ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2003 МАТЕМАТИКА № 7 (494)

УДК 512.542

*В.А. АНТОНОВ, Н.Н. АМИНЕВА*

# О ГРУППАХ С ОТНОСИТЕЛЬНО БОЛЬШИМИ ЦЕНТРАЛИЗАТОРАМИ

Подгруппа $H$ группы $G$ называется обобщенно самонормализуемой, если $N(H) = H \cdot C(H)$. В общем случае наличие обобщенно самонормализуемых подгрупп в группах не несет информации, достаточной для описания этих групп. Так, например, в [1] показано, что любая конечная группа может быть вложена в группу с нетривиальным центром, в которой обобщенно самонормализуемы центры всех силовских подгрупп.

В то же время, группы, в которых много обобщенно самонормализуемых подгрупп, допускают полное описание. Так, в [2], [3] были описаны конечные группы, в которых обобщенно самонормализуемы все, все абелевы (все неабелевы), все примарные (непримарные) или все инвариантные (неинвариантные) подгруппы.

Следующим естественным шагом в исследовании групп с большими относительно нормализаторов централизаторами подгрупп представляется исследование групп, в которых для каждой подгруппы $A$ из выделенного множества подгрупп выполняется неравенство

$$|N(A) : A \cdot C(A)| \leq 2. \qquad (*)$$

Такое ограничение весьма существенно. Так, в [4] показано, что если в конечной группе $G$ для силовской $p$-подгруппы $P$ выполняется равенство $|N(P) : P \cdot C(P)| = 2$, а $P$ — либо нециклическая абелева группа, либо имеет коммутант простого порядка, то $G' < G$. В то же время, для получения полного описания групп с ограничением $(*)$ нужно, чтобы подгруппа $A$ пробегала достаточно большое множество подгрупп.

В данной статье изучаются группы, в которых неравенство $(*)$ выполняется для всех подгрупп, удовлетворяющих некоторому теоретико-групповому свойству.

**Теорема 1.** *Пусть $G$ — конечная группа, в которой для любой подгруппы $A$ выполняется неравенство $(*)$. Тогда $G = K\lambda H$, где $H$ — силовская 2-подгруппа группы $G$, подгруппа $K$ абелева, $|H/C_H(K)| \leq 2$ и либо группа $H$ абелева, либо $H/Z(H)$ — четверная или диэдральная группа.*

**Доказательство**. Пусть $H$ — силовская 2-подгруппа из $G$, $A \leq H$. Тогда из условия теоремы следует, что любой $2'$-элемент из $N(A)$ лежит в $C(A)$. По теореме 14.4.7 из [5] получаем $G = K\lambda H$, где $K = O(G)$. Если $P$ — силовская $p$-подгруппа группы $G$ и $p \neq 2$, то $N_P(A) = A \cdot C_P(A)$ для любой подгруппы $A \leq P$. Но тогда группа $P$ абелева (см. [2], лемма 2). Поэтому $N_K(P) = C_K(P)$ и по теореме Бернсайда ([5], теорема 14.3.1) $P$ обладает в $K$ нормальным $p$-дополнением. В силу произвольности числа $p$ подгруппа $K$ абелева. Но тогда

$$|H/C_H(K)| = |N(K) : KC(K)| \leq 2.$$

Пусть теперь $A$ — максимальная абелева подгруппа группы $H$. Тогда $|N_H(A) : A| \leq 2$. Если группа $H$ неабелева, то из $N_H(A) > A$ получим $|N_H(A) : A| = 2$ для любой максимальной абелевой подгруппы $A$ из $H$. Предположим, что $A$ — максимальный абелев нормальный делитель группы $H$. Тогда $H = A\langle x \rangle$, $x^2 \in A$.

Подгруппа $B = \langle x \rangle Z(H)$ является максимальной абелевой в $H$ и, следовательно, $|N_H(B) : B| = 2$. Это означает, в частности, что

$$|C_{H/Z(H)}(B/Z(H))| = 4.$$

В силу предложения 1.16 из [6] $H/Z(H)$ является 2-группой максимального класса. Если $H/Z(H)$ абелева, то $|H/Z(H)| = 4$ и $H/Z(H)$ — четверная группа. Если же $H/Z(H)$ неабелева, то по теореме 1.17 из [6] $H/Z(H)$ является либо кватернионной, либо диэдральной, либо квазидиэдральной группой. Но фактор-группа по центру не может быть ни кватернионной, ни квазидиэдральной группой.

**Теорема 2.** *Пусть $G$ — конечная группа, в которой условие $(*)$ выполняется для каждой абелевой подгруппы $A$. Тогда выполняется один из следующих случаев*:

1) $G$ *— группа из теоремы* 1;
2) $G = [K_0 \lambda (P \cdot \langle h \rangle)]\langle x \rangle$, $P \cdot \langle h \rangle = H$ *— силовская* 2*-подгруппа группы* $G$, $[P, h] = 1$, $K_0 \langle x \rangle$ *абелева*, $h{=}1$ *или* $h^2 \in Z(G)$, $x^3 \in Z(G)$, $[K_0, P] = 1$, $[Z(H), x] = 1$, $\langle x \rangle H/(\langle x^3 \rangle Z(H)) {\cong} A_4$, $[h, x] = k \in K_0$ *и или* $k = 1$, *или* $k^3 = 1$, $k^h = k^{-1}$;
3) $G = L \cdot Z(G)$, *где* $L \cong SL(2, 5)$.

**Доказательство.** Пусть $G$ — группа, отвечающая условиям теоремы. Отметим, что любая подгруппа группы $G$ сама удовлетворяет условию этой теоремы. Как и при доказательстве теоремы 1, легко показать, что все $2'$-подгруппы из $G$ абелевы, а силовская 2-подгруппа $H$ либо абелева, либо фактор-группа $H/Z(H)$ является четверной или диэдральной группой. Если подгруппа $H$ абелева, то она лежит в центре своего нормализатора и по теореме Бернсайда $G = K \lambda H$ — группа из теоремы 1. Поэтому можно считать, что группа $H$ неабелева.

Пусть $F = F(G)$ — подгруппа Фиттинга группы $G$. Индукцией по порядку группы $G$ покажем, что если $C(F) \leq F$, то группа $G$ разрешима. Действительно, если при этом группа $F$ абелева, то из $C(F) = F$ следует $|G : F| = 2$. Предположим, что группа $F$ неабелева. Если $F = K_0 \times (H \cap F)$, то подгруппа $H \cap F$ неабелева и из строения группы $H$ следует $C_H(H \cap F) = Z(H)$. Так как $C(H \cap F)$ имеет абелеву силовскую 2-подгруппу, то по уже доказанному $C(H \cap F) = K_1 \lambda Z(H)$. Из инвариантности $K_1$ следует $K_1 \leq F$ и, следовательно, $K_1 = K_0$. Если $K_0 \not\leq Z(G)$, то $|G : C(K_0)| = 2$. Так как $F \leq C(K_0)$, то $F \leq F(C(K_0))$ и

$$C(F(C(K_0))) \leq C(F) \leq F \leq F(C(K_0)).$$

В силу предположения индукции группа $C(K_0)$, а следовательно, и группа $G$ разрешимы. Пусть $K_0 \leq Z(G)$. Тогда $C(H \cap F) \leq F$. Отсюда $Z(H) \leq H \cap F$, и из строения $H$ следует, что $H/(H \cap F)$ — циклическая группа, т. е. группа $G$ разрешима.

