ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2000 МАТЕМАТИКА № 8 (459)

УДК 517.521

В.А. КАКИЧЕВ, НГУЕН СУАН ТХАО

БАЗИСНЫЙ АНАЛОГ H-ФУНКЦИИ ОДНОЙ И ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ

Введение

Базисный аналог H-функции многих переменных схематично построен в работе Нгуен Суан Тхао [1]. Поэтому в п. 1 данной статьи более детально изучается базисная H-функция двух переменных, а в п. 2 приведены соответствующие факты для базисной H-функции одной переменной.

Базисные H-функции определяются интегралами Меллина–Барнса, ядрами которых являются произведения степеней q-гамма-функций [2]–[7]. Для базисных H-функций получены: достаточные условия сходимости, интегральные связи, смежные соотношения и некоторые другие формулы. Приведены примеры.

1. Базисный аналог H-функции двух переменных

Определение 1. Базисные H-функции двух переменных определим двукратным интегралом Меллина–Барнса [8]:

$$H_q(x,y \mid p,\overline{m},\overline{\alpha},\overline{a},\overline{b}) = -\frac{1}{(2\pi)^2}\int_{L_s}\int_{L_t}\prod_{i=1}^{n}\Gamma_q^{m_i}(\alpha_i + a_i s + b_i t)\frac{x^s}{\sin(\pi s)}\frac{y^t}{\sin(\pi t)}ds\,dt, \tag{1.1}$$

в котором $|q| < 1$, p — натуральное число,

$$\overline{m} = (m_1, m_2, \dots, m_p), \quad \overline{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p), \quad \overline{a} = (a_1, a_2, \dots, a_p), \quad \overline{b} = (b_1, b_2, \dots, b_p),$$

где m_i — целые, α_i — комплексные, a_i и b_i — действительные числа;

$$(a,q)_\infty = \prod_{n=0}^{\infty}(1 - aq^n), \quad \Gamma_q(\sigma) = \frac{(q,q)_\infty}{(q^s,q)_\infty}(1-q)^{1-\sigma}$$

— q-гамма-функция.

Контур интегрирования L_s (соответственно L_t) идет от $-i\infty$ до $i\infty$ так, что полюсы функций $\Gamma_q^{m_i}(\alpha_i + a_i s + b_i t)$ с $m_i > 0$, $a_i < 0$ (соответственно $\Gamma_q^{m_i}(\alpha_i + a_i s + b_i t)$ с $m_i > 0$, $b_i < 0$) лежат справа от контура, а полюсы функций $\Gamma_q^{m_j}(\alpha_j + a_j s + b_j t)$ с $m_j > 0$, $a_j < 0$, $i = \overline{1,p}$, $j = \overline{1,p}$ (соответственно $\Gamma_q^{m_j}(\alpha_j + a_j s + b_j t)$ с $m_j > 0$, $b_j > 0$) лежат слева и находятся по крайней мере на некотором расстоянии $\varepsilon > 0$ от контуров.

Частными случаями базисных H-функций двух переменных являются, например, H-функции [8]–[10] и G-функции [11]–[13] двух переменных.

В качестве иллюстрации приведем

Пример 1. Пусть $m_i = 1, i = \overline{1, n_1}, a_i = \zeta_i > 0, b_i = 0, \alpha_i = 1 - c_i; m_{j+n_1} = 1, j = \overline{1, m_1}, \alpha_{j+n_1} = d_j$, $a_{j+n_1} = -\beta_j < 0$, $b_{j+n_1} = 0$; $m_{m_1+k} = -1$, $\alpha_{m_1+k} = c_k$, $a_{m_1+k} = -\zeta_k < 0$, $b_{m_1+k} = 0$, $k = \overline{1+n_1, A}$; $m_{m_1+1+A} = -1$, $\alpha_{m_1+1+A} = 1$, $a_{m_1+1+A} = -1$, $b_{m_1+1+A} = 0$; $m_{1+A+j} = -1$, $\alpha_{1+A+j} = 1 - d_j$, $a_{1+A+j} = \beta_k > 0$, $b_{1+A+j} = 0$, $j = \overline{1+m_1, B}$; $m_{1+A+B+i} = 1$, $i = \overline{1, n_2}$, $\alpha_{1+A+B+i} = 1 - e_i$, $a_{1+A+B+i} = 0$, $b_{1+A+B+i} = \gamma_i > 0$; $m_{1+A+B+n_2+j} = 1$, $j = \overline{1, m_2}$, $\alpha_{1+A+B+n_2+j} = f_j$, $a_{1+A+B+n_2+j} = 0$, $b_{1+A+B+n_2+j} = -\eta_j < 0$; $m_{1+A+B+m_2+k} = -1$, $k = \overline{1+n_2, C}$, $\alpha_{1+A+B+m_2+k} = e_k$, $a_{1+A+B+m_2+k} = 0$, $b_{1+A+B+m_2+k} = -\gamma_k < 0$; $m_{1+A+B+m_2+C+1} = -1$, $\alpha_{1+A+B+m_2+C+1} = 1$, $a_{1+A+B+m_2+C+1} = 0$, $b_{1+A+B+m_2+C+1} = -1$; $m_{2+A+B+C+i} = -1$, $i = \overline{1+m_2, D}$, $\alpha_{2+A+B+C+i} = 1 - f_i$, $a_{2+A+B+C+i} = 0$, $b_{2+A+B+C+i} = \eta_i > 0$; $p = A + B + C + D + 2$; $C = E(1-q)^{n_1+n_2-m_1-m_2-A-C-2+\sum_{i=1}^{A+B+1} a_i \operatorname{sign}(m_i) + \sum_{j=1}^{C+D+1} b_j \operatorname{sign}(m_j)}$, $E = [(q;q)_\infty]^{A+B+C+2-2m_1-2m_2-2n_1-2n_2}$, тогда

