ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2005 МАТЕМАТИКА № 3 (514)

УДК 517.968:519.6

А.В. ОЖЕГОВА

О РАВНОМЕРНОЙ СХОДИМОСТИ ПРИБЛИЖЕННЫХ РЕШЕНИЙ СЛАБОСИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ I РОДА

Работа посвящена решению интегрального уравнения I рода с разностным логарифмическим ядром в главной части интегрального оператора и с неопределенным параметром. С использованием подходов, предложенных в [1] и [2], вводится пара пространств искомых элементов и правых частей, в которых устанавливается корректность рассматриваемой задачи.

Выбранные пространства в отличие от пространств, рассмотренных в [3], при теоретическом обосновании в них аппроксимативных методов позволяют получать равномерные оценки погрешностей.

Корректность задачи. Рассмотрим слабосингулярное интегральное уравнение вида

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{+1}\rho(\tau)\ln|\tau-t|x(\tau)d\tau+\lambda+V(x;t)=y(t),\quad t\in[-1,1],\tag{1}$$

где $y(t)$ — данная, $x(t)$ — искомая функции, λ — искомый параметр, $\rho(\tau)=\sqrt{\frac{1\mp\tau}{1\pm\tau}}$, V — вполне непрерывный оператор, а слабосингулярный интеграл понимается как несобственный.

Пусть

$$Ix=I(x;t)=\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{+1}\frac{x(\tau)}{\tau-t}d\tau,\quad t\in(-1,1),$$

— сингулярный интеграл с ядром Коши, понимаемый в смысле главного значения по Коши. Обозначим через $V_\rho=V_\rho[-1,1]$ линейное пространство непрерывных функций $x(t)$, для которых сингулярный интеграл $I(\rho x)$ является непрерывной функцией, с нормой $\|x\|_{V_\rho}=\frac{1}{2}\{\|x\|_C+\|I(\rho x)\|_C\}$, где $\|x\|_C=\max\limits_{-1\leqslant t\leqslant 1}|x(t)|$. Пусть $V_q^1=V_q^1[-1,1]$ — линейное пространство непрерывно дифференцируемых функций $x(t)$, для которых $x'(t)$ и сингулярный интеграл $I(qx';t)$ также непрерывны. Норму определим следующим образом:

$$\|x\|_{V_q^1}=\|x\|_C+\|x'\|_C+\|I(qx')\|_C,\tag{2}$$

где $q(t)=1/\rho(t)$ — весовая функция.

Следуя [2], можно показать, что введенные пространства являются полными.

Через $\overline{X}=X\oplus\mathbb{R}$ обозначим пространство вектор-функций $\overline{x}(t)=\{x(t);\lambda\}$ с компонентами $x\in X=V_\rho$, $\lambda\in\mathbb{R}$, нормой

$$\|\overline{x}\|_{\overline{X}}=\|x\|_{V_\rho}+|\lambda|\tag{3}$$

и положим $Y=V_q^1[-1,1]$.

Рассмотрим соответствующее уравнению (1) характеристическое уравнение

$$S\overline{x}\equiv\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{+1}\rho(\tau)\ln|\tau-t|x(\tau)d\tau+\lambda=y(t),\quad x\in X,\quad y\in Y,\quad \lambda\in\mathbb{R}.\tag{4}$$

Пусть $R_n(t)$ и $Q_n(t)$ — полиномы n-й степени из системы полиномов, ортогональных соответственно с весами $\rho(t)$ и $q(t)$ на отрезке $[-1,1]$, а $c_k^R(x)$, $c_k^Q(x)$ — коэффициенты Фурье функции $x\in L_1[-1,1]$ по системам полиномов $\{R_n(t)\}_0^\infty$ и $\{Q_n(t)\}_0^\infty$.

Теорема 1. *Оператор* $S : \overline{X} \to Y$ *непрерывно обратим, и решение* $\overline{x} = \{x(t); \lambda\}$ *уравнения* (4) *может быть найдено по формулам*

$$x(t) = -\sum_{k=0}^{\infty} c_k^Q(y') R_k(t),$$
$$\lambda = \frac{1}{2}[2c_0^Q(y) + (1 - 2\ln 2)c_0^Q(y') - c_1^Q(y')], \tag{5}$$

при этом

$$\|S^{-1}\|_{Y \to \overline{X}} < 2{,}5. \tag{6}$$

Доказательство. Дифференцируя уравнение (4), получим

$$-\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{+1} \rho(\tau)\frac{1}{\tau - t}x(\tau)d\tau = y'(t), \quad t \in (-1, 1).$$

Умножим обе части последнего уравнения на функцию $\frac{1}{\pi}q(t)Q_k(t)$, проинтегрируем по переменной t и поменяем порядок интегрирования в левой части. В результате получим

