ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1997 МАТЕМАТИКА № 9 (424)

УДК 514.76

Н.К. ФАРАФОНОВА

ГЕОМЕТРИЯ ГРАССМАНОВА РАССЛОЕНИЯ. I

Введение

Изучение геометрии тотального пространства расслоения приобрело самостоятельное значение после работ 50-х годов Б.Л. Лаптева и Сасаки, история этих вопросов освещена в обзорах [1] и [2]. Целью этой статьи является установление связи между геометрическими характеристиками грассманова расслоения и римановым многообразием служащим его базой. При этом грассманово расслоение наделяется естественной римановой метрикой, геометрический смысл которой был исследован автором в [6]. Аналогичная задача для касательного, сферического и нормального расслоений, а также расслоения реперов решалась Сасаки, Домбровским, Моком, Ямпольским и другими авторами. Подробная информация о полученных по этой проблеме результатах имеется в третьем параграфе [2]. В первой части статьи строится образующая система векторных полей грассманова расслоения, свойства которой позволяют связать геометрические характеристики базы и тотального пространства расслоения. Основной технической трудностью, которую пришлось преодолеть для грассманова расслоения, была задача построения специальных векторных полей грассманова расслоения, являющихся лифтами кососимметрических тензорных полей (определение 2.2). Всюду в дальнейшем римановы многообразия предполагаются гладкими, класса C^∞, как само многообразие, так и его риманова метрика, и всюду действует правило Эйнштейна.

1. Кососимметрические тензоры на римановом многообразии

Этот параграф посвящен краткому изложению как хорошо известных, так и специально здесь вводимых понятий и свойств для (1,1)-тензоров на римановом многообразии M с римановым метрическим тензором g, которые будут широко использоваться в качестве технических средств в § 3 для описания геометрии грассманова расслоения. Наиболее подходящей нашим целям интерпретацией 1-контравариантного и 1-ковариантного тензорного поля будет служить операторная интерпретация ([3], гл. 1, пр. 3.1), согласно которой тензорное поле Q типа (1,1) является линейным отображением модуля гладких векторных полей на M в себя. При этом (1,1)-тензор в точке $u_0 = (u_0^a)$ многообразия M является линейным оператором

$$Q = Q_a^b du^a \otimes \frac{\partial}{\partial u^b} : T_{u_0}M \to T_{u_0}M \tag{1}$$

в касательном пространстве. Компоненты этого тензора $Q_a^b(u)$ относительно координат u^b являются гладкими функциями этих координат. (1,1)-тензорное поле Q называется кососимметрическим на многообразии M, если оно кососимметрично в каждом касательном пространстве относительно скалярного произведения, индуцированного римановой метрикой

$$g(QX, Y) + g(X, QY) = 0, \tag{2}$$

где X и Y — любые касательные векторы к M. В дальнейшем, если не оговорено противное, будем называть кососимметрические тензорные поля типа (1,1) просто кососимметрическими, и если из контекста понятно, относительно какого базиса рассматривается матрица линейного оператора или квадратичная форма, то их матрица будет обозначаться той же буквой, что и оператор или квадратичная форма.

Мы будем рассматривать компоненты S_a^b (1,1)-тензора S и относительно произвольного (не обязательно координатного) поля реперов $E = (E_1, \dots, E_n)$, однозначно определяемые формулой

$$S = S_a^b \chi^a \otimes E_b, \tag{3}$$

где $\chi = (\chi^a)$ — кореперное поле двойственное к E, аналогичной формуле (1).

Классическое отождествление $\mathbf{\Lambda}^2(M)$ с пространством $E(M)$ кососимметрических эндоморфизмов для T_uM, ([3], с. 152; [4], с. 317) позволяет для любой пары векторных полей X и Y на многообразии M определить формулой

$$X \wedge Y(U) := \frac{1}{2}(g(U,Y)X - g(U,X)Y) \tag{4}$$

кососимметрическое тензорное поле, отвечающее разложимому бивектору $X \wedge Y$. Очевидно, что в некоторой окрестности каждой точки многообразия существует базис в модуле кососимметрических тензорных полей, составленный из $\frac{n(n-1)}{2}$ кососимметрических тензорных полей $U_a \wedge U_b$, отвечающих разложимым бивекторам. Например, выберем в качестве U_a координатные векторы $\frac{\partial}{\partial u_a}$. В дальнейшем для краткости будем называть кососимметрические тензорные поля, отвечающие разложимому бивектору, просто разложимыми бивекторами. В дальнейшем скобочная операция от кососимметрических тензоров — это всегда операторный коммутатор, а от векторных полей — это скобка Ли. Следующее предложение описывает операторные свойства разложимых бивекторов.

Предложение 1.1. *Пусть Q — произвольное кососимметрическое тензорное поле, а X, Y, Z — произвольные векторные поля на римановом многообразии M. Тогда*

а) $[Q, X \wedge Y] = QX \wedge Y + X \wedge QY$;
б) $\underset{(X,Y,Z)}{S} X \wedge Y(Z) = X \wedge Y(Z) + Y \wedge Z(X) + Z \wedge X(Y) = 0$.

Следствие 1.1. Если векторные поля X, Y, U, W на римановом многообразии M таковы, что X и Y ортогональны U и W, то
а) $[X \wedge W, Y \wedge W] = -\frac{1}{2}\|W\|^2 X \wedge Y$, б) $[X \wedge Y, U \wedge W] = 0$.

Пользуясь стандартным определением продолжения риманова метрического тензора g на всю алгебру тензоров $\mathbb{T}(M)$ ([3], с. 152), приведем метрические свойства кососимметрических тензоров.

Предложение 1.2. *Для любых кососимметрических тензорных полей P, Q и S и любых векторных полей X, Y на римановом многообразии M имеют место следующие равенства: а) $g(Q,S) = -\operatorname{Tr} QS$, б) $g(Q, X \wedge Y) = g(QY, X)$, в) $g([Q,S],P) + g(S,[Q,P]) = 0$, где Tr — следный функционал.*

Доказательство а) ([3], гл. 4, § 1, пример 1.6). б) В плоскости, натянутой на векторы X и Y, выберем орты U и V. Дополним их ортонормальными векторами до базиса в касательном пространстве. Причем на этих дополнительных векторах разложимый бивектор $X \wedge Y$ действует тривиально. Тогда, воспользовавшись равенством а) и тем, что след не зависит от базиса, в котором он вычисляется, получим

$$g(Q, X \wedge Y) = -\operatorname{Tr} Q \circ X \wedge Y = -(g(Q \circ X \wedge Y(U), U) + g(Q \circ X \wedge Y(V), V)) =$$
$$= -\frac{1}{2}(g(U,Y)g(QX,U) - g(U,X)g(QY,U) + g(V,Y)g(QX,V) -$$
$$-g(V,X)g(QY,V)) = -\frac{1}{2}(g(g(QX,U)U + g(QX,V)V, Y) - g(g(QY,U)U +$$
$$+g(QY,V)V, X)) = -\frac{1}{2}(g(QX,Y) - g(QY,X)) = g(QY,X).$$

в) Из свойства а) и инвариантности следного функционала имеем

$$g([Q,S],P) + g(S,[Q,P]) = -\operatorname{Tr}[Q,S]P - \operatorname{Tr} S[Q,P] = 0. \quad \square$$

Следствие 1.2. $g(X \wedge Y, X \wedge Y) = \frac{1}{2}(\|X\|^2\|Y\|^2 - g(X,Y)^2)$.