Рассмотрим теперь случай разрешимой группы $G$. Пусть $K$ — холлова $2'$-подгруппа группы $G$. Если $K_0 = K$ или подгруппа $F$ абелева, то $G = K \lambda H$. Поэтому можно считать, что $K_0 < K$ и $H \cap F$ неабелева. Из строения группы $H$ следует, что $C_H(H \cap F) = Z(H)$, т. е. $Z(H \cap F) \leq Z(H)$. Так как $Z(H \cap F) \triangleleft G$, то из условия $(*)$ следует $Z(H \cap F) \leq Z(G)$. Если $Z(H \cap F) = Z(H)$, то $(H \cap F)/Z(H \cap F)$ — нециклическая подгруппа из $H/Z(H)$. А если $Z(H \cap F) < Z(H)$, то $H = (H \cap F)Z(H)$ и $(H \cap F)/Z(H \cap F) \cong H/Z(H)$. В любом случае $(H \cap F)/Z(H \cap F)$ является либо четверной, либо диэдральной группой. Пусть

$$(H \cap F)/Z(H \cap F) = \langle \overline{a} \rangle \lambda \langle \overline{b} \rangle,$$

$x \in K \setminus K_0$ и $\overline{x} = xZ(H \cap F)$. Если подгруппа $\langle \overline{a} \rangle$ является $\overline{x}$-допустимой, то $x \in N(\langle a \rangle Z(H \cap F))$ и, следовательно, $x \in C(a)$. Если $\overline{b}^{\overline{x}} = \overline{a}^{\alpha} \overline{b}$, то

$$\overline{b} = \overline{b}^{\overline{x}^{|\overline{x}|}} = \overline{a}^{\alpha |\overline{x}|} \overline{b}.$$

Поэтому $\alpha = 0$ и $x \in N(\langle b\rangle Z(H\cap F))$, т. е. $x \in C(b)$. Но тогда $x \in \mathrm{C}(H\cap F)$, что невозможно. Это означает, что $\langle\overline{x}\rangle$ действует на $\langle\overline{a}\rangle\lambda\langle\overline{b}\rangle$ неприводимо. Но тогда $(H\cap F)/Z(H\cap F)$ — четверная группа и $|K : K_0| = 3$.

Рассмотрим действие группы $G$ на фактор-группе $(H\cap F)/Z(H\cap F)$. Из строения $H$ и условия $(*)$ следует

$$C_{G/Z(H\cap F)}((H\cap F)/Z(H\cap F)) = (H\cap F)C(H\cap F)/Z(H\cap F).$$

Поэтому

$$G/(H\cap F)C(H\cap F) \le \mathrm{Aut}((H\cap F)/Z(H\cap F)) \cong S_3,$$

т. е. порядок фактор-группы $G/(H\cap F)C(H\cap F)$ равен либо 3, либо 6. Если эта фактор-группа изоморфна $S_3$, т. е. имеет вид

$$\langle\overline{x}\rangle\lambda\langle\overline{c}\rangle,\quad \overline{x}^3 = \overline{c}^2 = 1,\quad (\overline{x})^{\overline{c}} = (\overline{x})^{-1},$$

то, с одной стороны, $\overline{x}$ должен действовать на $\langle\overline{a}\rangle\times\langle\overline{b}\rangle$ неприводимо, а, с другой стороны, из строения группы $H$ следует, что должно выполняться равенство типа $c^2 = a$, т. е. $\overline{x}^{\overline{a}} = \overline{x}^{\overline{c}^2} = \overline{x}$, что невозможно.

Таким образом, $|G/(H\cap F)C(H\cap F)| = 3$. Учитывая, что $C(H\cap F) = K_0\lambda Z(H)$, получим

$$H = (H\cap F)Z(H) \ \text{ и } \ G = (K_0\lambda H)\langle x\rangle,\quad x^3 \in Z(G).$$

Если $H\cap F = H$, то в п. 2) теоремы будем иметь $h = 1$. Пусть $H = (H\cap F)\langle h\rangle$, $h \notin F$. Так как $h \in C(H\cap F)$, то

$$h^x \in C(H\cap F) = (K_0\times Z(H\cap F))\langle h\rangle.$$

Поэтому $h^x = hh_1k$, где $h_1 \in Z(H\cap F) \le Z(G)$ и $k \in K_0$. Но тогда $h = h^{x^3} = hh_1^3k^3$, т. е. $h_1 = 1$, $h^x = hk$, $k^3 = 1$. Если $k \ne 1$, то из $h^2 = (h^2)^x = h^2[k,h]k^2$ получим $[k,h] = k^{-2}$ и $k^h = k^{-1}$.

Предположим теперь, что группа $G$ неразрешима. Тогда по уже доказанному $C(F) \nleq F$ и, следовательно, слой $L$ группы $G$ нетривиален. Пусть $F^* = F\cdot L$ — обобщенная подгруппа Фиттинга группы $G$. Если $L = \prod\limits_{i=1}^{n} L_i$ — представление $L$ в виде центрального произведения квазипростых групп, то из строения группы $H$ следует, что только в одном из множителей $L_i$ силовская 2-подгруппа может быть неабелевой. Но, как показано выше, абелевость силовской 2-подгруппы влечет разрешимость группы. Поэтому $L$ является квазипростой группой и $H = H_1Z(H)$, где $H_1$ — неабелева силовская 2-подгруппа из $L$. Так как силовская 2-подгруппа в группе $F$ абелева, то и сама $F$ тоже абелева, т. е. $F = Z(F^*)$.

Предположим сначала, что $G = F^*$, т. е. $G/Z(G)$ — простая группа. Так как силовская 2-подгруппа из $G/Z(G)$ является либо четверной, либо диэдральной группой, то в силу [7]–[9] $G/Z(G)$ изоморфна $A_7$ или $PSL(2,q)$, $q$ нечетно.

Если $P$ — силовская 7-подгруппа группы $A_7$, то $N(P)\setminus C(P)$ содержит элемент порядка 3. Пусть $G/Z(G) \cong PSL(2,p^n)$ и $A/Z(G)$ — силовская $p$-подгруппа из $G/Z(G)$. Так как силовская $p$-подгруппа группы $G$ абелева, то и группа $A$ тоже абелева. Из равенств

$$|N_{G/Z(G)}(A/Z(G)) : A/Z(G)| = \frac{p^n-1}{2}$$

и

$$C_{G/Z(G)}(A/Z(G)) = A/Z(G)$$

следует $|N(A) : A| = \frac{p^n-1}{2}$ и $C(A) = A$. Поэтому $\frac{p^n-1}{2} = 2$ и $p^n = 5$. Так как силовская 2-подгруппа группы $G$ неабелева, то $G'\cap Z(G) \ne 1$. Остается заметить, что накрывающая группы $PSL(2,5)$ совпадает с $SL(2,5)$.