$$CH_q\left(x(1-q)^{\sum_{i=1}^{A+B+1} a_i \operatorname{sign}(m_i)},\ y(1-q)^{\sum_{j=1}^{C+D+1} b_j \operatorname{sign}(m_j)}\big|_{p,\overline{m},\overline{\alpha},\overline{a},\overline{b}}\right) =$$

$$= H_{A,B}^{m_1,n_1}\left[x;q \,\middle|\, \begin{matrix} (c_1,\zeta_1),\ldots,(c_A,\zeta_A) \\ (d_1,\beta_1),\ldots,(d_B,\beta_{B_1}) \end{matrix}\right] H_{C,D}^{m_2,n_2}\left[y;q \,\middle|\, \begin{matrix} (e_1,\gamma_1),\ldots,(e_A,\gamma_A) \\ (f_1,\eta_1),\ldots,(f_B,\eta_{B_1}) \end{matrix}\right].$$

Функции вида $H_{A,B}^{m,n}$ определены в [14], [15].

Если, кроме этого, $\zeta_i = 1$, $\beta_j = 1$, $i = \overline{1, A}$, $j = \overline{1, B}$, $\gamma_k = 1$, $\eta_h = 1$, $k = \overline{1, C}$, $h = \overline{1, D}$, то

$$CH_q(x(1-q)^{A-B+1},\ y(1-q)^{C-D+1}\big|_{p,\overline{m},\overline{\alpha},\overline{a},\overline{b}}) = G_{A,B}^{m_1,m_1}\left[x;q \,\middle|\, \begin{matrix} c_1,\ldots,c_A \\ d_1,\ldots,d_B \end{matrix}\right] G_{C,D}^{m_2,m_2}\left[y;q \,\middle|\, \begin{matrix} e_1,\ldots,e_C \\ f_1,\ldots,f_D \end{matrix}\right].$$

Функции вида $G_{A,B}^{m,n}$ введены в [14], [16].

Теорема 1.1. *Базисная H-функция двух переменных* (1.1) *сходится, если* (*ср.* [14], [15])

$$|\arg x| < \pi, \quad |\arg y| < \pi. \tag{1.2}$$

Кроме этого, пусть $m_i = 1$, $b_i = A_i$, $i = \overline{1, m}$, $m_{m+j} = -1$, $\alpha_{m+j} = \beta_j$, $a_{m+j} = c_j$, $b_{m+j} = C_j$, $j = \overline{1, n}$, $m_{m+n+k} = -1$, $k = \overline{1, 4}$, $\alpha_{m+n+1} = 0$, $a_{m+n+1} = 1$, $b_{m+n+1} = 0$, $\alpha_{m+n+2} = 1$, $a_{m+n+2} = -1$, $b_{m+n+2} = 0$, $\alpha_{m+n+3} = 0$, $a_{m+n+3} = 0$, $b_{m+n+3} = 1$, $\alpha_{m+n+4} = 1$, $a_{m+n+4} = 0$, $b_{m+n+4} = -1$, $p = m + n + 4$, тогда справедливо следующее предельное равенство:

$$\lim_{q\to 1_-} H_q(x, y \mid p, \overline{m}, \overline{\alpha}, \overline{a}, \overline{b}) = H(x, y; (\alpha, a, A)_m; (\beta, c, C)_n),$$

в котором $H(x, y; (\alpha, a, A)_m; (\beta, c, C)_n)$ является H-функцией двух переменных [9], [11].