Пусть ∇_X — ковариантная производная римановой связности на M, которая стандартным образом определяется на модуле всех тензорных полей и сохраняет кососимметричность (1,1)-тензоров. В дальнейшем будет использоваться матричное равенство для ковариантной производной (1,1)-тензорного поля Q вдоль векторного поля Y, заданных матрицей и вектор-столбцом их компонент относительно произвольного реперного поля E

$$\nabla_Y Q = dQ(Y) + \Gamma(Y)Q - Q\Gamma(Y), \tag{5}$$

где $\Gamma(Y) = \Gamma(\chi)(Y)$ — матрица значений компонент матрицы Кристоффеля ([5], § 2) относительно реперного поля E, т. е. значений 1-форм, на векторе Y. Дифференциал матрицы dQ понимается, как обычно, покомпонентно, т. е. это матрица 1-форм на многообразии M. Для матрицы Кристоффеля $\Gamma(\chi)$ выполняется следующее часто используемое свойство: относительно ортонормального реперного поля E она является кососимметрической, т. е. $\Gamma^t(\chi) = -\Gamma(\chi)$.

Пусть $R(X,Y)$ — преобразование кривизны, которое мы будем рассматривать продолженным на всю алгебру тензоров $\mathbb{T}(M)$ на римановом многообразии M:

$$R(X,Y)Q = \nabla_X\nabla_Y Q - \nabla_Y\nabla_X Q - \nabla_{[X,Y]}Q. \tag{6}$$

С учетом отождествления (4) пространства бивекторов с пространством кососимметрических тензоров определим оператор кривизны ρ, как самосопряженный эндоморфизм в пространстве кососимметрических тензоров формулой $\rho(X \wedge Y) := R(X,Y)$. Самосопряженность, выраженная формулой

$$g(R(X,Y)Z,W) = g(R(Z,W)X,Y), \tag{7}$$

следует из последнего в ряду четырех алгебраических свойств $R(X,Y)$, приведенных в ([3], гл. V). Очевидно, что на основании предложения 1.2 б) для оператора кривизны выполняется свойство

$$g(\rho(X \wedge Y), U \wedge V) = g(R(X,Y)V,U). \tag{8}$$

Предложение 1.3. *Для любых кососимметрических тензоров Q и S на римановом многообразии M и любых векторов X, Y и Z выполняются равенства:*

$$\begin{array}{ll} \text{а) } g(\rho(Q),S) = g(Q,\rho(S)), & \text{б) } g((\nabla_Z\rho)(Q),S) = g(Q,(\nabla_Z\rho)(S)), \\ \text{в) } R(X,Y)Q = [R(X,Y),Q], & \text{г) } \nabla_X[Q,S] = [\nabla_X Q,S] + [Q,\nabla_X S]. \end{array}$$

Доказательство. В силу линейности отображений рассматриваемых в свойствах а)–в), достаточно доказать эти равенства для случая, когда кососимметрические тензоры Q и S отождествляются по формуле (4) с разложимыми бивекторами, которые образуют базис.

а) Из формул (7) и (8) следует, что $g(\rho(X \wedge Y), U \wedge V) = g(R(X,Y)V,U) = g(R(V,U)X,Y) = g(X \wedge Y, \rho(U \wedge V))$.

б) Из определения ковариантной производной от тензорного поля

$$\begin{aligned} g((\nabla_Z\rho)(X \wedge Y), U \wedge V) &= g(\nabla_Z\rho(X \wedge Y), U \wedge V) - g(\rho(\nabla_Z(X \wedge Y)), U \wedge V) = \\ &= g(\nabla_Z\rho(X \wedge Y), U \wedge V) - g(\rho(\nabla_Z X \wedge Y), U \wedge V) - g(\rho(X \wedge \nabla_Z Y), U \wedge V) = \\ &= g(\nabla_Z R(X,Y), U \wedge V) - g(R(\nabla_Z X,Y)V,U) - g(R(X,\nabla_Z Y)V,U) = \end{aligned}$$

Так как $R(X,Y)$ — кососимметрический тензор, а ковариантная производная сохраняет кососимметричность тензоров (1,1) и наследует все алгебраические свойства тензора кривизны, то воспользовавшись предложением 1.2 б) и формулой (7), продолжим равенство

$$= g(\nabla_Z R(X,Y)V - R(\nabla_Z X,Y)V - R(X,\nabla_Z Y)V,U) = g((\nabla_Z R)(X,Y)V,U) =$$
$$= g((\nabla_Z R)(V,U)X,Y) = g((\nabla_Z \rho)(V\wedge U),Y\wedge X) = g((\nabla_Z\rho)(U\wedge V),X\wedge Y).$$

в) Необходимо отметить, что слева в равенстве п. в) стоит оператор преобразования кривизны из (6), а справа $R(X,Y)$ рассматривается, как кососимметрический тензор. Используя предложение 1.1 а) и формулу

$$\nabla_X(U\wedge V) = \nabla_X U\wedge V + U\wedge\nabla_X V, \tag{9}$$

которая легко может быть получена из формулы для ковариантной производной от тензорного поля ([3], гл. 3, предл. 2.10), получим равенство

$$R(X,Y)(U\wedge V) = [R(X,Y),U\wedge V].$$

г) Из определения коммутаторного оператора и ([3], гл. 3, предл. 2.10)

$$(\nabla_X[Q,S])(U) = \nabla_X([Q,S]U) - [Q,S]\nabla_X U = \nabla_X(QS(U) - SQ(U)) -$$
$$-QS(\nabla_X U) + SQ(\nabla_X U) = \nabla_X QS(U) + Q\nabla_X S(U) - \nabla_X SQ(U) - S\nabla_X Q(U) -$$
$$-QS(\nabla_X U) + SQ(\nabla_X U) = [\nabla_X Q,S](U) + [Q,\nabla_X S](U). \quad \Box$$

Пусть Π — некоторое l-мерное подпространство в касательном пространстве T_wM, $w\in M$. Пусть (1,1)-тензоры pr, ort — это операторы в T_wM проектирования на Π и на ортонормальное дополнение к Π, соответственно.

Определение 1.1. (1,1)-тензоры, определяемые формулами

$$|Q|_\Pi = \mathrm{pr}\,Q\,\mathrm{pr} + \mathrm{ort}\,Q\,\mathrm{ort}, \tag{10}$$
$$\{Q\}_\Pi = \mathrm{pr}\,Q\,\mathrm{ort} + \mathrm{ort}\,Q\,\mathrm{pr}, \tag{11}$$

называются внутренней и внешней компонентами (1,1)-тензора Q соответственно относительно подпространства Π.

Когда из контекста понятно, относительно какого подпространства Π берутся внешняя или внутренняя компоненты тензора, то индекс Π часто опускается.

Определение 1.2. Подпространства кососимметрических тензоров, имеющих нулевую внешнюю относительно Π компоненту, обозначаются $I(\Pi)$, а нулевую внутреннюю — $E(\Pi)$ и называются соответственно внутренним и внешним относительно Π подпространством кососимметрических тензоров.