Если $G > F^*$, то $G/Z(G) \cong \mathrm{Aut}(F^*/Z(G)) \cong S_5$. Но тогда если $A/Z(G)$ — силовская 5-подгруппа из $G/Z(G)$, то $C(A) = A$ и $|N(A) : A| = 4$, что противоречит условию $(*)$. $\square$

Рассмотрим теперь группы, в которых неравенство $(*)$ выполняется для всех неабелевых подгрупп. Заметим, что это свойство переносится на подгруппы и фактор-группы.

**Лемма.** *Если в группе $G$ неравенство $(*)$ выполняется для любой неабелевой подгруппы $A$ и $H$ — такая неабелева подгруппа группы $G$, что $C(H)$ тоже неабелев, то $H$ и $C(H)$ удовлетворяют условию теоремы* 1.

**Доказательство.** Если $K = H \cdot C(H)$ и $T$ — произвольная подгруппа из $C(H)$, то из неравенства

$$|N_K(HT) : HT \cdot C(HT)| \leq 2$$

и равенств

$$N_K(HT) = H \cdot N_{C(H)}(T) \ \text{ и } \ C(HT) = C_{C(H)}(T)$$

следует, что неравенство $|N_{C(H)}(T) : T \cdot C_{C(H)}(T)| \leq 2$ выполняется для всех подгрупп $T \leq C(H)$. Так как $H \leq C(C(H))$, то утверждение леммы верно и для группы $H$. □

**Теорема 3.** *Пусть $G$ — неабелева $p$-группа, в которой неравенство $(*)$ выполняется для любой неабелевой подгруппы $H$. Тогда если $p \neq 2$, то $|G/Z(G)| = p^2$, а если $p = 2$, то выполняется одно из следующих условий*:

1) $|G/Z(G)| \leq 8$;
2) $G/Z(G)$ — *диэдральная группа*;
3) $G = K \cdot Z(G)$, *где $K$ — центральное произведение двух групп Миллера–Морено с объединенным коммутантом*;
4) $G/Z(G) = (\langle \overline{a} \rangle \lambda \langle \overline{b} \rangle) \times \langle \overline{x} \rangle$, $\langle \overline{a} \rangle \lambda \langle \overline{b} \rangle$ — *группа диэдра*, $|\overline{x}| = 2$, $[b, x] = [a^2, x] = 1$;
5) $G/Z(G) = \langle \overline{b}, \overline{x} \rangle$, $[\overline{b}, \overline{x}] \in \langle \overline{b}^2, \overline{x}^2 \rangle$, $[b^2, x^2] = 1$, *и каждая из фактор-групп $G/\langle b^2 \rangle Z(G)$ и $G/\langle x^2 \rangle Z(G)$ является либо диэдральной, либо квазидиэдральной группой*;
6) $G/Z(G) = (\langle \overline{x} \rangle \times \langle \overline{z} \rangle)\langle \overline{b} \rangle$, $|\overline{z}| = 2$, $\overline{b}^2 \in \langle \overline{z} \rangle$, $[x^2, z] = 1$, $[\overline{b}, \overline{x}] = \overline{x}^{\alpha}\overline{z}$ *и $G/\langle z \rangle Z(G)$ — диэдральная или квазидиэдральная группа*;
7) $G/Z(G) = \langle \overline{b} \rangle \lambda \langle \overline{x} \rangle$, $|\overline{x}| = 4$, $|\overline{b}| \geq 4$, $[x^2, b^2] = 1$ *и $G/\langle x^2 \rangle Z(G)$ — диэдральная или квазидиэдральная группа.*

**Доказательство**. Предположим сначала, что $p \neq 2$. Если $A$ — максимальный абелев нормальный делитель из $G$ и $B$ — нормальная в $G$ подгруппа, покрывающая $A$, то из $|G : B| \leq 2$ следует $G = B$, т. е. $|G/A| = p$. Но тогда в группе $G$ все собственные централизаторы абелевы, т. е. для любой неабелевой подгруппы $H$ группы $G$ выполняется равенство $C(H) = Z(G)$ и, следовательно, $N(H) = H \cdot Z(G)$. Если $H$ — подгруппа Миллера–Морено из $G$, то из $N(N(H)) = N(H)Z(G) = N(H)$ следует $H \triangleleft G$ и $G = H \cdot Z(G)$.

Пусть теперь $p = 2$. В тех же обозначениях из $|G : B| \leq 2$ следует $|G : A| \leq 4$. Для удобства разобьем дальнейшее доказательство на части.

1. Если $|G : A| = 2$, то снова $C(H) = Z(G)$ для любой неабелевой подгруппы $H$ из $G$. Пусть $H$ — подгруппа Миллера–Морено из $G$. Если $HZ(G) \triangleleft G$, то $|G : HZ(G)| \leq 2$ и $|G : Z(G)| \leq 8$. Предположим, что $HZ(G) \ntriangleleft G$ для любой подгруппы Миллера–Морено $H$. Тогда $N = N(HZ(G)) < G$. Если $T = N(N)$, то $|N : HZ(G)| = 2$ и $|T : N| = 2$. Пусть

$$\overline{H} = HZ(G)/Z(G) = \langle \overline{a} \rangle \times \langle \overline{b} \rangle,$$
$$\overline{N} = N/Z(G) = \overline{H} \cdot \langle \overline{x} \rangle, \ \ x^2 \in H \ \text{ и } \ T/Z(G) = \overline{N} \cdot \langle \overline{y} \rangle.$$

Так как $H \cdot A = G$, то можно считать, что $b, x, y \in A$. Если бы группа $\overline{N}$ была абелевой, то в группе $T$ нашлась бы такая подгруппа Миллера–Морено $K$, что $KZ(G) \triangleleft T$. Поэтому $\overline{N}$ неабелева. Но тогда $C_{\overline{G}}\overline{H} = \overline{H}$ и, как и выше, $G/Z(G)$ — диэдральная группа.

2. Группа $G$ обладает такой неабелевой подгруппой $H$, что $C(H)$ тоже неабелев. Заменяя, если это необходимо, $H$ на $C(C(H))$, можно считать, что $C(C(H)) = H$. Положим $K = H \cdot C(H)$. Тогда $Z(K) = Z(H) = H \cap C(H)$. Из леммы и теоремы 1 следует, что каждая из фактор-групп $H/Z(K)$ и $C(H)/Z(K)$ является либо четверной группой, либо диэдральной.

