + \xi_f^b \omega_b^a) A_a.$$

Поле ν^s параллельно в нормальной связности γ_n тогда и только тогда, когда

$$(d\xi_f^a + \xi_f^b \omega_b^a) A_a = \theta_f^g B_g + \theta_f^0 A_0.$$

Отсюда и из формулы (39) следует

$$d\xi_f^a + \xi_f^b \omega_b^a = \theta_f^g \xi_g^a.$$

Теорема 7 ([12] или [14], с. 39–40). *Поле ν^s s-мерных нормальных направлений $\nu^s(x)$ на нормализованном многообразии $X \subset \mathbb{P}^n$ является параллельным в нормальной связности γ_n тогда и только тогда, когда плоскости $N^s(x)$, $x \in X$, образуют многообразие V_r^{r+s} в $\mathbb{P}^n$ с вырожденным гауссовым отображением ранга r с s-мерными плоскостными образующими.*

Теорема 7 указывает метод построения многообразия V_r^{r+s} с вырожденным гауссовым отображением, исходя из нормализованного многообразия X некоторого специального типа.

3. Рассмотрим, наконец, многообразие X размерности r в евклидовом пространстве $\mathbb{E}^n$. На многообразии X естественным образом определяются вторая нормаль $K_x = T_x \cap \mathbb{P}_\infty$ и первая нормаль N_x, ортогональная касательному пространству $T_x(X)$.

В евклидовом пространстве $\mathbb{E}^n$ определено скалярное произведение векторов. Это скалярное произведение индуцирует скалярное произведение точек, принадлежащих бесконечно удаленной гиперплоскости $\mathbb{P}_\infty$. В рассматриваемом подвижном репере имеем $A_a \in N_x \cap \mathbb{P}_\infty \stackrel{\mathrm{def}}{=} N'_x$; $A_p \in T_x \cap \mathbb{P}_\infty = K_x$, $a = 1, \ldots, l$; $p = l+1, \ldots, n$; и $T_x \perp N_x$. Отсюда

$$(A_a, A_p) = 0, \tag{41}$$

где круглые скобки означают скалярное произведение точек бесконечно удаленной гиперплоскости $\mathbb{P}_\infty$. Формулы

$$(A_a, A_b) = g_{ab}, \ \ (A_p, A_q) = g_{pq} \tag{42}$$

определяют невырожденные симметрические тензоры g_{ab} и g_{pq}.

Дифференцируя соотношения (41) и используя формулы (35), (41) и (42), находим

$$g_{ab}\, \omega_p^b + g_{pq}\, \omega_a^q = 0.$$

Отсюда следует

$$\omega_a^p = -g^{pq}\, g_{ab}\, \omega_q^b.$$

Из уравнений (40) и (19), где b_{pq}^q — второй фундаментальный тензор многообразия X, следует

$$\omega_a^p = -g^{pq}\, g_{ac}\, b_{qs}^c \omega^s. \tag{43}$$

Сравнивая (43) и (21), получаем

$$c_{as}^p = -g^{pq}\, g_{ac}\, b_{qs}^c. \tag{44}$$

В соответствии с (23) и (44) для фокусной гиперповерхности F_x многообразия $X \in \mathbb{E}^n$ имеем уравнение

$$\det(y^0 \delta_q^p - y^a g^{ps} g_{ac} b_{sq}^c) = 0,$$

которое эквивалентно уравнению

$$\det(y^0 g_{pq} - y_a b_{pq}^a) = 0, \tag{45}$$

где $y_a = g_{ab} y^b$.

В рассматриваемом подвижном репере бесконечно удаленная гиперплоскость $\mathbb{P}_\infty$ определяется уравнением $y^0 = 0$. Поэтому в соответствии с (45) пересечение $F_x \cap \mathbb{P}_\infty$ фокусной гиперповерхности F_x с бесконечно удаленной гиперплоскостью $\mathbb{P}_\infty$ задается уравнением

$$\det(y_a b^a_{pq}) = 0. \tag{46}$$

Но это уравнение лишь обозначениями отличается от уравнения (37) фокусного гиперконуса Φ_x многообразия X. Уравнения (37) и (46) совпадают, если $\xi_a = y_a = g_{ab} y^b$.

Последнее соотношение определяет поляритет в подпространстве N'_x относительно мнимой квадрики $g_{ab} y^a y^b = 0$, который точке $y \in N'_x$ ставит в соответствие $(l-2)$-мерное подпространство η, также принадлежащее подпространству N'_x. Подпространство η вместе с подпространством T_x определяет гиперплоскость ξ, являющуюся линейной оболочкой подпространств T_x и η.

В результате получена

Теорема 8. *Фокусный гиперконус Φ_x многообразия $X \subset \mathbb{E}^n$ образован гиперплоскостями ξ, которые являются линейными оболочками подпространств T_x и η, где $\eta \subset N'_x$ — $(l-2)$-мерные подпространства, полярные точкам $y \in F_x \cap N'_x$ относительно абсолюта пространства N'_x, определяемого уравнением $g_{ab} y^a y^b = 0$.*

Этот результат проясняет геометрический смысл фокусного гиперконуса Φ_x для многообразия $X \subset \mathbb{E}^n$ и его связь с фокусной гиперповерхностью F_x многообразия X.