Предложение 1.4. *Всякий* $(1,1)$*-тензор* Q *в точке и многообразия* M *единственным образом разлагается по формуле*

$$Q = |Q|_\Pi + \{Q\}_\Pi, \tag{12}$$

где Π *— произвольное подпространство в* T_wM. *Если* Q *— кососимметрический тензор, то его внутренняя и внешняя компоненты — также кососимметрические тензоры, ортогональные между собой.*

Доказательство. Разложение (12) непосредственно следует из представления тождественного (1,1)-тензора по формуле (13)

$$\mathrm{id} = \mathrm{pr} + \mathrm{ort}, \tag{13}$$

$$\mathrm{pr} \circ \mathrm{ort} = \mathrm{ort} \circ \mathrm{pr} = 0. \tag{14}$$

Действительно, $Q = \mathrm{id} \circ Q \circ \mathrm{id} = (\mathrm{pr} + \mathrm{ort})Q(\mathrm{pr} + \mathrm{ort}) = (\mathrm{pr}\, Q\, \mathrm{pr} + \mathrm{ort}\, Q\, \mathrm{ort}) + (\mathrm{pr}\, Q\, \mathrm{ort} + \mathrm{ort}\, Q\, \mathrm{pr}) = |Q| + \{Q\}$. Если Q кососимметричен, то воспользовавшись самосопряженностью ортопроекторов pr и ort, получим $g(|Q|X, Y) = g(\mathrm{pr}\, Q\, \mathrm{pr}\, X + \mathrm{ort}\, Q\, \mathrm{ort}\, X, Y) = g(Q\, \mathrm{pr}\, X, \mathrm{pr}\, Y) + g(Q\, \mathrm{ort}\, X, \mathrm{ort}\, Y) = -g(\mathrm{pr}\, X,\ Q\, \mathrm{pr}\, Y) - g(\mathrm{ort}\, X, Q\, \mathrm{ort}\, Y) = -g(X, \mathrm{pr}\, Q\, \mathrm{pr}\, Y) - g(X, \mathrm{ort}\, Q\, \mathrm{ort}\, X) = -g(X, |Q|Y)$. Аналогично доказывается кососимметричность внешней компоненты. Ортогональность внутренней и внешней компонент следует из предложения 1.2 а), свойства идемпотентности ортопроекторов pr и ort, а также равенств (14). Действительно, $g(|Q|, \{S\}) = -\operatorname{Tr} |Q|\{S\} = 0$. □

В дальнейшем ортонормальный репер E будем называть *адаптированным* к подпространству Π, если линейная оболочка первых l векторов E совпадает с подпространством Π.

Следствие 1.3. Для матриц внутренней и внешней компонент кососимметрических тензоров относительно репера E, адаптированного к подпространству Π, имеют место представления

$$|Q| = \begin{pmatrix} Q_l & 0 \\ 0 & Q_p \end{pmatrix}, \qquad \{Q\} = \begin{pmatrix} 0 & -Q^t_\triangle \\ Q_\triangle & 0 \end{pmatrix},$$

где подматрицы Q_l, Q_p, $Q_\triangle$ имеют размеры $l \times l$, $p \times p$ и $l \times p$ соответственно.

Доказательство. Матрицы операторов проектирования на подпространство Π, ортогональное дополнение к Π и матрица кососимметрического оператора Q в данном базисе E будут иметь соответственно следующий вид:

$$\mathrm{pr} = \begin{pmatrix} I_l & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathrm{ort} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_p \end{pmatrix}, \qquad Q = \begin{pmatrix} Q_l & -Q^t_\triangle \\ Q_\triangle & Q_p \end{pmatrix}.$$

Воспользовавшись определением 1.1 и правилом поблочного умножения матриц, получим необходимый вид матриц внешней и внутренней компонент тензора Q. □

Приведенные ниже утверждения непосредственно вытекают из следствия 1.3.

Следствие 1.4. Для любых векторов X, Y из касательного пространства в точке w многообразия M

$$|X \wedge Y| = \mathrm{pr}\, X \wedge \mathrm{pr}\, Y + \mathrm{ort}\, X \wedge \mathrm{ort}\, Y, \tag{15}$$

$$\{X \wedge Y\} = \mathrm{ort}\, X \wedge \mathrm{pr}\, Y + \mathrm{pr}\, X \wedge \mathrm{ort}\, Y. \tag{16}$$

Следствие 1.5. Все пространство кососимметрических тензоров $\mathbf{\Lambda}^2_w M$ в точке $w \in M$ разлагается в прямую сумму $\mathbf{\Lambda}^2_w M = I(\Pi) \oplus E(\Pi)$, где Π — некоторое произвольное подпространство в $T_w M$.

Предложение 1.5. *Для любых кососимметрических тензоров Q и S и любых векторов X, Y и Z на многообразии M выполняются равенства*

а) $|[Q, S]| = [|Q|, |S|] + [\{Q\}, \{S\}]$, в) $\underset{(X,Y,Z)}{S} |X \wedge Y|(Z) = 0$,

б) $\{[Q, S]\} = [|Q|, \{S\}] + [\{Q\}, |S|]$, г) $\underset{(X,Y,Z)}{S} \{X \wedge Y\}(Z) = 0$.

Все компоненты тензоров берутся относительно одного и того же подпространства $\Pi \subset T_w M$, $w \in M$.

Доказательство. а), б) Эти пункты являются прямым следствием правил поблочного умножения матриц при вычислении коммутатора и следствия 1.3. в) Из формулы (15) следует, что

$$\underset{X,Y,Z}{S}|X\wedge Y|(Z)=\underset{X,Y,Z}{S}(\operatorname{pr}X\wedge\operatorname{pr}Y)(Z)+\underset{X,Y,Z}{S}(\operatorname{ort}X\wedge\operatorname{ort}Y)(Z)=$$
$$=\underset{X,Y,Z}{S}(\operatorname{pr}X\wedge\operatorname{pr}Y)(\operatorname{pr}Z)+\underset{X,Y,Z}{S}(\operatorname{ort}X\wedge\operatorname{ort}Y)(\operatorname{ort}Z).$$

Равенство нулю этого выражения следует из предложения 1.1 б), примененного к векторам $\operatorname{pr}X$, $\operatorname{pr}Y$, $\operatorname{pr}Z$ и $\operatorname{ort}X$, $\operatorname{ort}Y$, $\operatorname{ort}Z$.

г) Из предложения 1.4 и формулы (16) получим

$$\underset{X,Y,Z}{S}\{X\wedge Y\}(Z)=\underset{X,Y,Z}{S}X\wedge Y(Z)-\underset{X,Y,Z}{S}|X\wedge Y|(Z).$$

Равенство нулю этого выражения следует из предложения 1.1 б) и равенства в) доказываемого предложения. □

Следствие 1.6. $[\{Q\},\{S\}],[|Q|,|S|]\in I(\Pi)$, $[\{Q\},|S|],[|Q|,\{S\}]\in E(\Pi)$ $\forall Q,S\in\mathbf{\Lambda}^2(M)$.