Пусть $H/Z(K) = \langle\overline{a}\rangle \times \langle\overline{b}\rangle$ и $C(H)/Z(K) = \langle\overline{c}\rangle \times \langle\overline{d}\rangle$ — четверные группы. Если $H' \neq C(H)'$, то $[a,b] \neq [c,d]$ и, следовательно, подгруппа $T = \langle ac, bd\rangle$ неабелева. Но

$$C_K(T) = Z(K) \leq T{\cdot}Z(K) \quad \text{и} \quad |N_K(T) : T{\cdot}Z(K)| > 2.$$

Поэтому $H' = C(H)'$ и $K = K_0{\cdot}Z(K)$, где $K_0$ — центральное произведение двух групп Миллера–Морено с объединенным коммутантом.

Пусть теперь $H/Z(H) = \langle\overline{a}\rangle\lambda\langle\overline{b}\rangle$, $C(H)/Z(K) = \langle\overline{c}\rangle\lambda\langle\overline{d}\rangle$ и $|\overline{a}| = 2^n > 2$. Обозначим через $\overline{c_0}$ элемент порядка 2 из $\langle\overline{c}\rangle$. Подгруппа $T = \langle a^2, c^2, c_0, bd\rangle Z(K)$ неабелева. Из $[\overline{c}, \overline{bd}] = [\overline{c}, \overline{d}] \leq \langle\overline{c^2}\rangle$ и $[\overline{a}, \overline{bd}] = [\overline{a}, \overline{b}] \leq \langle\overline{a^2}\rangle$ следует $T \triangleleft K$. Кроме того,

$$\overline{C_K(T)} = \overline{C_{\langle a,c\rangle}(bd)} = \langle\overline{a^{2^{n-1}}c_0}\rangle \leq \overline{T},$$

т. е. $T \cdot C_K(T) = T$. В то же время, $|K : T| \geq 4$. Аналогично приводится к противоречию случай $|\overline{c}| \geq 4$.

Покажем теперь, что $G = K$. Заметим, что из строения группы $K$ и теоремы 1 из [10] следует, что в группе $K$ каждая подгруппа, содержащая центр, является централизатором. Это означает, в частности, что если $H_1$ — неабелева подгруппа из $K$ и $|H_1/Z(K)| = 4$, то $K = H_1 \cdot C_K(H_1)$. Если $K \neq G$, то найдется подгруппа $T$ группы $G$ со свойством $|T : K| = 2$. Тогда $T = K\langle x\rangle$, $x^2 \in K$.

Пусть $A$ — максимальный абелев нормальный делитель группы $G$. Тогда $|G : A| = 4$. Предположим сначала, что $G = AH$. Тогда можно считать, что $x \in A$. Если $Z(H) \not\leq A$, то можно считать, что $a \in A$. В этом случае из $G = AH$ следует $G = \langle b, z\rangle A$, где $z \in Z(H)$. Но тогда $C(\langle b, z\rangle) = \langle b, z\rangle C_A(\langle b, z\rangle)$ абелев, что невозможно, т. к. $C(\langle b, z\rangle) > C(H)$. Поэтому $Z(H) \leq A$ и $A \cap H = Z(G)$.

Поскольку $C(c) = H(A \cap C(c))$, то $A$ содержит элемент $ch_1$ для некоторого $h_1 \in H$. Аналогично, $A$ содержит элемент $dh_2$, $h_2 \in H$. Из $[ch_1, dh_2] = 1$ следует $[h_1, h_2] = [c, d] = [a, b]$. Поэтому можно считать, что $h_1 = a$ и $h_2 = b$. Положим $a_1 = ac$ и $d_1 = bd$. Для подгруппы $H_1 = \langle a_1, b\rangle$ будем иметь $C(H_1) = \langle c, d_1\rangle Z(H)$. Из

$$[b, x] \in H_1C(H_1) \cap A = \langle a_1, d_1\rangle Z(H)$$

следует, что подгруппа $R = \langle a_1, d_1, b\rangle Z(H)$ нормальна в группе $T$. В то же время, $C(R) = \langle d_1\rangle Z(H)$ и $|T : R| = 4$.

Полученное противоречие показывает, что для любой неабелевой подгруппы $H$ из $K$ с условием $|H/Z(K)| = 4$ выполняется неравенство $G > AH$ и, следовательно, $H \cap A \not\leq Z(H)$. Так как $G = AK$, то можно считать, что $a, c, x \in A$. Положим $R = \langle ad, b\rangle Z(H)$. Тогда $R \cap A \not\leq Z(H)$, т. е. один из элементов $ad$, $b$, $adb$ должен принадлежать $A$. Но тогда $|T : A \cap T| = 2$, что противоречит тому, что $|K : A \cap K| = 4$. Таким образом, $G = K$, и утверждение п. 2 доказано.

В дальнейшем будем предполагать, что $|G/Z(G)| > 8$, централизатор любой неабелевой подгруппы абелев и индекс максимального абелева нормального делителя равен 4. Пусть $A$ — максимальный абелев нормальный делитель группы $G$ и $R$ — такая подгруппа из $G$, что $A < R < G$. Тогда $G = R\langle x\rangle$, $x^2 \in R$. Так как $R$ обладает абелевой подгруппой индекса 2, то в силу п. 1 доказательства теоремы фактор-группа $R/Z(R)$ является либо абелевой группой порядка не больше 8, либо диэдральной группой.

3. Фактор-группа $R/Z(R)$ неабелева. Пусть $R/Z(R) = \langle\overline{a}\rangle\lambda\langle\overline{b}\rangle$ — диэдральная группа. Подгруппа $\langle\overline{a}\rangle$ нормальна в $\overline{G} = G/Z(R)$. Поэтому $\overline{G}/C_{\overline{G}}(\overline{a})$ является циклической группой, т. е. либо $\overline{x}^2 = \overline{b}$, либо можно считать, что $\overline{x} \in C_{\overline{G}}(\overline{a})$. Если $\overline{x}^2 = \overline{b}$, то $G/Z(R) = \langle\overline{a}\rangle\lambda\langle\overline{x}\rangle$. Но тогда, как нетрудно видеть, $\langle\overline{a}\rangle\lambda\langle\overline{x}^2\rangle$ не может быть диэдральной группой. Поэтому $[a, x] \in Z(R)$.

Пусть $\overline{b}^{\overline{x}} = \overline{b}\overline{a}^{\alpha}$. Если число $\alpha$ нечетно, то можно считать, что $\alpha = 1$. Так как $R/Z(R)$ является диэдральной группой, то из

$$[\overline{b}, \overline{x}^2] = [\overline{b}, \overline{x}]^2 = \overline{a}^2 = [\overline{b}, \overline{a}]$$

следует, что $\overline{x^2} = \overline{a}$ и $G/Z(R) = \langle \overline{x} \rangle \lambda \langle \overline{b} \rangle$ — диэдральная или квазидиэдральная группа.

Так как в группе $G$ нет абелевых подгрупп индекса 2, то подгруппа $H = \langle x \rangle Z(R)$ неабелева. Но тогда $H/Z(H) = H/\langle \overline{a} \rangle Z(G)$ либо абелева, либо является диэдральной группой.