Найдем еще тензор кривизны аффинной связности, индуцированной на многообразии $X \subset \mathbb{E}^n$. Для этого подставим в формулу (38) значения c^p_{aq}, определяемое формулой (44). В результате получаем

$$R^p_{qst} = g^{pu} g_{ac} (b^a_{qt} b^c_{us} - b^a_{qs} b^c_{ut}). \tag{47}$$

Свертывая выражение (47) с тензором g_{pv}, имеем

$$R_{pqst} = g_{ac} (b^a_{ps} b^c_{qt} - b^a_{pt} b^c_{qs}), \tag{48}$$

где $R_{pqst} = g_{pu} R^u_{qst}$. Формулы (47) и (48) представляют собой обычные выражения тензора кривизны аффинной связности γ_t, индуцированной на многообразии $X \subset \mathbb{E}^n$.

Однако помимо тензора кривизны аффинной связности, индуцированной на многообразии $X \subset \mathbb{E}^n$, мы рассматривали также тензор нормальной кривизны R^a_{bst}, определенный уравнениями (28). Подставляя в формулу (28) значения c^p_{aq} из (44), получим

$$R^a_{bst} = g^{pq} g_{bc} (b^c_{qt} b^a_{ps} - b^c_{qs} b^a_{pt}).$$

Как было отмечено выше, внешняя 2-форма

$$\Omega^a_b = d\omega^a_b - \omega^c_b \wedge \omega^a_c = \tfrac{1}{2} R^a_{bst} \omega^s \wedge \omega^t$$

называется в [6] *гауссовым кручением* многообразия $X \subset \mathbb{E}^n$.

Литература

1. Фиников С.П. *Теория конгруэнций.* – М.–Л.: ГИТТЛ, 1950. – 528 с.
2. Akivis M.A., Goldberg V.V. *Differential geometry of varieties with degenerate Gauss maps.* – New York: Springer-Verlag, 2004. – 276 p.
3. Akivis M.A., Goldberg V.V. *Projective differential geometry of submanifolds.* – Amsterdam: North-Holland, 1993. – 374 p.
4. Норден А.П. *Пространства аффинной связности.* – М.: Наука, 1976. – 432 с.
5. Kobayashi S., Nomizu K. *Foundations of differential geometry.* – V. 1. New York–London: Interscience Publishers, John Wiley & Sons, Inc., 1963. – 340 p.
6. Cartan É. *Riemannian geometry in an orthogonal frame.* – River Edge, NJ: World Sci. Publ. Co., Inc., 2001. – 277 p.

7. Akivis M.A., Goldberg V.V. *Normal connections of a submanifold in a projective space* // Proc. of the Conference on Differential Geometry, Hamiltonian Systems and Operator Theory (Univ. of West Indies, Mona Campus, Jamaica, Feb. 7–11, 1994), 1995. – P. 137–158.
8. Атанасян Л.С. *Оснащенные многообразия частного вида в многомерном аффинном пространстве* // Тр. семин. по векторн. и тензорн. анализу. – М.: МГУ. – 1952. – Т. 9. – С. 351–410.
9. Акивис М.А., Чакмазян А.В. *Об оснащенных подмногообразиях аффинного пространства, допускающих параллельное нормальное векторное поле* // ДАН АрмССР. – 1975. – Т. 60. – № 3. – С. 137–143.
10. Акивис М.А., Чакмазян А.В. *О подмногообразиях евклидова пространства с плоской нормальной связностью* // ДАН АрмССР. – 1976. – Т. 62. – № 2. – С. 75–81.
11. Akivis M.A., Chakmazyan A.V. *Dual-normalized submanifolds and hyperbands of curvature* // Rend. Semin. matem. Messina. – 2001–2002. – Ser. II. – V. 8. – P. 13–23.
12. Чакмазян А.В. *Нормализованное по Нордену подмногообразие в* P^n *с параллельным нормальным подрасслоением* // Матем. заметки. – 1977. – Т. 22. – № 5. – С. 649–662.
13. Чакмазян А.В. *Связность в нормальных расслоениях нормализованного подмногообразия* V^m *в* P^n // Итоги науки и техн. Пробл. геометрии. – М.: ВИНИТИ, 1978. – Т. 10. – С. 55–74.
14. Чакмазян А.В. *Нормальные связности в геометрии подмногообразий.* – Ереван: Изд-во Армянск. гос. пед. инст., 1990. – 116 с.

Примечание к пп. 1, 5 и 6 литературы

1. Имеется немецкий перевод, сделанный Г. Болем: Akademie-Verlag, 1959. – 506 p.

5. Имеется русский перевод, выполненный Л.В.Сабининым: М.: Наука, 1981. – 344 с.

6. Эта книга является переводом на английский язык, выполненным В.В. Гольдбергом, одноименной книги, изданной в 1960 г. на русском языке. М.: Изд-во МГУ, 1960. – 307 с.

Иерусалимский технологический колледж Махон-Лев (*Израиль*)

Технологический институт (*Ньюарк, штат Нью-Джерси, США*)

Армянский государственный педагогический институт (*Ереван, Армения*)

Поступила
24.09.2003