Теорема 1.2. *В условиях* (1.2) *справедливы равенства*

а)

$$\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} x^{s-1} y^{t-1} H_q(zx, wy \mid p, \overline{m}, \overline{\alpha}, \overline{a}, \overline{b}) dx\, dy =$$

$$= \frac{z^{-s} w^{-t}}{\sin(\pi s)\sin(\pi t)} \prod_{i=1}^{p} \Gamma_q^{m_i}(\alpha_i - a_i s - b_i t), \quad 0 < \operatorname{Re} s < 1, \quad 0 < \operatorname{Re} t < 1;$$

б)

$$\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} x^{-1/2} y^{-1/2} H_q(x, y \mid p_1, \overline{m}_1, \overline{\alpha}_1, \overline{a}_1, \overline{b}_1) H_q(zx, wy \mid p_2, \overline{m}_2, \overline{\alpha}_2, \overline{a}_2, \overline{b}_2) dx\, dy =$$

$$= z^{-1/2} w^{-1/2} H_q(z^{1/2}, w^{1/2} \mid p_1 + p_2, \overline{m}_1, \overline{\alpha}_1, -\tfrac{1}{2}\overline{a}_1, -\tfrac{1}{2}\overline{b}_1; \overline{m}_2, \overline{\alpha}_2 - \tfrac{1}{2}\overline{a}_2 - \tfrac{1}{2}\overline{b}_2, \tfrac{1}{2}\overline{a}_2, \tfrac{1}{2}\overline{b}_2). \tag{1.3}$$

Докажем, например, утверждение б). Из асимптотической оценки для H-функции ([17], с. 278) следует, что

$$H_q(x, y \mid p, \overline{m}, \overline{\alpha}, \overline{a}, \overline{b}) \to C \ \text{ при } \ x \to 0, \ \ y \to 0,$$
$$H_q(x, y \mid p, \overline{m}, \overline{\alpha}, \overline{a}, \overline{b}) = O(|x|^{-1}|y|^{-1}) \ \text{ при } \ x \to +\infty, \ \ y \to +\infty.$$

Условие (1.2) обеспечивает абсолютную сходимость $H_q(zx, wy \mid p_2, \overline{m}_2, \overline{\alpha}_2, \overline{a}_2, \overline{b}_2)$ и интеграла (1.3). Отсюда и в силу утверждения а) имеем

$$\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} x^{-1/2}y^{-1/2}H_q(x, y \mid p_1, \overline{m}_1, \overline{\alpha}_1, \overline{a}_1, \overline{b}_1)H_q(zx, wy \mid p_2, \overline{m}_2, \overline{\alpha}_2, \overline{a}_2, \overline{b}_2)dx\,dy =$$
$$= -\frac{1}{(2\pi)^2}\int_{L_s}\int_{L_t}\prod_{i=1}^{p_1}\Gamma_q^{m_i}(\alpha_{1i} + a_{1i}s + b_{1i}t)\Big\{\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} x^{1/2+s-1}y^{1/2+t-1} \times$$
$$\times H_q(zx, wy \mid p_2, \overline{m}_2, \overline{\alpha}_2, \overline{a}_2, \overline{b}_2)dx\,dy\Big\}\frac{ds\,dt}{\sin(\pi s)\sin(\pi t)} =$$
$$= -\frac{1}{(2\pi)^2}\int_{L_s}\int_{L_t}\prod_{i=1}^{p_1}\Gamma_q^{m_i}(\alpha_{1i} + a_{1i}s + b_{1i}t)\prod_{j=1}^{p_2}\Gamma_q^{m_j}(\alpha_{2j} - a_{2j}(\tfrac{1}{2} + s) - b_{2j}(\tfrac{1}{2} + t)) \times$$
$$\times \frac{z^{-s-1/2}w^{-t-1/2}}{\sin(\pi s)\sin(\pi t)\sin\pi(s + 1/2)\sin\pi(t + 1/2)}ds\,dt =$$
$$= \frac{z^{-1/2}w^{-1/2}}{-\pi^2}\int_{L_s}\int_{L_t}\prod_{i=1}^{p_1}\Gamma_q^{m_i}(\alpha_{1i} - a_{1i}s - b_{1i}t)\prod_{j=1}^{p_2}\Gamma_q^{m_j}(\alpha_{2j} - \tfrac{1}{2}a_{2j} - \tfrac{1}{2}b_{2j} - a_{2j}s - b_{2j}t) \times$$
$$\times \frac{z^{-s}w^{-t}}{\sin(2\pi s)\sin(2\pi t)}ds\,dt =$$
$$= \frac{z^{-1/2}w^{-1/2}}{(2\pi i)^2}\int_{L_s}\int_{L_t}\prod_{i=1}^{p_1}\Gamma_q^{m_i}(\alpha_{1i} - \tfrac{1}{2}a_{1i}s - \tfrac{1}{2}b_{1i}t)\prod_{j=1}^{p_2}\Gamma_q^{m_j}(\alpha_{2j} - \tfrac{1}{2}a_{2j} - \tfrac{1}{2}b_{2j} + \tfrac{1}{2}a_{2j}s + \tfrac{1}{2}b_{2j}t) \times$$
$$\times \frac{z^{s/2}w^{t/2}}{\sin(\pi s)\sin(\pi t)}ds\,dt.$$