Предположим сначала, что $H/Z(H)$ неабелева. Так как $Z(R) \triangleleft G$, то $H/Z(H) = \langle \widetilde{z} \rangle \lambda \langle \widetilde{x} \rangle$, где $z \in Z(R)$, и $G/Z(H) = (\langle \widetilde{z} \rangle \lambda \langle \widetilde{x} \rangle) \langle \widetilde{b} \rangle$, $\widetilde{b}^2 \in \langle \widetilde{z} \rangle$. Если $\widetilde{b}^2 \in \langle \widetilde{z}^2 \rangle$, то $\langle \widetilde{b}, \widetilde{z} \rangle = \langle \widetilde{z} \rangle \times \langle \widetilde{b}_1 \rangle$, и мы можем считать, что $\langle \widetilde{b} \rangle \cap \langle \widetilde{z} \rangle = 1$. В этом случае из $[\widetilde{b}, \widetilde{x}] \in \widetilde{R} \cap \widetilde{H} = \langle \widetilde{z} \rangle$ и $[\widetilde{b}^2, \widetilde{x}] = 1$ следует, что $[\widetilde{b}, \widetilde{x}] \in \langle \widetilde{z}^2 \rangle$. Но тогда подгруппа $T = \langle z^2, x \rangle Z(G)$ — инвариантная в $G$ неабелева подгруппа, $C(T) = \langle a \rangle Z(G)$ и $|G : T| = 4$. Поэтому можно считать, что $\widetilde{b}^2 = \widetilde{z}$. В этом случае, как нетрудно видеть, $G$ — группа типа 5).

Предположим теперь, что группа $H/Z(H)$ абелева. Пусть $[x, b] = a^{\beta} z$, $z \in Z(R)$. Если $z \in Z(G)$ и $t$ — такой элемент из $Z(R) \setminus Z(G)$, что $t^2 \in Z(G)$ и $[t, x] \in Z(G)$, то подгруппа $T = \langle t, x \rangle Z(G)$ инвариантна в $G$ и из $|G : T \cdot C(T)| = |G : T| \leq 2$ следует $Z(R) = \langle t \rangle Z(G)$, т.е. $G$ — группа типа 4). Если же $z \notin Z(G)$, то из $[z, x] \in Z(G)$ и $[z, x^2] = 1$ следует $z^2 \in C(x) \cap Z(R) = Z(G)$. Так как подгруппа $T = \langle z, x \rangle Z(G)$ инвариантна в $G$, то из условия $(*)$ получим $Z(R) = \langle z \rangle Z(G)$ и $G$ — группа типа 6).

Предположим теперь, что число $\alpha$ четно. Тогда подгруппа $\overline{H} = \langle \overline{a^2} \rangle \lambda \langle \overline{b} \rangle$ инвариантна в $\overline{G}$. Так как $H$ неабелева, то $|G : HC(H)| \leq 2$. В то же время, $|G : H| = 4$. Поэтому можно считать, что $x \in C(H)$. Отсюда следует, что $Z(G) = Z(R)$, $G/Z(G) = (\langle \overline{a} \rangle \lambda \langle \overline{b} \rangle) \times \langle \overline{x} \rangle$ и $[a^2, x] = [b, x] = 1$, т. е. $G$ — группа типа 4).

4. $|R/Z(R)| = 4$. Пусть $R/Z(R) = \langle \overline{a} \rangle \times \langle \overline{b} \rangle$ и $G = R\langle x \rangle$, $x^2 \in R$. Так как $|G/Z(G)| > 8$, то $Z(R) > Z(G)$, т. е. $C(x) \cap Z(R) = Z(G)$. Из $|G/Z(R)| = 8$ следует, что $G/Z(R)$ является либо абелевой группой, либо группой диэдра.

Предположим сначала, что $G/Z(R) = \langle \overline{x} \rangle \times \langle \overline{b} \rangle$, $x^2 = a$. Пусть $H = \langle x \rangle Z(R)$. Тогда $Z(H) = \langle a \rangle Z(G)$ и $H$ имеет абелеву подгруппу $\langle a \rangle Z(R)$ индекса 2. Как и выше, $H/\langle a \rangle Z(G) = \widetilde{Z(R)} \lambda \langle \widetilde{x} \rangle$. В то же время, $[x, b] \in Z(R)$. Повторяя приведенные выше рассуждения, получим, что либо $|Z(R)/Z(G)| = 2$ и $|G/Z(G)| = 16$, либо $H/\langle a \rangle Z(G) = \langle \widetilde{z} \rangle \lambda \langle \widetilde{x} \rangle$ — группа диэдра и $[\widetilde{b}, \widetilde{x}] = \widetilde{z}$. В последнем случае из $[\widetilde{b}^2, \widetilde{x}] = \widetilde{z}^2$ следует, что можно считать $\langle \widetilde{z} \rangle = \langle \widetilde{b}^2 \rangle$, и $G$ — группа типа 7).

Пусть теперь $G/Z(R) = \langle \overline{a} \rangle \times \langle \overline{b} \rangle \times \langle \overline{x} \rangle$ — элементарная абелева группа. Подгруппа $H = \langle x \rangle Z(R)$ неабелева и инвариантна в $G$. В силу условия $(*)$ можно считать, что $a \in C(x)$. Если $b \in C(x)$, то $C(\langle a, b \rangle) = \langle x \rangle Z(R)$ неабелев, что противоречит сделанному выше предположению. Поэтому $[b, x] \neq 1$. Заменяя элемент $x$ на $bx$, получим $abh \in C(bx)$ для некоторого $h \in Z(R)$. Заметим, что

$$[b, a]^x = [b^x, a] = [b[b, x], a] = [b, a],$$

т. е. $[b, a] \in Z(R) \cap C(x) = Z(G)$. Но тогда из

$$1 = [bx, abh] = [b, a][x, bh] = [bh, a][bh, x]^{-1}$$

следует $a^{-1}x \in C(bh)$. Поэтому можно считать, что $a^{-1}x \in C(b)$. Обозначим через $y$ такой элемент из $Z(R) \setminus Z(G)$, что $y^2 \in Z(G)$ и $[y, x] \in Z(G)$. Подгруппа $K = \langle x, y \rangle Z(G)$ неабелева и инвариантна в $G$. Из

$$C(K) = R \cap C(x) = \langle a \rangle Z(G) \quad \text{и} \quad |G : KC(K)| \leq 2$$

снова получим $|Z(R)/Z(G)| = 2$ и $|G/Z(G)| = 16$.