Предложение 1.6. *Пусть* Π — *некоторое подпространство касательного пространства к многообразию* M *в точке* u. *Тогда операции взятия внутренней и внешней компонент* $(1,1)$-*тензора относительно* Π, *рассматриваемые как эндоморфизмы в пространстве кососимметрических тензоров в точке* u, *являются ортопроекторами.*

Доказательство. Хорошо известно, что линейный оператор является ортопроектором тогда, и только тогда, когда он является самосопряженным идемпотентом. Таким образом, для доказательства предложения достаточно показать, что выполняются равенства

$$g(\{Q\},S)=g(Q,\{S\}),\tag{17}$$
$$\{\{Q\}\}=\{Q\},\tag{18}$$
$$g(|Q|,S)=g(Q,|S|),\tag{19}$$
$$\|Q\|=|Q|.\tag{20}$$

Из идемпотентности и самосопряженности операторов pr и ort в T_uM следует, что

$$g(\{Q\},S)=g(\operatorname{pr}Q\operatorname{ort},S)+(\operatorname{ort}Q\operatorname{pr},S)=g(Q\operatorname{ort},\operatorname{pr}S)+g(Q\operatorname{pr},\operatorname{ort}S)=$$
$$=g(Q,\operatorname{pr}S\operatorname{ort})+g(Q,\operatorname{ort}S\operatorname{pr})=g(Q,\{S\}).$$

Равенство (19) доказывается аналогично, а равенства (18), (20) вытекают из следствия 1.3. □

2. Векторные поля в грассмановом расслоении

Этот параграф посвящен построению образующей системы векторных полей на грассмановом расслоении $G^l(M)$, относительно которой будет удобно установить связь между геометрическими характеристиками базы M, слоя G^l_n и расслоения $G^l(M)$. При этом грассманово расслоение рассматривается как риманово пространство с метрикой $\widetilde{g}$, ассоциированной посредством связности с метрикой базы M и канонической симметрической метрикой γ грассманиана G^l_n ([5], определение 2). Там же в следствии 2 теоремы В для римановой метрики $\widetilde{g}$ была получена формула, которая с точностью до введенного в § 1 понятия внешней компоненты имеет вид

$$\widetilde{g}(Q_1,Q_2)=\pi^*g(S_1,S_2)-\frac{1}{2}\operatorname{Tr}\{\omega(S_1)\}_{V_1}\circ\{\omega(S_2)\}_{V_1}.\tag{21}$$

Здесь S_t $(t=1,2)$ — касательные векторы в расслоении ортонормальных реперов $O(M)$, прикрепленные в одной и той же произвольной точке, проектирующиеся на касательные векторы Q_t в грассмановом расслоении $G^l(M)$ с помощью проекции R_H ($O(M)$ — можно рассматривать как главное расслоение над $G^l(M)$ со структурной группой $H=O_l\times O_p$ ([3], гл. 1, предл. 5.5)), сопоставляющей реперу из n касательных векторов к M l-мерное подпространство, натянутое на первые l векторов репера: $R_{H*}S_t = Q_t$; ω — форма римановой связности на $O(M)$, π — проекция в расслоении $O(M)$, $V_1 = L(e_1, \dots, e_l)$ — линейная оболочка первых l векторов канонического базиса в $\mathbb{R}^n$.

Воспользуемся локальными координатами в $O(M)$ и $G^l(M)$, подробно обсуждаемыми в [5], [6]. В дальнейшем спектр изменения индексов a, b, c, f от 1 до n; i, j, k, m — от 1 до l; α, β — от 1 до p (l и $p = n - l$ фиксированные, $n = \dim M$). Матрицы X размером $n \times n$

$$X = \begin{pmatrix} X_l & X^{\triangle} \\ X_{\triangle} & X_p \end{pmatrix}, \qquad h = \begin{pmatrix} X_l^{-1} & 0 \\ 0 & X_p^{-1} \end{pmatrix}. \tag{22}$$

где X_l, X_p — подматрицы размеров $l \times l$ и $p \times p$ соответственно, совместно с набором $w = (w^1, \dots, w^n)$ координат базового многообразия M задают координаты точки в $O(M)$, т. е. репера $EX = (E_a X_1^a, \dots, E_a X_n^a)$ (E — фиксированное ортонормальное реперное поле, определенное, вообще говоря, локально), а матрицы ξ размером $l \times p$ совместно с набором w задают координаты точки в грассмановом расслоении $G^l(M)$, т. е. координаты l-мерного подпространства касательного пространства, являющегося решением системы уравнений из 1-форм в точке w:

$$\chi^{l+\alpha} = \xi_k^{\alpha} \chi^k, \tag{23}$$

где χ^a — кореперное поле, двойственное E. Естественно, последние координаты определены лишь в окрестности подпространства Π_0, являющегося линейной оболочкой $L(E_1, \dots, E_l)$ первых l векторов репера E в некоторой точке w_0 базы M. Описанные координаты в $O(M)$ и $G^l(M)$ называются [5], [6] координатами относительно реперного поля E (или кореперного поля χ). В последующем разбивка на блоки квадратных матриц размера $n \times n$ принимается по умолчанию, как описано в (22).

Лемма 2.1. *Проекция $R_H : O(M) \to G^l(M)$ в координатах относительно реперного поля E имеет следующее представление:*

$$\xi = R_H(X) = X_{\triangle} \cdot X_l^{-1} \tag{24}$$

Доказательство. Матрица h из (22), которая определена в достаточно малой окрестности Π_0, принадлежит структурной группе H. Тогда, умножив матрицу X из (22) на матрицу h, получим

$$X \cdot h = \begin{pmatrix} X_l & X^{\triangle} \\ X_{\triangle} & X_p \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X_l^{-1} & 0 \\ 0 & X_p^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_l & X^{\triangle} \cdot X_p^{-1} \\ X_{\triangle} \cdot X_l^{-1} & I_p \end{pmatrix}.$$

Проверкой, аналогичной той, которая приведена в [6], нетрудно убедиться, что репер с такими координатами обладает тем свойством, что первые его l векторов удовлетворяют системе (23). $\square$

Определение 2.1. Пусть Q — кососимметрическое тензорное поле на M. Векторное поле $\overline{Q}^v$ на $O(M)$ назовем вертикальным лифтом Q в $O(M)$, если оно в каждой точке u из $O(M)$ удовлетворяет системе уравнений

$$\pi_* \overline{Q}^v = 0, \qquad \omega_u(\overline{Q}^v) = \operatorname{ad} u^{-1} Q = u^{-1} \circ Q \circ u. \tag{25}$$

Здесь репер u стандартным образом отождествляется с линейным оператором из $\mathbb{R}^n$ на $T_{\pi(u)}M$.

Приведенное определение 2.1 является частным случаем следующей общей конструкции. Пусть $P(M, G)$ — главное расслоение, G — его структурная группа, а $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли группы G. Для эффективного левого действия G на $\mathfrak{g}$ дифференциалами $\operatorname{ad} a_*$ построим ассоциированное расслоение E со стандартным слоем $\mathfrak{g}$. Тогда для каждого сечения Q расслоения E уравнениями (26) однозначно определяется вертикальное векторное поле $\overline{Q}^v$ в P

$$\pi_* \overline{Q}^v = 0, \qquad u\left(\omega_u(\overline{Q}^v)\right) = Q. \tag{26}$$

Здесь $\forall u \in P$ и $\forall A \in \mathfrak{g}$ по определению ассоциированного расслоения ([3], с. 60) $u(A) = \{(ua, \operatorname{ad} a_*^{-1}A) \mid a \in G\}$ — орбита пары (u, A), т. е. элемент из слоя $E_{\pi(u)}$. В случае, когда G является общей линейной группой GL_n или ее подгруппой, как в определении 2.1, элементы из E_x могут быть отождествлены с эндоморфизмами T_xM, т. е. (1,1)-тензорами, а вторая формула в (26) при этом превращается во вторую формулу в (25), т. к. в этом случае $u(A) = u \circ A \circ u^{-1}$.