Из (1.1) и формул (1.10.5), (1.10.9), (1.10.11) из ([18], с. 38) вытекает

Теорема 1.3. *Имеют место равенства*

а) $x^{-k}y^{-h}H_q(x, y \mid p, \overline{m}, \overline{\alpha}, \overline{a}, \overline{b}) = (-1)^{k+h}H_q(x, y \mid p, \overline{m}, \overline{\alpha} + k\overline{a} + h\overline{b}, \overline{a}, \overline{b})$, k, h — *целые числа;*

б) $q^{\alpha_k}H_q(q^{\alpha_k}x, q^{b_k}y \mid p, \overline{m}, \overline{\alpha}, \overline{a}, \overline{b}) = H_q(x, y \mid p, \overline{m}, \overline{\alpha}, \overline{a}, \overline{b}) + (q - 1)H_q(x, y \mid p, \overline{m}, \overline{\alpha}, \overline{a}, \overline{b}; 1, -1, \alpha_k, a_k, b_k; 1, 1, 1 + \alpha_k, a_k, b_k)$, *где* $m_k > 0$, $k = \overline{1, p}$;

в) $q^{\alpha_k - 1}H_q(q^{\alpha_k}x, q^{b_k}y \mid p, \overline{m}, \overline{\alpha}, \overline{a}, \overline{b}) = H_q(x, y \mid p, \overline{m}, \overline{\alpha}, \overline{a}, \overline{b}) + (q - 1)H_q(x, y \mid p, \overline{m}, \overline{\alpha}, \overline{a}, \overline{b}; 1, 1, \alpha_k, a_k, b_k; 1, -1, \alpha_k - 1, a_k, b_k)$, *где* $m_k < 0$, $k = \overline{1, p}$;

г) $H_q(x, y \mid p, \overline{m}, 2\overline{\alpha}, 2\overline{a}, 2\overline{b}) = (1 + q)^{\sum_{i=1}^p m_i(2\alpha_i - 1)}\Gamma_{q^2}^{-\sum_{i=1}^p m_i}(\tfrac{1}{2})H_{q^2}\Big(x(1 + q)^{2\sum_{i=1}^p a_i m_i},$

$$y(1 + q)^{2\sum_{i=1}^p b_i m_i} \mid 2p, \overline{m}, \overline{\alpha}, \overline{a}, \overline{b}; \overline{\alpha} + 1/2, \overline{a}, \overline{b}\Big);$$

д) *если* $n > 2$, $r = q^n$, *то*

$$H_q(x, y \mid p, \overline{m}, n\overline{\alpha}, n\overline{a}, n\overline{b}) = \left(\frac{1 - r}{1 - q}\right)^{\sum_{i=1}^p m_i(n\alpha_i - 1)}\left[\Gamma_r\left(\frac{1}{n}\right)\ldots\Gamma_r\left(\frac{n - 1}{n}\right)\right]^{-\sum_{i=1}^p m_i} \times$$
$$\times H_r\left(x\left(\frac{1 - r}{1 - q}\right)^{\sum_{i=1}^p m_i a_i}, \ y\left(\frac{1 - r}{1 - q}\right)^{\sum_{i=1}^p m_i b_i}\Big| np, \overline{m}, \overline{\alpha}, \overline{a}, \overline{b}; \overline{m}, \overline{\alpha}{+}1/n, \overline{a}, \overline{b}; \ldots; \overline{m}, \overline{\alpha}{+}(n{-}1)/n, \overline{a}, \overline{b}\right).$$

Теорема 1.4. *Пусть $H_q(\alpha_j \pm 1)$ является базисным аналогом H-функции, получающимся из формулы* (1.1), *если в ее правой части множитель* $\Gamma_q^{m_j}(\alpha_j + a_j s + b_j t)$ *заменяется произведением* $\Gamma_q^{\operatorname{sign}(m_j)}(\alpha_j \pm 1 + a_j s + b_j t)\Gamma_q^{m_j - \operatorname{sign}(m_j)}(\alpha_j + a_j s + b_j t)$. *Тогда справедливы равенства при* $a = a_i = a_j$, $b = b_i = a_j$, $\forall i, j = \overline{1, p}$,

а) $(1-q)[H_q(\alpha_j \pm 1) - H_q(\alpha_i \pm 1)] = H_q(q^a x,\ q^b y \mid p, \overline{m}, \overline{\alpha}, \overline{a}, \overline{b}) \begin{cases} q^{\alpha_i} - q^{\alpha_j}, \\ q^{\alpha_i - 1} - q^{\alpha_j - 1}, \end{cases} \quad m_i \leqslant 0,\ m_j \geqslant 0;$

б) $(1-q)[H_q(\alpha_j \pm 1) - H_q(\alpha_i \mp 1)] = H_q(q^a x,\ q^b y \mid p, \overline{m}, \overline{\alpha}, \overline{a}, \overline{b}) \begin{cases} q^{\alpha_i - 1} - q^{\alpha_j}, \\ q^{\alpha_i} - q^{1-\alpha_j}, \end{cases} \quad m_i \leqslant 0,\ m_j \geqslant 0.$

Доказательство основано на формуле (1.10.5) из ([18], с. 38) и определении (1.1).