Предположим, наконец, что $G/Z(R) = \langle \overline{x} \rangle \lambda \langle \overline{b} \rangle$ — группа диэдра, $x^2 = a$. Из $\overline{x}^{\overline{b}} = \overline{x}^{-1}$ следует $x^b = x^{-1}h$, где $h \in Z(R)$. Тогда

$$x^{b^2} = (x^{-1})^b h = (x^{-1}h)^{-1} h = x^h,$$

т. е. $b^2 h^{-1} \in C(b) \cap C(x) = Z(G)$. Поэтому $x^b \equiv x^{-1} b^2 \pmod{Z(G)}$. Если $b^2 \in Z(G)$, то, как и выше, взяв такой элемент $z \in Z(R) \setminus Z(G)$, что $z^2 \in Z(G)$ и $[z, x] \in Z(G)$, из условия $(*)$ получим $|G/Z(G)| = 16$. Если же $b^2 \notin Z(G)$, то $G$ — группа типа 5).

Итак, осталось рассмотреть случай $|G/Z(G)| = 16$. Так как $G$ не содержит абелевых подгрупп индекса 2 и фактор-группа по центру не может быть центральным произведением $Q_8$ и $Z_4$, то из описания групп порядка 16 (см., напр., [11], с. 99) следует, что в этом случае либо $G/Z(G) \cong Q_8 \times Z_2$, либо $G/Z(G) = \langle\overline{a}\rangle\lambda\langle\overline{b}\rangle$, $|\overline{a}| = |\overline{b}| = 4$. Если в первом случае $H/Z(G) = \Omega(G/Z(G))$, то подгруппа $H$ не может быть абелевой. А так как $H \triangleleft G$, то получим противоречие с условием $(*)$. Во втором случае из этих же соображений следует, что подгруппа $\langle a^2, b^2\rangle$ должна быть абелевой, т. е. $G$ — снова группа типа 7).

5. $|R/Z(R)| = 8$. Покажем сначала, что в этом случае $|G/Z(G)| = 16$, а затем снова используем описание групп порядка 16.

Если $R/Z(R) = \langle\overline{a}\rangle \times \langle\overline{b}\rangle$, $\overline{a}^4 = \overline{b}^2 = 1$ и $G = R\langle x\rangle$, то подгруппа $H = \langle a^2, b\rangle Z(R)$ неабелева и инвариантна в группе $G$. В силу условия $(*)$ можно считать, что $x \in C(H)$. Но тогда $Z(G) = Z(R)$ и $|G/Z(G)| = 16$.

Предположим теперь, что $R/Z(R) = \langle\overline{a}\rangle \times \langle\overline{b}\rangle \times \langle\overline{c}\rangle$ — элементарная абелева группа, $G = R\langle x\rangle$, $\overline{A} = \langle\overline{a}\rangle \times \langle\overline{b}\rangle$ и $Z(R) > Z(G)$. Если $x^2 \notin A$, то можно считать, что $x^2 = c$. В этом случае если $\overline{a} \in Z(G/Z(R))$, то подгруппа $H = \langle a, c\rangle Z(R)$ неабелева и инвариантна в $G$. В то же время, из

$$C(H) = C(a) \cap C(c) = A \cap C(c) = Z(R)$$

следует $|G : HC(H)| = 4$. Поэтому $x^2 \in A$.

Если $G/Z(R)$ абелева, то $H = \langle x\rangle Z(R)$ — неабелева инвариантная подгруппа. В силу условия $(*)$ можно считать, что либо $\langle a, b\rangle \in C(H)$, либо $\langle b, c\rangle \in C(H)$. Второй случай невозможен, т. к. подгруппа $\langle b, c\rangle$ неабелева. Следовательно, $\langle a, b\rangle \in C(H)$. Если $\overline{K} = \langle\overline{b}, \overline{c}\rangle$, то $K$ неабелева и поэтому $|G : KC(K)| \leq 2$. Но

$$\overline{K} \cdot \overline{C(K)} = \overline{K} \cdot \overline{C_{\langle a,x\rangle}c},$$

поэтому один из элементов $a$, $x$ или $ax$ должен принадлежать $C(c)$. Но тогда этот элемент должен лежать в $C(\langle a, b, c\rangle) = Z(R)$, что невозможно. Таким образом, $G/Z(R)$ неабелева. Но тогда ([11], с. 99) $G/Z(R)$ обладает абелевой подгруппой типа $(2, 4)$. Поэтому можно считать, что $x^2 = a$. Тогда $\overline{C(a)} = \langle\overline{x}\rangle\lambda\langle\overline{b}\rangle$ и из описания групп порядка 16 следует, что либо

$$G/Z(R) = (\langle\overline{x}\rangle\lambda\langle\overline{b}\rangle) \times \langle\overline{c}\rangle,$$

либо

$$G/Z(R) = (\langle\overline{x}\rangle \times \langle\overline{b}\rangle)\lambda\langle\overline{c}\rangle,$$

где $[\overline{x}, \overline{c}] = b$, $[\overline{b}, \overline{c}] = 1$.

В первом случае подгруппа $H = \langle x\rangle Z(R)$ инвариантна в $G$ и из $[b, c] \neq 1$ и условия $(*)$ следует $b \in C(H)$, что противоречит неабелевости $G/Z(R)$. А во втором случае $H = \langle b, c\rangle Z(R) \triangleleft G$, $C(H) = Z(R)$ и $|G : HC(H)| = 4$, что противоречит условию $(*)$.

Полученные противоречия доказывают, что в рассматриваемом случае $Z(G) = Z(R)$ и $|G/Z(G)| = 16$. Если $G/Z(G)$ абелева, то снова получим противоречие с условием $(*)$. Поэтому с учетом уже рассмотренных выше случаев строения фактор-группы $G/Z(G)$ и описания групп порядка 16 остается рассмотреть случай, когда

$$G/Z(G) = (\langle\overline{u}\rangle \times \langle\overline{v}\rangle)\lambda\langle\overline{v}\rangle, \quad \overline{u}^4 = \overline{v}^2 = \overline{x}^2 = 1, \quad [\overline{u}, \overline{x}] = \overline{v}, \quad [\overline{u}, \overline{v}] = [\overline{v}, \overline{x}] = 1.$$

Выберем соответствующие представители смежных классов так, чтобы выполнялось равенство $[u, x] = v$. Если подгруппа $\langle u^2, v\rangle$ неабелева, то можно считать, что $x \in C(\langle u^2, v\rangle)$. Но тогда из

$$1 = [u^2, x] = [u, x]^u[u, x] = v^uv$$

следует $v^u = v^{-1}$. Отсюда $v^{u^2} = v$, что противоречит нашему предположению, поэтому $[u^2, v]$=1. Если $[u, v] = 1$, то $G$ обладает абелевой подгруппой $C(v)$ индекса 2 и должно выполняться неравенство $|G/Z(G)| \leq 8$. Следовательно, $[u, v] \neq 1$. Предположим теперь, что подгруппа $R = \langle v, x\rangle$ неабелева. В этом случае из $RZ(G) \triangleleft G$ следует $C(R) \not\leq R$, т. е. можно считать, что

$u^2 \in C(R)$. Но тогда $u^2 \in Z(G)$, что невозможно. Поэтому группа $\langle v, x\rangle$ тоже абелева и $G$ — группа типа 5).