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{+1} \rho(\tau)x(\tau)\Big[-\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{+1} q(t)\frac{1}{\tau - t}Q_k(t)dt\Big]d\tau = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{+1} q(t)y'(t)Q_k(t)dt.$$

Воспользовавшись известным соотношением $I(qQ_k; t) = R_k(t)$, получаем

$$-\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{+1} \rho(\tau)x(\tau)R_k(\tau)d\tau = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{+1} q(t)y'(t)Q_k(t)dt,$$

следовательно,

$$-c_k^R(x) = c_k^Q(y'). \tag{7}$$

Поэтому первую компоненту $x(t)$ решения $\overline{x}(t)$ уравнения (4) можно представить в виде

$$x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k^R R_k(t) = -\sum_{k=0}^{\infty} c_k^Q(y')R_k(t).$$

Умножим обе части уравнения (4) на $\frac{1}{\pi}q(t)$, проинтегрируем по переменной t, поменяем порядок интегрирования и учтем, что $\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{+1} q(t)dt = 1$. В результате получим

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{+1} \rho(\tau)x(\tau)\Big[\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{+1} q(t)\ln|\tau - t|dt\Big]d\tau + \lambda = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{+1} q(t)y(t)dt.$$

В силу известных соотношений

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{+1} \sqrt{\frac{1 \pm t}{1 \mp t}}\ln|\tau - t|dt = -\ln 2 \mp \tau$$

и соответствующих видов $R_1(t) = 2t \pm 1$, $\rho(t) = \sqrt{\frac{1 \mp t}{1 \pm t}}$ имеем

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{+1} \sqrt{\frac{1 \mp \tau}{1 \pm \tau}}(\mp\tau - \ln 2)x(\tau)d\tau + \lambda = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{+1} \sqrt{\frac{1 \pm t}{1 \mp t}}y(t)dt,$$

отсюда

$$\lambda = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{+1} \sqrt{\frac{1 \pm t}{1 \mp t}}y(t)dt + \frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{+1} \sqrt{\frac{1 \mp \tau}{1 \pm \tau}}(\pm 2\tau + 1)x(\tau)d\tau + \frac{\ln 2 - 1}{2\pi}\int_{-1}^{+1} \sqrt{\frac{1 \mp \tau}{1 \pm \tau}}x(\tau)d\tau,$$

т. е.

$$\lambda = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{+1} q(t)y(t)dt + \frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{+1} \rho(\tau)R_1(\tau)x(\tau)d\tau + \frac{\ln 2 - 1}{2\pi}\int_{-1}^{+1} \rho(\tau)x(\tau)d\tau.$$

Таким образом, имеем

$$\lambda = c_0^Q(y) + \frac{1}{2}c_1^R(x) + \frac{\ln 2 - 1}{2}c_0^R(x),$$

и с учетом (7) соотношение (5) доказано.

Оценим норму обратного оператора. Используя определение нормы (3), представление первой компоненты решения уравнения (4) в интегральной форме

$$x(t) = -\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{+1} \frac{q(\tau)y'(\tau)}{\tau - t}d\tau$$

и формулу обращения сингулярного интеграла с ядром Коши на отрезке [4], имеем

$$\|\overline{x}\|_{\overline{X}} = 1/2\{\|x\|_C + \|I\rho x\|_C\} + |\lambda| = 1/2\{\|I(qy')\|_C + \|y'\|_C\} + |\lambda|. \tag{8}$$

Оценим

$$|\lambda| \leqslant \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{+1} q(t)|y(t)|dt + \frac{2\ln 2 - 1}{2\pi}\int_{-1}^{+1} |q(t)y'(t)|dt + \frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{+1} q(t)|Q_1(t)||y'(t)|dt \leqslant$$
$$\leqslant \|y\|_C + \frac{2\ln 2 - 1}{2}\|y'\|_C + 1{,}5\|y'\|_C \leqslant \|y\|_C + (\ln 2 + 1)\|y'\|_C < \|y\|_C + 2\|y'\|_C.$$

Подставляя эту оценку в (8), получим

$$\|\overline{x}\|_{\overline{X}} \leqslant \|y\|_C + 2\|y'\|_C + \frac{1}{2}\|Iqy'\|_C + \frac{1}{2}\|y'\|_C = \|y\|_C + 2{,}5\|y'\|_C + \|Iqy'\|_C < 2{,}5\|y\|_Y.$$

Таким образом, $\|S^{-1}y\|_{\overline{X}} = \|\overline{x}\|_{\overline{X}} < 2{,}5\|y\|_Y$, откуда следует оценка (6). $\square$

В силу теоремы 1 и известных результатов для операторных уравнений, приводящихся к уравнениям второго рода в банаховых пространствах, справедлива

Теорема 2. *Пусть оператор $V : \overline{X} \to Y$ вполне непрерывен и однородное уравнение, соответствующее уравнению* (1), *имеет в $\overline{X}$ лишь тривиальное решение. Тогда оператор $K = S + V : \overline{X} \to Y$ непрерывно обратим.*

Общий прямой метод. Обозначим через H_n множество всех алгебраических полиномов степени не выше n. Пусть $X_n = H_n \cap X$, $Y_n = H_{n+1} \cap Y$, $\overline{X}_n = X_n \oplus \mathbb{R}$ с нормами соответственно пространств X, Y, $\overline{X}$.