Теорема 1.5. *При выполнении условий* (1.2) *имеют место равенства* (*ср.* [14])

а)

$$\frac{(1-q)^{-\sigma}}{\Gamma_q(\xi-\gamma)} \int_0^1 \int_0^1 x^{\sigma-1} y^{\gamma-1} E_q(qx)(1-ay)_{\xi-\gamma-1} H_q(zx^{-\sigma}, wy^{-\eta} \mid p, \overline{m}, \overline{\alpha}, \overline{a}, \overline{b}) d_q x\, d_q y =$$
$$= H_q(z(1-q)^{-\sigma}, w \mid p, \overline{m}, \overline{\alpha}, \overline{a}, \overline{b}; 1, 1, \sigma, -\delta, 0; 1, 1, \sigma, 0, -\gamma; 1, -1, \delta, 0, -\gamma),$$

где $\operatorname{Re}\sigma > 0$, $\operatorname{Re}\delta > 0$, $\operatorname{Re}\gamma > 0$, $\operatorname{Re}\eta > 0$, $\operatorname{Re}(\xi - \gamma) > 0$;

б)

$$\frac{(1-q)^{\eta-\sigma-1}}{2\pi i} \int_0^1 \int_{L_y} x^{\sigma-1} y^{-\eta} E_q(qx) e_q(qy)_{\xi-\gamma-1} H_q(zx^{-\delta}, wy^{\gamma} \mid p, \overline{m}, \overline{\alpha}, \overline{a}, \overline{b}) d_q x\, dy =$$
$$= H_q(z(1-q)^{-\delta}, w(1-q)^{\gamma} \mid p, \overline{m}, \overline{\alpha}, \overline{a}, \overline{b}; 1, 1, \sigma, -\delta, 0; 1, -1, \sigma, 0, -\delta)$$

при $\operatorname{Re}\sigma > 0$, $\operatorname{Re}\delta > 0$, $\operatorname{Re}\eta > 0$;

в)

$$\frac{(1-q)^{\sigma-1}}{2\pi i \Gamma_q(\xi-\gamma)} \int_0^1 \int_{L_y} x^{\gamma-1} y^{-\sigma} e_q(qx)(1-ay)_{\xi-\gamma-1} H_q(zx^{-\eta}, wy^{\delta} \mid p, \overline{m}, \overline{\alpha}, \overline{a}, \overline{b}) d_q x\, dy =$$
$$= H_q(z, w(1-q)^{\delta} \mid p, \overline{m}, \overline{\alpha}, \overline{a}, \overline{b}; 1, 1, \sigma, \delta, -\gamma, 0; 1, -1, \sigma, 0, -\delta),$$

где $\operatorname{Re}\sigma > 0$, $\operatorname{Re}\xi > 0$, $\operatorname{Re}\gamma > 0$, $\operatorname{Re}\eta > 0$, $\operatorname{Re}(\xi - \gamma) > 0$.

Доказательство следует из (1.1) после перестановки порядка интегрирования и применения следующих формул из ([19], с. 372):

1. $\dfrac{G(q)}{1-q}\displaystyle\int_0^1 x^{\beta-s-1} E_q(qx) d_q x = G(q^{\beta-s})$, $G(q^{\alpha}) = \displaystyle\prod_{n=0}^{\infty} (1-q^{\alpha+n})^{-1}$,
2. $\dfrac{1}{1-q}\displaystyle\int_0^1 x^{\alpha-1}(1-qx)_{\beta-1} d_q x = \displaystyle\prod_{n=0}^{\infty} \frac{(1-q^{\alpha+\beta+n})(1-q^{1+n})}{(1-q^{\alpha+n})(1-q^{\beta+n})}$,
3. $\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_L e_q(sx)(sx)^{-r-1} ds = \frac{x^r}{(1-q)_r}$.

2. Базисный аналог H-функции одной переменной

Определение 2. Базисная H-функция одной переменной задается интегралом Меллина–Барнса

$$H_q(z \mid p, \overline{m}, \overline{\alpha}, \overline{a}, \overline{b}) = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_s} Q^p_{\overline{m}, \overline{\alpha}, \overline{a}}(s) \frac{z^s}{\sin(\pi s)} ds, \tag{2.1}$$

в котором $Q^p_{\overline{m}, \overline{\alpha}, \overline{a}}(s) = \prod\limits_{i=1}^{p} \Gamma_q^{m_i}(A_i + a_i s)$, $A_i = 1/2 - (\alpha_i - 1/2)\operatorname{sign} a_i$, а векторы $\overline{m}$, $\overline{\alpha}$ и $\overline{a}$ те же, что и в определении 1.

Контур L_s проходит так, что полюсы функций $\Gamma_q^{m_i}(A_i + a_i s)$ с $m_i > 0$, $a_i(\lesseqgtr)0$ лежат справа (слева) от L_s и находятся по крайней мере на некотором расстоянии $\varepsilon > 0$ от контура.