**Следствие.** Если $G$ — неабелева нильпотентная группа, в которой условие $(*)$ выполняется для любой неабелевой подгруппы $A$, то $G = K \times H$, где $H$ — неабелева силовская $p$-подгруппа, строение которой определено в теореме 3, а группа $K$ абелева.

**Доказательство.** Из леммы и теоремы 1 следует, что в группе $G$ только одна силовская подгруппа может быть неабелевой. $\square$

**Теорема 4.** *Пусть $G$ — ненильпотентная группа, в которой для любой неабелевой подгруппы $A$ выполняется неравенство $(*)$. Тогда имеет место один из следующих случаев:*

1) *$G = K\lambda H$, силовская 2-подгруппа $H$ либо абелева, либо удовлетворяет утверждению теоремы 3, и либо $|H : C_H(K)| = 4$ и группа $K \times C_H(K)$ абелева, либо $|H : C_H(K)| \leq 2$, а группа $K \times C_H(K)$ либо абелева, либо имеет строение, указанное в следствии из теоремы 3;*
2) *$G$ имеет абелеву нормальную подгруппу простого индекса $p$ и силовская $p$-подгруппа $P$ группы $G$ абелева;*
3) *$G = (K\lambda P)\langle x\rangle$, $K\lambda P$ — группа из п. 2), $x^2 \in K$ и группа $P\lambda\langle x\rangle$ неабелева;*
4) *$G = Z(G) \times K$, где $K \cong PSL(2, 2^n)$, $(2^n - 1)$ — простое число, или $K \cong PSL(2, 9)$;*
5) *$G$ обладает таким рядом $Z(G) \leq Z(H) < H < G$, что $H = Z(H) \times K$, где $K \cong A_5$, и $G/Z(H) \cong S_5$.*

**Доказательство**. Рассмотрим сначала случай разрешимой группы $G$. Пусть $F = F(G)$ — подгруппа Фиттинга группы $G$. Тогда $C(F) \leq F$. Если подгруппа $F$ неабелева, то $|G : F| = 2$ и $G$ — группа из п. 1).

Предположим, что подгруппа $F$ абелева и $R/F$ — минимальный нормальный делитель группы $G/F$. Тогда $R/F = \prod_{i=1}^{k} \langle\overline{a_i}\rangle$ — элементарная абелева $p$-группа. Так как $\langle a_1\rangle F$ — неабелева нормальная подгруппа группы $R$, то $|R : \langle a_1\rangle F| \leq 2$. Поэтому либо $k = 1$, либо $k = 2$ и $p = 2$.

Пусть $p \neq 2$. Тогда $R = F\langle y\rangle$, $y^p \in F$, и $R = K\lambda P$, где $K$ — холлова $p'$-подгруппа группы $R$. Так как группа $R$ не нильпотентна, то $y \notin C(K)$ и подгруппа $H = K\lambda\langle y\rangle$ неабелева. Но тогда $|N_R(H) : HC_R(H)| \leq 2$. Из

$$N_R(H) = K\lambda N_P(\langle y\rangle) \quad \text{и} \quad C_R(H) = C_F(y) = C_K(y)\lambda C_P(y)$$

следует $|N_P(\langle y\rangle) : C_P(y)| \leq 2$, т.е. $N_P(\langle y\rangle) = C_P(y)$. Полагая теперь $H = K\lambda C_P(y)$, аналогично получим $N_P(C_P(y)) = C_P(y)$ и, следовательно, $C_P(y) = P$. Это означает, что группа $P = (F \cap P)\langle y\rangle$ абелева.

Если $G \neq R$, то $|G : R| = 2$ и $G = R\langle x\rangle$, $x^2 \in R$. В силу леммы Фраттини можно считать, что $x \in N(P)$. Если $[P, x] = 1$, то подгруппа $H = K\lambda\langle x\rangle$ неабелева и из $P \leq N(H)$ следует $P \leq C(H)$, т.е. $P \leq C(K)$, что невозможно.

Предположим теперь, что $p = 2$. Если $R = G$ или $|R : F| = 2$, то $|G : F| \leq 4$. Пусть $G > R$ и $R/F$ — четверная группа. Тогда $|G/F| = 8$ и, следовательно, найдется инвариантная в $G$ подгруппа $H$ со свойством $|H/F| = 2$. Но тогда $|N(H) : HC(H)| = 4$, что противоречит условию теоремы.

Рассмотрим теперь случай неразрешимой группы $G$. Пусть $F = F(G)$ — подгруппа Фиттинга группы $G$, а $F^* = F^*(G)$ — обобщенная подгруппа Фиттинга. Если $F = F^*$, то $C(F) \leq F$. Так как $G$ неразрешима, то $|G : F| > 2$ и, следовательно, группа $F$ абелева. Если $H$ — такая подгруппа из $G$, что $H > F$, то $H$ неабелева. Поэтому

$$|N(H) : H| = |N(H) : HC(H)| \leq 2.$$

Но тогда в неразрешимой группе $G/F$ неравенство $|N(\overline{H}) : \overline{H}| \leq 2$ должно выполняться для любой неединичной подгруппы $\overline{H}$, что противоречит теореме 1.

Таким образом, $F^* > F$. Пусть $F^* = F \cdot L$, где $L$ — слой группы $G$. Из леммы и теоремы 1 следует, что группа $F$ абелева и $F^*/F$ — простая группа. По условию $|G : F^*| \leq 2$. Предположим сначала, что $G = F^*$. Так как фактор-группа $G/Z(G)$ тоже удовлетворяет условию теоремы, то будем предполагать, что $Z(G) = 1$, т. е. $G$ — простая группа.

Предположим, что $G$ — группа типа Ли над полем $GF(p^k)$. Пусть $B = P\lambda H$ — подгруппа Бореля группы $G$. Тогда из условия $(*)$ следует, что либо $H = 1$, либо $|H|$ — простое число, либо силовская $p$-подгруппа $P$ абелева и $|H| = 4$. В частности (см. [6], теорема 3.13), отсюда следует, что при $H \neq 1$ лиевский ранг $l$ группы $G$ равен 1, т. е. ([6], теорема 3.39) $G$ изоморфна одной из групп $PSL(2, p^k)$, $PSU(3, p^k)$, $Sz(2^{2n+1})$ или группе Ри ${}^2G_2(3^n)$.

В группе $PSL(2, p^k)$ порядок подгруппы Картана $H$ равен $\frac{p^k-1}{(2,p^k-1)}$. Поэтому либо $p = 2$ и $(2^k - 1)$ — простое число, либо $p^k \in \{5, 9\}$. Но $PSL(2, 5) \cong PSL(2, 4)$.