Приближенное решение уравнения (2) будем искать в виде вектор-функции

$$\overline{x}_n = (x_n, \lambda_n), \quad x_n = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k R_k(t), \quad \lambda_n \in \mathbb{R}. \tag{9}$$

Определим его как точное решение конечномерного уравнения

$$K_n\overline{x}_n \equiv S_n x_n + \lambda_n + V_n x_n = y_n, \tag{10}$$

где $y_n \in Y_n$ и $S_n, V_n : X_n \to Y_n$ — некоторые аппроксимации соответственно функций $y = y(t) \in Y$и операторов $S, V : X \to Y$. Уравнение (10) эквивалентно системе линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) порядка $n + 2$ относительно коэффициентов $\alpha_0, \dots, \alpha_n$ первой компоненты решения и λ_n.

На основании теоремы 7 ([5], гл. 1) для доказательства однозначной разрешимости операторного уравнения (10) и равномерной сходимости приближенных решений к точному достаточно показать

$$\|K - K_n\|_{\overline{X}_n \to Y} \to 0, \quad n \to \infty \quad \text{и} \quad \|y - y_n\|_Y \to 0, \quad n \to \infty.$$

Решим исходное уравнение методом ортогональных многочленов. Приближенное решение будем искать в виде (9), а неизвестные коэффициенты α_k, $k=\overline{0,n}$, и λ найдем из следующей СЛАУ:

$$\alpha_0 \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{+1} q(t)Q_j(t)(-\ln 2 \pm t)dt +$$

$$+\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\left[\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{+1} q(t)Q_j(t)\left(-\frac{T_{k-1}(t)}{k-1} \pm \frac{T_{k+1}(t)}{k+1}\right)dt + \sum_{k=0}^{n}\alpha_k\nu_{kj}\right] + \lambda_j = y_j, \quad j=\overline{0,n+1}, \qquad (11)$$

где $y_j = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{+1} q(t)Q_j(t)y(t)dt$, $\lambda_j = \frac{\lambda}{\pi}\int\limits_{-1}^{+1} q(t)Q_j(t)dt$, $\nu_{kj} = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{+1} q(t)Q_j(t)V(R_k;t)dt$, $T_k(t)$ — полиномы Чебышева I рода k-го порядка. Запишем (11) в операторном виде

$$K_n\overline{x}_n \equiv P_nK\overline{x}_n = Sx_n + P_nVx_n + \lambda_n = P_ny, \quad \overline{x}_n \in \overline{X}_n, \quad P_ny \in Y_n,$$

где P_n — оператор, который ставит в соответствие функции $y \in L_1[-1,1]$ ее $(n+1)$-й отрезок ряда Фурье по полиномам $Q_j(t)$.

Легко показать, что система (11) однозначно разрешима, начиная с некоторого n, и для погрешности справедлива оценка

$$\|\overline{x}^* - \overline{x}^*_n\|_{\overline{C}} = O\{\|P_n\|_Y E_n(x^*)_X\},$$

где $\overline{C} = C \oplus R$, а x^* — первая компонента точного решения уравнения (1).

Литература

1. Габдулхаев Б.Г. *Прямые методы решения сингулярных интегральных уравнений* I *рода.* – Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1994. – 288 с.
2. Ожегова А.В. *Равномерные приближения решений слабо сингулярных интегральных уравнений первого рода*: Дисс. ... канд. физ.-матем. наук. – Казань, 1996. – 92 с.
3. Габдулхаев Б.Г., Ожегова А.В. *Методы решения слабосингулярного интегрального уравнения первого рода с неопределенными параметрами* // Проблемы современной математики: Материалы научной конференции, посвященной 125-летию Казанск. гос. пед. ун-та (22–24 октября 2001). – Казань, Изд-во Унипресс, 2001. – С. 52–57.
4. Гахов Ф.Д. *Краевые задачи.* – М.: Наука, 1977. – 640 с.
5. Габдулхаев Б.Г. *Оптимальные аппроксимации решений линейных задач.* – Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1980. – 232 с.

Казанский государственный университет

Поступила
16.10.2002