Частными случаями базисной H-функции (2.1) являются H_q-функции [14], [15] и G_q-функция [14], [16], H-функция Фокса и G-функция Мейера [20].

Отметим, что имеет место аналог примера 1, который мы опускаем. Приведем более простые примеры.

Пример 2. а) $H_q(-z \mid 1, 1, 1-\alpha, -1; 1, 1, 1-\beta, -1; 1, -1, 1-\gamma, -1; 1, -1, -2, -1) = \dfrac{\Gamma_q(\alpha)\Gamma_q(\beta)}{\Gamma_q(\gamma)}\,{}_2\Phi_1(q^\alpha; q^\beta; q^\gamma; q; z)$, $|z| < 1$, $|\arg(-z)| < \pi$, где ${}_2\Phi_1(q^\alpha; q^\beta; q^\gamma; q; z)$ — q-аналог [21] гипергеометрической функции ${}_2F_1(\alpha; \beta; \gamma; z)$;

б) $H_q(z \mid 1, 1, \alpha, 1; 1, 1, 1-\beta, -1; 1, -1, -2, -1; 1; 1, -1, \alpha, 1) = \dfrac{(-zq^\beta, -z^{-1}q^{\alpha+1}; q)_\infty}{(-z, -qz^{-1}; q)_\infty}\Gamma_q(\alpha+\beta)$, $0 < q < 1$, $-\operatorname{Re}\alpha < \operatorname{Re} s < \operatorname{Re}\beta$ [22];

в) $H_q(-z \mid p, \overline{m}, \overline{\alpha}, \overline{a}) = \dfrac{\Gamma_q(a_1)\dots\Gamma_q(a_{r+1})}{\Gamma_q(\beta_1)\dots\Gamma_q(\beta_r)}\,{}_{r+1}\Phi_r(q^{a_1}, \dots, q^{a_{r+1}}, q^{\beta_1}, \dots, q^{\beta_r}; q, z)$, где [18]

$$m_i = 1, \quad i = \overline{1, r+1}; \quad m_i = -1, \quad i = \overline{r+2, 2r+2};$$
$$a_k = -1, \quad k = \overline{1, 2r+2}; \quad \alpha_{h+r+1} = \beta_h, \quad h = \overline{1, r}, \quad \alpha_{2r+2} = 1.$$

Теорема 2.1. *При* $|\arg z| < \pi$ *базисный аналог* H*-функции сходится. Кроме этого, пусть* $m_i = 1$, $a_i > 0$, $i = \overline{1, n}$; $m_{n+j} = 1$, $\alpha_{n+j} = \beta_j$, $a_{n+j} = -b_2 < 0$, $j = \overline{1, m}$; $m_{m+k} = -1$, $\alpha_{m+k} = \alpha_k$, $a_{m+k} = -a_k < 0$, $k = \overline{n+1, A+1}$; $\alpha_{m+A+1} = 1$, $a_{m+A+1} = -1$; $m_{A+1+k} = -1$, $\alpha_{A+1+k} = \beta_k$, $a_{A+1+k} = b_k > 0$, $k = \overline{m+1, B+1}$; $\alpha_{A+B+2} = 1$, $a_{A+B+2} = 1$; $p = A+B+2$, *тогда справедливо предельное равенство*

$$\lim_{q\to 1_-} H_q(z \mid p, \overline{m}, \overline{\alpha}, \overline{a}) = H_{A,B}^{m,n}\left[z \,\middle|\, \begin{matrix} (\alpha_1, a_1), \dots, (\alpha_A, a_A) \\ (\beta_1, b_1), \dots, (\beta_B, b_B) \end{matrix}\right].$$

Теорема 2.2. *Если* $|\arg z| < \pi$, *то*

а) $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^{s-1} H_q(zx \mid p, \overline{m}, \overline{\alpha}, \overline{a}) = -\frac{z^{-1}}{\sin(\pi s)} Q^p_{\overline{m}, \overline{\alpha}, \overline{a}}(s)$, $0 < \operatorname{Re} s < 1$;

б) $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^{-1/2} H_q(x \mid p_1, \overline{m}_1, \overline{\alpha}_1, \overline{a}_1) H_q(zx \mid p_2, \overline{m}_2, \overline{\alpha}_2, \overline{a}_2)dx = z^{-1/2} H_q(z \mid p_1, \overline{m}_1, \overline{\alpha}_1, -\tfrac{1}{2}\overline{a}_1; p_2, \overline{m}_2, \overline{\alpha}_2 - \tfrac{1}{2}\overline{a}_2, \tfrac{1}{2}\overline{a}_2)$.