Следует отметить, что в любом главном расслоении имеется образующая система вертикального распределения, состоящая из фундаментальных векторных полей A^*, ([3], с. 57), где как и прежде $A \in \mathfrak{g}$. Однако от построенных выше фундаментальное векторное поле отличается тем, что не является правоинвариантным. А именно, правоинвариантность $\overline{Q}^v$, устанавливаемая ниже в предложении 2.2, позволит корректно определить вертикальные векторные поля на $G^l(M)$. Традиционным образом определенное векторное поле $\overline{Y}^h$, являющееся горизонтальным лифтом в $O(M)$ векторного поля Y на M, удовлетворяет системе уравнений

$$\pi_*\overline{Y}^h = Y, \qquad \omega(\overline{Y}^h) = 0. \tag{27}$$

Следующее утверждение дает эффективный способ конструирования вертикальных лифтов из кососимметричеких тензоров.

Предложение 2.1. *В координатах (w, X) на $O(M)$ относительно ортонормального реперного поля E векторное поле $\overline{Q}^v$ допускает следующее представление:*

$$\overline{Q}^v = \operatorname{Tr} QX\frac{\partial}{\partial X^t}, \tag{28}$$

где Q – матрица кососимметрического тензора относительно реперного поля E, а $\frac{\partial}{\partial X^t} = (\frac{\partial}{\partial X})^t = (\frac{\partial}{\partial X^a_b})$ — матрица координатных вертикальных векторов.

Доказательство. Пусть в точке X из $O(M)$ вектор $\overline{Q}^v = F^a_b\frac{\partial}{\partial X^a_b} = \operatorname{Tr} F\frac{\partial}{\partial X^t}$. Из определения 2.1 следует, что $\omega_X(\overline{Q}^v) = X^{-1}QX$. Теперь из локально координатного представления формы связности $\omega = X^{-1}\delta X = X^{-1}(dX + \Gamma(\chi)X)$ (где $\Gamma(\chi)$ – матрица Кристоффеля относительно кореперного поля χ, ([5], § 2)) в координатах (w, X), находим матрицу $F = QX$. $\square$

Непосредственной проверкой путем дифференцирования легко убедиться в справедливости следующего следствия.

Следствие 2.1. Локальная 1-параметрическая группа локальных преобразований, индуцируемая векторным полем $\overline{Q}^v$ на $O(M)$, имеет координатное представление $q_t(X) = \exp(tQX)$.

Очевидно, что в координатах (w, X) относительно ортонормального реперного поля E горизонтальный лифт допускает следующее локально координатное представление ([3], с. 140):

$$\overline{Y}^h = Y^a\frac{\partial}{\partial w^a} - Tr\Gamma(Y)X\frac{\partial}{\partial X^t}, \tag{29}$$

где $\Gamma(Y)$ — такая же матрица, как в (5), Y^a — компоненты векторного поля Y относительно координат базы M, а в матрице $\frac{\partial}{\partial X^t}$ компонентами служат векторные поля, причем в c-й строке и a-м столбце стоит вектор $\frac{\partial}{\partial X^a_c}$. Формула (29) допускает представление, не использующее базовых координат, а именно,

$$\overline{Y}^h = \chi^a(Y)[E_a] - \operatorname{Tr}\Gamma(Y)X\frac{\partial}{\partial X^t},$$

где $[E_a]$ — координатное представление векторного поля E_a в произвольных координатах на M.

Риманова метрика $\overline{g}$ в $O(M)$, ассоциированная с римановой метрикой базы M и канонической симметрической метрикой стандартного слоя O_n (метрика Мока), может быть вычислена по формуле

$$\overline{g}(S_1, S_2) = \pi^*g(S_1, S_2) - \frac{1}{2}\operatorname{Tr}\omega(S_1)\omega(S_2). \tag{30}$$

Лемма 2.2. *Пусть Q, S — кососимметрические тензорные поля, а X, Y — векторные поля на римановом многообразии M. Тогда*

$$\overline{g}(\overline{X}^h, \overline{Y}^h) = g(X, Y), \tag{31}$$

$$\overline{g}(\overline{Q}^v, \overline{X}^h) = 0, \tag{32}$$

$$\overline{g}(\overline{Q}^v, \overline{S}^v) = -\frac{1}{2}\operatorname{Tr} QS = \frac{1}{2} g(Q, S), \tag{33}$$

причем эти выражения не зависят от вертикальных координат, а след в формуле (33) *вычисляется в касательном пространстве к M.*

Доказательство. Первые две формулы, очевидно, следуют из определения 2.1 и формулы (30). Докажем формулу (33).

$$\overline{g}(\overline{Q}^v, \overline{S}^v) = -\frac{1}{2}\operatorname{Tr}\omega(\overline{Q}^v)\omega(\overline{S}^v) = -\frac{1}{2}\operatorname{Tr}(u^{-1}\circ Q\circ u)(u^{-1}\circ S\circ u) = \\ = -\frac{1}{2}\operatorname{Tr} u^{-1}QSu = -\frac{1}{2}\operatorname{Tr} QS.$$

Последнее равенство записано в силу коммутативности следного функционала. Применив п. а) предложения 1.2, получим вторую часть доказываемой формулы. □

Предложение 2.2. *Вертикальный лифт $\overline{Q}^v$ кососимметрического тензорного поля Q является правоинвариантным векторным полем на $O(M)$, т. е. $R_{a*}\overline{Q}^v = \overline{Q}^v$ $\forall a \in O_n$.*

Доказательство. Для любого элемента $a \in O_n$

$$\omega_{ua}(R_{a*}\overline{Q}^v) = (R_a^*\omega)_u(\overline{Q}^v) = (\operatorname{ad} a^{-1})\omega_u(\overline{Q}^v) = (\operatorname{ad} a^{-1})(\operatorname{ad} u^{-1}Q) = \operatorname{ad}(ua)^{-1}Q = \omega_{ua}(\overline{Q}^v).$$

Так как вертикальный лифт является вертикальным векторным полем и форма связности ω невырождена на вертикальных подпространствах, то это равенство доказывает рассматриваемое предложение. □

Хорошо известно ([3], гл. 2, пр. 1.2), что горизонтальный лифт $\overline{Y}^h$ базового векторного поля Y есть правоинвариантное векторное поле на $O(M)$. Таким образом, на расслоении ортонормальных реперов $O(M)$ построена (локально) система правоинвариантных образующих в модуле векторных полей, т. е. любое векторное поле на $O(M)$ может быть разложено в линейную комбинацию $\frac{1}{2}n(n-1)$ вертикальных и n горизонтальных лифтов.