Если $G \cong PSU(3, p^{2n})$ и $P$ — силовская $p$-подгруппа из $G$, то $|N(P) : P| = (p^{2n} - 1)/d$, где $d = (p^n + 1, 3)$, что возможно только в случае $p^{2n} = 4$. Но группа $PSU(3, 4)$ не проста. В группе $Sz(2^n)$ для силовской 2-подгруппы $P$ выполняется равенство $|N(P) : P| = 2^n - 1$, что противоречит условию $(*)$. А в группах Ри для силовской 3-подгруппы $P$ выполняется равенство $|N(P) : P| = 3^n - 1$, т. е. $n = 1$. Остается заметить, что группа ${}^2G_2(3)$ не проста.

Предположим теперь, что $H = 1$. Так как $|H| = \frac{1}{d}(p^k - 1)^l$ для присоединенных групп и $|H| = \frac{1}{d}\prod_{i=1}^{t}(q - \eta_i)$ для скрученных групп Ли (см. [12], сс. 121, 251), где $\eta_i$ — собственные числа изометрии, порожденной симметрией диаграммы Дынкина соответствующей присоединенной группы, а $t$ — ранг этой присоединенной группы, то $G$ — присоединенная группа над полем $GF(2)$. Используем обозначения из [12]. Группа $G_2(2)$ не проста, а $(G_2(2))' \cong PSU(3, 3^2)$, т. е. в этом случае получим противоречие с условием $(*)$. Так как $B_2(2) \cong C_2(2) \cong S_6$, а в группе $S_6$ силовская 3-подгруппа имеет индекс 8 в своем нормализаторе, то и этот случай противоречит условию $(*)$. Но тогда невозможны и случаи $B_n(2)$ и $C_n(2)$ при $n > 2$. Так как группа $PSL(2, 7)$ не удовлетворяет условию $(*)$, то из $A_2(2) \cong PSL(2, 7)$ следует, что и случай $G \cong A_n(2)$ при $n > 1$ тоже невозможен.

Предположим теперь, что $G \cong A_n$. Если $n = 5$ или 6, то $G \cong PSL(2, 4)$ или $PSL(2, 9)$ соответственно. Если же $n > 6$, то $G$ содержит подгруппу, изоморфную $A_3 \times A_4$, что противоречит условиям леммы и теоремы 1. Наконец, $G$ не может быть спорадической простой группой, т. к. в этом случае условие $(*)$ нарушается в централизаторе инволюции (см. [6], таблицы 2.2 и 3.1).

Таким образом, $F^*/F \cong PSL(2, q)$, где $q = 9$ или $q = 2^n$ и число $(2^n - 1)$ простое. Предположим сначала, что $F^* = G$. Тогда $G = G' \cdot Z(G)$ и $G' \cap Z(G)$ является гомоморфным образом мультипликатора Шура группы $G/Z(G)$. Если $q = 2^n > 4$, то мультипликатор Шура тривиален и, следовательно, $G = G' \times Z(G)$. Покажем, что и в случае $q \in \{4, 9\}$ выполняется равенство $G' \cap Z(G) = 1$.

Предположим противное. Если $q = 4$, то $G' \cong SL(2, 5)$. Но в группе $SL(2, 5)$ силовская 2-подгруппа неабелева и отлична от своего нормализатора, что противоречит условию $(*)$. Так как порядок мультипликатора Шура группы $PSL(2, 9)$ равен 6, то в этом случае $|G' \cap Z(G)| \in \{2, 3, 6\}$. Если $|G' \cap Z(G)|$ делится на 3, то силовская 3-подгруппа группы $G$ неабелева, и снова получим противоречие с условием $(*)$. Если же $|G' \cap Z(G)| = 2$, то $G' \cong SL(2, 9)$. Но тогда $G$ содержит подгруппу $SL(2, 3)$, в которой силовская 2-подгруппа неабелева и инвариантна. Таким образом, в любом случае $G' \cap Z(G) = 1$ и $G = G' \times Z(G)$.

Предположим теперь, что $F^* \neq G$. Тогда $|G : F^*| = 2$. Пусть $x \in G \backslash F^*$. Если $[F^*, x] \leq F$, то по лемме о трех коммутантах получим $[F^*, x] = [F^*, F^*, x] = 1$, что невозможно в силу $C(F^*) = F$. Поэтому $x$ индуцирует нетривиальный автоморфизм группы $F^*/F$. Так как

$$\mathrm{Aut}(PSL(2, 2^n)) = PSL(2, 2^n)\lambda\langle y\rangle, \quad |y| = n$$

и $|G : F^*| = 2$, то число $n$ должно быть четным. Но тогда из простоты числа $2^n - 1$ следует, что $n = 2$. Остается заметить, что $\mathrm{Aut}(PSL(2, 4)) \cong S_5$. Если же $q = 9$, то $G/F$ изоморфна либо $PGL(2,9)$, либо группе вида $PSL(2,9)\lambda\langle\tau\rangle$, где $\tau$ — полевой автоморфизм. В любом из этих случаев силовская 3-подгруппа из $G/F$ имеет индекс 8 в своем нормализаторе, что снова приводит к противоречию с условием $(*)$.

## Литература


1. Gilotti A.L., Tiberio U. *On the Fitting length of NC-groups* // Geom. dedic. – 1991. – V. 40. — № 1. – P. 217–224.
2. Антонов В.А. *Локально конечные группы с малыми нормализаторами* // Матем. заметки. – 1987. – Т. 41. – № 3. – С. 296–302.
3. Антонов В.А. *Локально конечные группы с малыми нормализаторами.* 2 // Изв. вузов. Математика. – 1989. – № 1. – С. 12–14.
4. Smith S.D., Tyrer A.P. *On finite groups with a certain Sylow normalizer.* 1, 2 // J. Algebra. – 1973. – V. 26. – № 2. – P. 343–367.
5. Холл М. *Теория групп.* – М.: Ин. лит., 1962. – 468 с.
6. Горенстейн Д. *Конечные простые группы. Введение в их классификацию.* – М.: Мир, 1985. – 352 с.
7. Gorenstein D., Walter J.H. *The characterization of finite groups with dihedral Sylow 2-subgroups.* 1 // J. Algebra. – 1965. – V. 2. – № 1. – P. 85–151.
8. Gorenstein D., Walter J.H. *The characterization of finite groups with dihedral Sylow 2-subgroups.* 2 // J. Algebra. – 1965. – V. 2. № 2. – P. 218–270.
9. Gorenstein D., Walter J.H. *The characterization of finite groups with dihedral Sylow 2-subgroups.* 3 // J. Algebra. – 1965. – V. 2. – № 3. – P. 354–393 (Corrections. – 1969. – V. 11. – № 2. – P. 315–318).
10. Антонов В.А. *Группы типа Гашюца и близкие к ним группы* // Матем. заметки. – 1980. – Т. 27. – № 6. – С. 839–857.
11. Suzuki M. *Group theory.* 2. – New York – Berlin – Heidelberg – Tokyo: Springer-Verlag, 1986. – 621 p.
12. Carter R.G. *Simple groups of Lie type.* – John Wiley & Sons: London – New York – Sydney – Toronto, 1972. – 331 p.



*Южно-Уральский*
*государственный университет*



*Поступила*
26.12.2000