Теорема 2.3. *Имеют место равенства*

а) $z^{-k} H_q(z \mid p, \overline{m}, \overline{\alpha}, \overline{a}) = (-1)^k H_q(z \mid p, \overline{m}, \overline{\alpha + ka}, \overline{a})$, k *— целое число*;

б) $q^{A_k} H_q(q^{a_k} z \mid p, \overline{m}, \overline{\alpha}, \overline{a}) = H_q(z \mid p, \overline{m}, \overline{\alpha}, \overline{a}) + (q-1) H_q(z \mid p, \overline{m}, \overline{\alpha}, \overline{a}; 1, 1, \alpha_k + 1, a_k; 1, -1, \alpha_k, a_k)$, *где* $m_k > 0$, $k = \overline{1, p}$;

в) $q^{A_k - 1} H_q(q^{a_k} z \mid p, \overline{m}, \overline{\alpha}, \overline{a}) = H_q(z \mid p, \overline{m}, \overline{\alpha}, \overline{a}) + (q-1) H_q(z \mid p, \overline{m}, \overline{\alpha}, \overline{a}; 1, 1, \alpha_k, a_k; 1, -1, \alpha_k - 1, a_k)$, *где* $m_k < 0$, $k = \overline{1, p}$;

г) $H_q((1+q)^{-1} \mid 1, 1, 1, 2) = (1+q)^{-1}\Gamma^{-1}_{q^2}(\tfrac{1}{2}) H_{q^2}(1+q \mid 1, 1, 1, 1; 1, 1, \tfrac{1}{2}, 1)$;

д) *пусть* $n > 2$, $r = q^n$, *тогда*

$$H_q\left(\frac{1-q}{1-r} \,\middle|\, 1, 1, 1, n\right) = \frac{1-q}{1-r}\Gamma_r^{-1}\left(\frac{n-1}{n}\right)\dots\Gamma_r^{-1}\left(\frac{1}{n}\right) H_r\left(\frac{1-q}{1-r} \,\middle|\, 1, 1, 1, 1; 1, 1, \frac{n-1}{n}, 1; \dots; 1, 1, \frac{1}{n}, 1\right).$$

Теорема 2.4. *Пусть* $H_q(a_i \pm 1)$ *является базисной* H*-функцией, получающейся из формулы* (2.1), *если в ее правой части множитель* $\Gamma_q^{m_i}(A_i + a_i s)$ *заменяется произведением* $\Gamma_q^{\operatorname{sign}(m_i)}(A_i \pm 1 + a_i s)\Gamma_q^{m_i - \operatorname{sign}(m_i)}(A_i + a_i s)$, *тогда справедливы равенства*

а) $(1-q)[H_q(\alpha_j + 1) - H_q(\alpha_i + 1)] = (q^{\pm\alpha_i} - q^{\pm\alpha_j}) H_q(q^{\mp\alpha_i} z \mid p, \overline{m}, \overline{\alpha}, \overline{a})$, $m_i \gtrless 0$, $m_j \gtrless 0$, $a_i = a_j \gtrless 0$;

б) $(1-q)[H_q(\alpha_j-1)-H_q(\alpha_i-1)]=(q^{\pm(1-\alpha_i)}-q^{\pm(1-\alpha_j)})H_q(q^{\pm\alpha_i}z\mid p,\overline{m},\overline{\alpha},\overline{a})$, $m_i\gtrless 0$, $m_j\gtrless 0$, $a_i=a_j\gtrless 0$;

в) $(1-q)[H_q(\alpha_j\pm 1)-H_q(\alpha_i\mp 1)]=\left\{\begin{array}{l} q^{1-\alpha_i}-q^{-\alpha_j} \\ q^{\alpha_j}-q^{\alpha_j-1}\end{array}\right\}H_q(q^{\pm\alpha_i}z\mid p,\overline{m},\overline{\alpha},\overline{a})$, $m_i>0$, $m_j<0$, $a_i=a_j\gtrless 0$.

Доказательство основано на формуле (1.10.5) из ([18], с. 38) и формуле (2.1).

Теорема 2.5 (ср. [14]). *Пусть* $|\arg z|<\pi$, *тогда имеют место равенства*

а) $(1-q)^{-\sigma}\int_0^1 x^{\sigma-1}E_q(qx)H_q(zx^{-\delta}\mid p,\overline{m},\overline{\alpha},\overline{a})d_qx=H_q((1-q)^{-\delta}x\mid p,\overline{m},\overline{\alpha},\overline{a};1,1,\sigma,-\delta)$, $\operatorname{Re}\sigma>0$, $\operatorname{Re}\delta>0$;

б) $\Gamma_q^{-1}(\delta-\sigma)\int_0^1 x^{\sigma-1}(1-qx)_{\delta-\sigma-1}H_q(zx^{-\gamma}\mid p,\overline{m},\overline{\alpha},\overline{a})d_qx=H_q(z\mid p,\overline{m},\overline{\alpha},\overline{a};1,1,\sigma,-\gamma;1,-1,\delta,-\gamma)$, $\operatorname{Re}\sigma>0$, $\operatorname{Re}\delta>0$, $\operatorname{Re}\gamma>0$, $\operatorname{Re}(\delta-\sigma)>0$;

в) $\dfrac{(1-q)^{\sigma-1}}{2\pi i}\int_L x^{\sigma}e_q(qx)H_q(zx^{\delta}\mid p,\overline{m},\overline{\alpha},\overline{a})d_qx=H_q((1-q)^{-\delta}z\mid p,\overline{m},\overline{\alpha},\overline{a};1,-1,\sigma,-\delta)$, $\operatorname{Re}\sigma>0$.