Лемма 2.3. *Для любых кососимметрических тензоров Q и S и любого векторного поля Y на многообразии M выполняются равенства*

$$\overline{Y}^h\omega(\overline{Q}^v) = \omega(\overline{(\nabla_Y Q)}^v), \tag{34}$$

$$\overline{S}^v\omega(\overline{Q}^v) = \omega(\overline{[Q, S]}^v). \tag{35}$$

Доказательство. Пусть в $O(M)$ введены локальные координаты (w, X) относительно ортонормального реперного поля E. В ходе доказательства предложения 2.1 было показано, что в локальных координатах матрица функций $\omega(\overline{Q}^v)$ на $O(M)$ имеет вид $\omega(\overline{Q}^v) = X^{-1}QX$, где X — матричные координаты точки, в которой вычисляется значение формы связности. Применяя координатное выражение (29) для горизонтального лифта и тот факт, что значение вертикального вектора $\operatorname{Tr} C\frac{\partial}{\partial X^t}$ из $O(M)$ на координатной матрице X равно C, а на матрице Q функций базовых координат равно 0, получим координатное представление действия вектора на функцию в точке (w, X):

$$\overline{Y}^h\omega(\overline{Q}^v) = (Y^a\frac{\partial}{\partial w^a} - \operatorname{Tr}\Gamma(Y)X\frac{\partial}{\partial X^t})(X^{-1}QX) =$$
$$= Y^a(X^{-1}\frac{\partial Q}{\partial w^a}X) - \operatorname{Tr}\Gamma(Y)X\frac{\partial}{\partial X^t}(X^{-1}QX) =$$
$$= X^{-1}YQX - \operatorname{Tr}\Gamma(Y)X\frac{\partial}{\partial X^t}(X^{-1})QX - X^{-1}Q\operatorname{Tr}\Gamma(Y)X\frac{\partial}{\partial X^t}(X) =$$
$$= X^{-1}dQ(Y)X + X^{-1}\operatorname{Tr}\Gamma(Y)X\frac{\partial}{\partial X^t}(X)X^{-1}QX - X^{-1}Q\Gamma(Y)X =$$
$$= X^{-1}\left(dQ(Y) + \Gamma(Y)Q - Q\Gamma(Y)\right)X.$$

После применения формулы (5) и определения 2.1 получим требуемое равенство. Из предложения 2.1 аналогично предыдущему получим

$$\overline{S}^v\omega(\overline{Q}^v) = \operatorname{Tr}SX\frac{\partial}{\partial X^t}(X^{-1}QX) = (\operatorname{Tr}SX\frac{\partial}{\partial X^t}(X^{-1}))QX + X^{-1}Q(\operatorname{Tr}SX\frac{\partial}{\partial X^t}(X)) =$$
$$= -X^{-1}SXX^{-1}QX + X^{-1}QSX = X^{-1}(QS - SQ)X = X^{-1}[Q,S]X = \omega(\overline{[Q,S]}^v). \quad \square$$

Лемма 2.4. *Пусть Q, S — кососимметрические тензорные поля, а X, Y — векторные поля на базе M. Тогда*

$$\text{а) } [\overline{Q}^v, \overline{S}^v] = -\overline{[Q,S]}^v, \tag{36}$$
$$\text{б) } [\overline{X}^h, \overline{Q}^v] = \overline{(\nabla_X Q)}^v, \tag{37}$$
$$\text{в) } [\overline{X}^h, \overline{Y}^h] = \overline{[X,Y]}^h - \overline{R(X,Y)}^v. \tag{38}$$

Доказательство. а) Скобка Ли вертикальных векторных полей — это вертикальное векторное поле. Кроме того, из ([3], с. 43)

$$\omega([\overline{Q}^v, \overline{S}^v]) = -2d\omega(\overline{Q}^v, \overline{S}^v) + \overline{Q}^v\omega(\overline{S}^v) - \overline{S}^v\omega(\overline{Q}^v). \tag{39}$$

Из структурного уравнения $d\omega = -\frac{1}{2}[\omega,\omega] + \Omega$ ([3], с. 81) и горизонтальности формы кривизны Ω, т. е. равенства ее нулю при наличии хотя бы одного вертикального вектора на основании леммы 2.3 следует, что

$$\omega([\overline{Q}^v, \overline{S}^v]) = [\omega(\overline{Q}^v), \omega(\overline{S}^v)] - 2\Omega(\overline{Q}^v, \overline{S}^v) + \overline{Q}^v\omega(\overline{S}^v) - \overline{S}^v\omega(\overline{Q}^v) =$$
$$= \omega(\overline{Q}^v)\omega(\overline{S}^v) - \omega(\overline{S}^v)\omega(\overline{Q}^v) + \overline{Q}^v\omega(\overline{S}^v) - \overline{S}^v\omega(\overline{Q}^v) = \operatorname{ad}u^{-1}Q \circ \operatorname{ad}u^{-1}S -$$
$$- \operatorname{ad}u^{-1}S \circ \operatorname{ad}u^{-1}Q - \omega(\overline{[Q,S]}^v) - \omega(\overline{[Q,S]}^v) = \operatorname{ad}u^{-1}[Q,S] -$$
$$-2\omega(\overline{[Q,S]}^v) = -\omega(\overline{[Q,S]}^v).$$

Так как форма связности ω невырождена на вертикальных векторах, то отсюда следует равенство (36).

б) Отсутствие горизонтальной компоненты для $[\overline{X}^h, \overline{Q}^v]$ следует из того, что векторные поля $\overline{X}^h$ и $\overline{Q}^v$ являются π-связанными с векторными полями X и нулевым соответственно. Из формулы (39), структурного уравнения, горизонтальности формы кривизны и вертикальности формы связности следует, что

$$\omega([\overline{X}^h, \overline{Q}^v]) = -2d\omega(\overline{X}^h, \overline{Q}^v) + \overline{X}^h\omega(\overline{Q}^v) - \overline{Q}^v\omega(\overline{X}^h) = \overline{X}^h\omega(\overline{Q}^v) = \omega(\overline{(\nabla_X Q)}^v),$$

причем последнее равенство записано на основании леммы 2.3.

в) Равенство $\pi_*([\overline{X}^h, \overline{Y}^h]) = [X,Y]$ следует из π-связности векторных полей $\overline{X}^h$, $\overline{Y}^h$ и X, Y соответственно. Равенство $\omega([\overline{X}^h, \overline{Y}^h]) = -2\Omega(\overline{X}^h, \overline{Y}^h)$ и определение преобразования кривизны, являющегося при фиксированных X и Y кососимметрическим (1,1)-тензором, приводят к цепочке равенств: $\omega([\overline{X}^h,\overline{Y}^h]) = -u^{-1}R(X,Y)u = -\omega(\overline{R(X,Y)}^v)$. Отсюда следует формула (38). $\square$

Введем понятие горизонтального лифта $\widetilde{Y}^h$ векторного поля Y на M в грассманово расслоение $G^l(M)$ стандартной процедурой, т. е. как горизонтальное векторное поле, проектирующееся в поле Y. Это также можно сделать с помощью корректно определенного равенства

$$R_{H*}\overline{Y}^h = \widetilde{Y}^h, \tag{40}$$

т. к. R_H — отображение связности ([5], из доказательства теоремы B), а поле $\overline{Y}^h$, как отмечалось выше, правоинвариантное. Таким образом, горизонтальные лифты в $O(M)$ и $G^l(M)$ одного и того же векторного поля на базе M, R_H-связны между собой.

Определение 2.2. Пусть Q — кососимметрическое тензорное поле на M. Векторное поле $\widetilde{Q}^v$ на $G^l(M)$ назовем вертикальным лифтом Q в грассманово расслоение, если оно получено проекцией посредством R_H из вертикального лифта $\overline{Q}^v$ того же тензорного поля Q в $O(M)$, т. е. $\widetilde{Q}^v = R_{H*}\overline{Q}^v$.