Литература

1. Нгуен Суан Тхао. Базисный аналог H-функций многих переменных // Новгор. гос. ун-т. – Новгород, 1998. – 37 с. – Деп. в ВИНИТИ 30.12.98, № 3940-В98.
2. Thomae J. *Beitrage zur Theorie der durch die Heinesche Reihe*: $1+\frac{1-q^a}{1-q}\cdot\frac{1-q^b}{1-q^c}\cdot x+\frac{1-q^a}{1-q}\cdot\frac{1-q^{a+1}}{1-q^2}\cdot\frac{1-q^b}{1-q^c}\cdot\frac{1-q^{b+1}}{1-q^{c+1}}\cdot x^2+\cdots$ // J. reine angew. Math. – 1869. – Bd. 70. – S. 258–281.
3. Jackson F.H. *A generalization of the functions* $\Gamma(n)$ *and* x^n // Proc. Roy. Soc. London. – 1904. – V. 74. – P. 64–72.
4. Askey R. *The q-gamma and q-beta functions* // Appl. Anal. – 1978. – V. 8. – № 2. – P. 125–141.
5. Moak D.S. *The q-gamma function for* $q>1$ // Aequat. math. – 1980. – V. 20. – P. 278–285.
6. Маричев О.И. и Ву Ким Туан. *О некоторых свойствах q-гамма-функции* $\Gamma_q(z)$ // ДАН БССР. – 1982. – Т. 26. – № 6. – С. 488–491.
7. Ismail M.E.H., Lorch L., Muldoon M.E. *Completely monotonic functions associated with the gamma function and its q-analogues* // J. Math. Anal. and Appl. – 1986. – V. 116. – № 1. – P.1–9.
8. Нгуен Тхань Хай. *О критерии определения сходимости двойных интегралов Меллина–Барнса* // Изв. АН БССР. Сер. физ.-матем. наук. – 1992. – № 1. – С. 25–31.
9. Buschman R.G. *H-functions of two variables*, 1 // Indian J. Math. – 1978. – V. 20. – № 2. – P. 138–153.
10. Нгуен Тхань Хай. *К теории общей H-функции Фокса двух переменных* // ДАН БССР. – 1990. – Т. 34. – № 4. – С. 297–300.
11. Agarwal R.P. *An extension of Meijer's G-function* // Proc. Nat. Inst. Sci. India. – 1965. – V. A.31. – № 6. – P. 536–546.
12. Sharma B.L. *On the generalised function of two variables* (1) // Ann. Soc. Sci Bruxelles. – 1965. – V. 79. – № 1. – P. 26–40.
13. Маричев О.И., Ву Ким Туан. *Определение общей G-функции двух переменных, ее частные случаи и дифференциальные уравнения* // Дифференц. уравнения. – 1983. – Т. 19. – № 10. – С. 1797–1799.
14. Saxena R.K., Modi G.C., Kalla S.L. *A basic analogue of Fox's H-function* // Rev. Tec. Ing. Univ. Zulia. – 1983. – V. 6. – P. 139–143.
15. Saxena R.K., Kumar R. *Recurrence relations for the basic analogue of H-function* // Nat. Acad. Math. – 1990. – V. 8. – P. 48–54.

16. Saxena R.K., Kumar R. *Certain finite expansions associated with a basic analogue of G-function* // Rev. Tec. Ing. Univ. Zulia. – 1990. – V. 13. – P. 111–116.
17. Braaksma B.L.J. *Asymptotic expansions and analytic continuations for a class of Barnes integrals* // Comp. Math. – 1964. – V. 15. – P. 239–341.
18. Гаспер Дж., Рахман М. *Базисные гипергеометрические ряды.* – М.: Мир, 1993. – 352 с.
19. Hahn W. *Beitrage zur Theorie der Heineschen Reihen. Die* 24 *Integrale der hypergeometrischen q-Differenzengleichung. Das q-analogen der Laplace Transformation* // Math. Nachr. – 1949. – Bd. 2. – S. 340–379.
20. Бейтмен Г., Эрдейи А. *Высшие трансцендентные функции.* Т. 1. – М.: Наука, 1965. – 294 с.
21. Watson G.N. *The continuation of functions defined by generalized hypergeometric series* // Trans. Camb. Phil. Soc. – 1990. – V. 21. – P. 281–299.
22. Gasper G. *Solution to problem* 6497 (*q-analogues of a gamma function identify, by R. Askey*) // Amer. Math. Monthly. – 1986. – V. 94. – P. 199–201.

Новгородский государственный университет

Поступили
первый вариант 11.11.1997
окончательный вариант 20.03.2000