Из предложения 2.2. следует, что вертикальный лифт $\widetilde{Q}^v$ в $G^l(M)$ существует для любого кососимметрического тензора Q. Очевидно, что в окрестности любой точки из $G^l(M)$ можно построить систему векторных полей из горизонтальных и вертикальных лифтов, порождающую (локально) весь модуль векторных полей в $G^l(M)$, взяв, например, $\widetilde{(\frac{\partial}{\partial w^a})}^h$ и $\widetilde{(\frac{\partial}{\partial w^a} \wedge \frac{\partial}{\partial w^b})}^v$. Необходимо отметить, что из предъявленной системы образующих полей n горизонтальных лифтов являются линейно независимыми в каждой точке и порождают горизонтальное распределение в $G^l(M)$, а среди вертикальных лифтов в точности lp векторов линейно независимы в каждой точке грассманова расслоения.

Лемма 2.5. *Если кососимметрическая матрица Q имеет блочно-диагональный вид*

$$Q = \begin{pmatrix} Q_l & 0 \\ 0 & Q_p \end{pmatrix}, \tag{41}$$

то ортогональная матрица ее экспоненты e^Q имеет также блочно-диагональный вид

$$e^Q = \begin{pmatrix} e^{Q_l} & 0 \\ 0 & e^{Q_p} \end{pmatrix}. \tag{42}$$

Доказательство. Так как матрица $Q = Q_1 + Q_2$, где

$$Q_1 = \begin{pmatrix} Q_l & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad Q_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & Q_p \end{pmatrix},$$

а слагаемые обладают тем свойством, что $Q_1Q_2 = Q_2Q_1 = 0$, то из определения экспоненты следует, что $e^Q = e^{Q_1+Q_2} = e^{Q_1}e^{Q_2}$. $\square$

Предложение 2.3. *Пусть $R_H u = \Pi$. Тогда вертикальным подпространством римановой субмерсии R_H в точке u служит вертикальный лифт внутреннего относительно Π подпространства кососимметрических тензоров, т. е. $\operatorname{Ker} R_{H*} = \overline{I(\Pi)}^v$, где $\overline{I(\Pi)}^v = \{\overline{Q_u}^v, \{Q\}_\Pi = 0\}$, а горизонтальным подпространством римановой субмерсии R_H в точке u служит $H_uO(M) + \overline{E(\Pi)}^v$ прямая ортогональная сумма горизонтального (в смысле римановой связности) пространства $H_uO(M)$ и вертикального лифта внешнего относительно Π подпространства кососимметрических тензоров $\overline{E(\Pi)}^v = \{\overline{Q_u}^v, |Q|_\Pi = 0\}$.*

Доказательство. Из следствия 2.1 и леммы 2.5 вытекает, что все векторы из $\overline{I(\Pi)}^v$ касаются слоя через u. Кроме того, размерность подпространства $I(\Pi)$, равная $\frac{1}{2}(l(l-1)+p(p-1))$, совпадает с размерностью группы H. Значит, $\overline{I(\Pi)}^v$ действительно является вертикальным подпространством римановой субмерсии R_H. Касательное пространство в точке u к риманову многообразию $O(M)$ с метрикой $\overline{g}$, ассоциированной с метриками слоя и базы, является прямой ортогональной суммой $H_uO(M)+V_uO(M)$ горизонтального и вертикального (в смысле римановой связности) подпространств. В свою очередь $V_uO(M)$ является прямой суммой $\overline{I(\Pi)}^v+\overline{E(\Pi)}^v$, что следует непосредственно из предложения 1.4 и определения 2.1. Ортогональность $\overline{I(\Pi)}^v$ и $\overline{E(\Pi)}^v$ следует из леммы 2.2:

$$\overline{g}(\overline{\{Q\}}^v,\overline{|Q|}^v)=\frac{1}{2}g(\{Q\},|Q|)=0.$$

Все это и доказывает данное предложение. $\square$

Следствие 2.2. $\widetilde{Q_\Pi}^v=(\widetilde{\{Q\}_\Pi})^v$.

Итак, задача построения системы образующих векторных полей в $G^l(M)$ решена. Следующее предложение даст эффективный способ конструирования таких лифтов, после чего можно будет перейти к решению основной задачи: установлению связи между геометрией грассманова расслоения и базы.

Предложение 2.4. *В локальных координатах (w,ξ) в $G^l(M)$ относительно кореперного поля χ вертикальный лифт тензорного поля Q имеет следующее представление:*

$$\widetilde{Q}^v=\mathrm{Tr}(Q_\triangle+Q_p\xi-\xi Q_l-\xi Q^\triangle\xi)\frac{\partial}{\partial\xi^t},\tag{43}$$

где матрица компонент Q относительно χ имеет блочную структуру обозначений, как в (22).

Доказательство. Продифференцируем формулу (24) леммы 2.1:

$$d\xi=dX_\triangle X_l^{-1}+X_\triangle dX_l^{-1}=dX_\triangle X_l^{-1}-X_\triangle X_l^{-1}dX_lX_l^{-1}=$$
$$=(dX_\triangle-X_\triangle X_l^{-1}dX_l)X_l^{-1}=(dX_\triangle-\xi dX_l)X_l^{-1}.$$

Так как из поблочного умножения матриц следует, что

$$QX=\begin{pmatrix}Q_l & Q^\triangle\\ Q_\triangle & Q_p\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}X_l & X^\triangle\\ X_\triangle & X_p\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(QX)_l & (QX)^\triangle\\ (QX)_\triangle & (QX)_p\end{pmatrix},$$

где $(QX)_l=Q_lX_l+Q^\triangle X_\triangle$, $(QX)_\triangle=Q_\triangle X_l+Q_pX_\triangle$, то из предложения 2.1 вытекает, что $dX_l(\overline{Q}^v)=(QX)_l$, $dX_\triangle(\overline{Q}^v)=(QX)_\triangle$. Таким образом,

$$d\xi(\overline{Q}^v)=(dX_\triangle-\xi dX_l)X_l^{-1}(\overline{Q}^v)=((QX)_\triangle-\xi(QX)_l)X_l^{-1}=(Q_\triangle X_l+$$
$$+Q_pX_\triangle-\xi Q_lX_l-\xi Q^\triangle X_\triangle)X_l^{-1}=Q_\triangle+Q_pX_\triangle X_l^{-1}-\xi Q_l-\xi Q^\triangle X_\triangle X_l^{-1}=$$
$$=Q_\triangle+Q_p\xi-\xi Q_l-\xi Q^\triangle\xi.$$

Значит, $\widetilde{Q}^v=R_{H*}(\overline{Q}^v)=\mathrm{Tr}(Q_\triangle+Q_p\xi-\xi Q_l-\xi Q^\triangle\xi)\frac{\partial}{\partial\xi^t}$. $\square$

Доказанное предложение позволяет видеть,что в точке Π с координатами $\xi=0$ вертикальный лифт кососимметрического тензора Q зависит лишь от lp компонент углового блока $Q_\triangle$ матрицы Q. Итак, задача построения системы образующих векторных полей в $G^l(M)$ решена.

Лемма 2.6. *Пусть Q и S — кососимметрические тензорные поля, а X и Y — векторные поля на M. Тогда справедливы следующие тождества:*

$$\text{а) } [\widetilde{Q}^v, \widetilde{S}^v] = -\widetilde{[Q,S]}^v,$$
$$\text{б) } [\widetilde{X}^h, \widetilde{Q}^v] = (\widetilde{\nabla_X Q})^v,$$
$$\text{в) } [\widetilde{X}^h, \widetilde{Y}^h] = \widetilde{[X,Y]}^h - \widetilde{R(X,Y)}^v.$$

Доказательство. Как было показано выше, векторные поля $\overline{Q}^v$ и $\widetilde{Q}^v$, а также $\overline{X}^h$ и $\widetilde{X}^h$ попарно R_H-связны. Тогда выполнение тождеств леммы 2.4 влечет за собой выполнение соответствующих тождеств этой леммы. □

Лемма 2.7. *Пусть Q, S — кососимметрические тензорные поля, а X, Y — векторные поля на M. Тогда для их вертикальных и горизонтальных лифтов в $G^l(M)$ верны следующие тождества:*

$$\widetilde{g}(\widetilde{X}^h, \widetilde{Y}^h) = g(X,Y), \tag{44}$$
$$\widetilde{g}(\widetilde{Q}^v, \widetilde{X}^h) = 0, \tag{45}$$
$$\widetilde{g}_\Pi(\widetilde{Q}^v, \widetilde{S}^v) = -\frac{1}{2}\operatorname{Tr}\{Q\}\{S\} = \frac{1}{2}g(\{Q\},\{S\}), \tag{46}$$

где внешние компоненты тензорных полей берутся относительно подпространства в $G^l(M)$, в котором вычисляется $\widetilde{g}$.

Доказательство. Так как R_H – риманова субмерсия $O(M)$ на $G^l(M)$, а векторные поля $\overline{Q}^v$ и $\widetilde{Q}^v$, $\overline{X}^h$ и $\widetilde{X}^h$ попарно R_H-связны, то из предложения 2.3 и аналогичных доказываемым тождеств леммы 2.2 немедленно следуют формулы (44) и (45). Для доказательства тождества (46) обратимся к формуле (21) для вычисления метрики $\widetilde{g}$ в $G^l(M)$ и определениям 2.1 и 2.2. Тогда

$$\widetilde{g}_\Pi(\widetilde{Q}^v, \widetilde{S}^v) = g(\pi_*\overline{Q}^v, \pi_*\overline{S}^v) - \frac{1}{2}\operatorname{Tr}\{\omega(\overline{Q}^v)\}_{V_1}\{\omega(\overline{S}^v)\}_{V_1} = -\frac{1}{2}\operatorname{Tr}\{u^{-1}Qu\}_{V_1}\circ\{u^{-1}Su\}_{V_1}.$$

При этом репер u из $O(M)$ связан с l-мерным подпространством $\Pi \in G^l(M)$ соотношением $R_H u = \Pi$. Кроме того, линейное отображение u переводит подпространство V_1 — линейную оболочку первых l векторов канонического базиса $\mathbb{R}^n$ — в подпространство Π из T_xM ($x = \pi(u)$), а его ортогональное дополнение $V_2 = L(e_{l+1},\ldots,e_n)$ — в ортогональное дополнение к Π в T_xM. Следовательно, $\{\operatorname{ad} u^{-1}Q\}_{V_1} = u^{-1}\{Q\}_\Pi u = \operatorname{ad} u^{-1}\{Q\}_\Pi$. Теперь, воспользовавшись коммутативностью следного функционала и предложением 1.2 а), продолжим равенство

$$-\frac{1}{2}\operatorname{Tr}(u^{-1}\{Q\}_\Pi u)(u^{-1}\{S\}_\Pi u) = \frac{1}{2}g(\{Q\}_\Pi,\{S\}_\Pi). \quad \square$$

В отличие от вертикальных лифтов в расслоении ортонормальных реперов, в выражении (46) есть зависимость от вертикальных координат. Это будет прояснено в доказательстве следующей леммы.

Лемма 2.8. *Если (w, X) — координаты репера u (относительно реперного поля E) проектирующегося посредством R_H в подпространство Π, а Q, S — некоторые кососимметрические тензорные поля на M, то имеет место координатное представление*

$$\widetilde{g}_\Pi(\widetilde{Q}^v, \widetilde{S}^v) = -\operatorname{Tr} I_{p,n}X^tQXI_{l,n}X^tSX, \tag{47}$$

где координатные матрицы $n\times n$ имеют следующий вид:

$$I_{p,n} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_p \end{pmatrix}, \qquad I_{l,n} = \begin{pmatrix} I_l & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

а I_p, I_l — единичные матрицы порядков p и l соответственно.

Доказательство. Так как матрица проектирования в $\mathbb{R}^n$ на подпространство V_1 в каноническом базисе — это $I_{l,n}$, а на подпространство V_2 — $I_{p,n}$, то из координатного представления матрицы $\omega(\overline{Q}^v)$ и определения 1.1 получим

$$\{\omega(\overline{Q}^v)\}_{V_1} = \operatorname{pr}\omega(\overline{Q}^v)\operatorname{ort} + \operatorname{ort}\omega(\overline{Q}^v)\operatorname{pr} = I_{l,n}X^{-1}QXI_{p,n} + I_{p,n}X^{-1}QXI_{l,n}.$$

Используя свойства ортопроекторов $I_{l,n}\cdot I_{l,n} = I_{l,n}$ и $I_{p,n}\cdot I_{p,n} = I_{p,n}$, а также $I_{l,n}\cdot I_{p,n} = I_{p,n}\cdot I_{l,n} = 0$ и формулу (21), запишем

$$\begin{gathered}\widetilde{g}_{\Pi}(\widetilde{Q}^v, \widetilde{S}^v) = -\frac{1}{2}\operatorname{Tr}(I_{p,n}X^{-1}QXI_{l,n} + I_{l,n}X^{-1}QXI_{p,n})(I_{p,n}X^{-1}SXI_{l,n} + \\ +I_{l,n}X^{-1}SXI_{p,n}) = -\frac{1}{2}\operatorname{Tr}(I_{p,n}X^{-1}QXI_{l,n}X^{-1}SXI_{p,n} + I_{l,n}X^{-1}SXI_{p,n} \\ X^{-1}QXI_{l,n}) = -\frac{1}{2}\operatorname{Tr}(I_{p,n}X^{-1}QXI_{l,n}X^{-1}SX + I_{l,n}X^{-1}SXI_{p,n}X^{-1}QX) = \\ = -\operatorname{Tr} I_{p,n}X^{-1}QXI_{l,n}X^{-1}SX = -\operatorname{Tr} I_{p,n}X^{t}QXI_{l,n}X^{t}SX.\end{gathered}$$

Последнее равенство получено из ортогональности матрицы X. □

Литература

1. Шапуков Б.Н. *Связности на дифференцируемых расслоениях* // Итоги науки и техн. ВИНИТИ. Пробл. геометрии. – 1983. – Т. 15. – С. 61–93.
2. Борисенко А. А., Ямпольский А. Л. *Риманова геометрия расслоений* // УМН. – 1991. – Т. 46. – Вып. 6. – С. 51–95.
3. Кобаяси Ш., Номидзу К. *Основы дифференциальной геометрии.* Т. 1. – М.: Наука, 1981, – 344 с.
4. Кобаяси Ш., Номидзу К. *Основы дифференциальной геометрии.* Т. 2. – М.: Наука, 1981, – 414 с.
5. Фарафонова Н.К. *Римановы метрики в расслоенных пространствах.* I // Изв. вузов. Математика. – 1995. – № 7. – С. 65–77.
6. Фарафонова Н. К. *Римановы метрики в расслоенных пространствах.* II. *Метрика грассманова расслоения*// Изв. вузов. Математика. – 1996. – № 2. – С. 59–72.

Харьковский государственный университет

Поступили
первый вариант 03.07.1995
окончательный вариант 22.08.1996