И З В Е С Т И Я   В Ы С Ш И Х   У Ч Е Б Н Ы Х   З А В Е Д Е Н И Й

2000 МАТЕМАТИКА № 5 (456)

УДК 514.17

Е.Г. БЕЛОУСОВ, В.Г. АНДРОНОВ

ОБ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ СВОЙСТВАХ МНОЖЕСТВ, НЕ СОДЕРЖАЩИХ ПРЯМЫХ

1. Основные результаты

Пусть A — множество n-мерного евклидова пространства E_n, где $n > 1$, и $\Gamma(A)$ — его граница. Пусть множество A содержится в некотором выпуклом множестве, не содержащем прямых (напр., является ограниченным). В работе доказано (см. ниже теорему 3), что тогда для этого множества будет выполняться включение

$$2A \subseteq \Gamma(A) + \Gamma(A). \tag{1.1}$$

Здесь "+" — знак алгебраической (векторной) суммы, $2A$ — совокупность умноженных на 2 векторов из A. Включение (1.1) может быть переписано в виде

$$A \subseteq \frac{\Gamma(A) + \Gamma(A)}{2},$$

означающем, что каждая точка множества A представляется в виде полусуммы двух его граничных точек.

В статье также доказано (см. ниже теорему 5), что при дополнительном предположении — связности множества A — включение (1.1) может быть усилено до включения

$$A + A \subseteq \Gamma(A) + \Gamma(A). \tag{1.2}$$

Интересно, однако, отметить, что при $n = 1$ включения (1.1) и (1.2), вообще говоря, не имеют места — достаточно в E_1 в качестве множества A рассмотреть какой-либо луч или отрезок (не вырождающийся в точку). Включения (1.1) и (1.2) могут не выполняться и для выпуклых множеств, содержащих прямые, в качестве примера можно взять какую-либо полуплоскость в E_2.

В разделе 3 включения (1.1) и (1.2) доказываются методом "дискретизации пространства", а именно — пространство E_n делится гиперплоскостями, параллельными координатным, на кубы с длиной ребра δ, исходное множество A аппроксимируется множеством более простой природы, а именно — множеством, составленным из указанных кубов (это множества $\Omega^{0\delta}$ и Ω^{δ} из теорем 3 и 5 соответственно). Первоначально включения (1.1) и (1.2) доказываются фактически для построенных аппроксимирующих множеств, а затем путем предельного перехода при $\delta \to 0$ нужные включения распространяются и на исходное множество A.

В разделе 2 для реализации указанного подхода вводится ряд понятий и устанавливается ряд вспомогательных утверждений (некоторые из которых, напр., теоремы 1 и 2, имеют и самостоятельный интерес).

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 95-01-00443).

2. Математический аппарат: контуры и цепочки

Введем вначале необходимые понятия и обозначения:

для множеств R, элементами которых являются множества r пространства E_n, будем обозначать $\cup R = \{x \in E_n \mid \exists r \in R : x \in r\}$, $\cap R = \{x \in E_n \mid \forall r \in R : x \in r\}$;

множество R' экспансивно в R (запись $R' \lhd R$), если $R' \subseteq R$ и из условия $r' \in R'$, $r \in R$, $r' \cap r \neq \emptyset$ следует $r \in R'$; например, если множество $R = \{r_1, r_2, r_3\}$ состоит из трех отрезков $r_1 = [1,2]$, $r_2 = [2,3]$, $r_3 = [4,5]$, то множество $R' = \{r_1, r_2\}$ экспансивно в R, а множество $R'' = \{r_1, r_3\}$ не экспансивно в R;

контур K — конечная последовательность множеств, соседние члены (звенья) которой имеют непустое пересечение;

$(r, r')/R$ — контур с начальным звеном r и конечным r', звенья которого суть элементы множества R;

R связно, если для любых $r, r' \in R$ существует контур $(r, r')/R$;

записи вида $K \subseteq R$, $K \cap R = \emptyset$ означают соответственно, что все звенья контура K суть элементы R и среди звеньев K нет элементов R;

если конец контура K и начало контура K' пересекаются, то, ставя K' вслед за K, получим контур-сумму (обозначение $K + K'$ не путать с алгебраической суммой);

$Q = \{x \in E_n \mid 0 \leq x_j \leq 1,\ j = 1, \ldots, n\}$, $W_n^\delta = \{\delta Q + \delta z \mid z$ — целочисленный вектор из $E_n\}$, где δ — фиксированное в данном разделе положительное число;

ω, ω' — элементы множества W_n^δ, являющиеся кубами с длиной ребра δ; по построению $\omega = \delta Q + \widehat{\omega}$, где $\widehat{\omega}/\delta$ — целочисленный вектор из E_n;

кубы ω, ω' инцидентны (запись $\omega|\omega'$), если $|\widehat{\omega} - \widehat{\omega}'| = \delta$;

η — пересечение конкретных инцидентных кубов из W_n^δ;

η инцидентно кубу ω (запись $\eta|\omega$), если $\eta \subset \omega$;

множества, образованные из ω и η как из элементов, будем обозначать соответственно через Ω и H (возможно с индексами);

пара ω, ω' пересекает H, если $\omega \cap \omega' \in H$;

$\backslash\Omega = W_n^\delta \setminus \Omega$;

$\Gamma(\Omega) = \{\eta \mid \eta|\omega,\ \eta|\omega'$, где $\omega \in \Omega$, $\omega' \notin \Omega\}$;

$\widehat{\Gamma}(\Omega) = \cup\Gamma(\Omega)$ — граница множества $\cup\Omega$ в “обычном смысле”;

цепочка G — конечная последовательность кубов ω, соседние элементы (звенья) которой инцидентны;

$[\omega, \omega']$ — цепочка с начальным звеном ω и конечным ω';

$[\omega, \omega']/\Omega$ — цепочка с начальным звеном ω и конечным звеном ω', составленная из элементов множества Ω;

пара соседей из G — упорядоченная пара соседних звеньев из G;

$q(G, H)$ — число пар соседей цепочки G, пересечение которых принадлежит H;

$\widehat{G}$ — множество пересечений пар соседей цепочки G;

$H_G = H \cap \widehat{G}$;

$(-G)$ — взятая в обратном порядке цепочка G;

если конец цепочки G и начало цепочки G' инцидентны или совпадают, то, ставя G' вслед за G (во втором случае без первого звена), получим цепочку-сумму (обозначение $G + G'$ не путать с алгебраической суммой);

цепочка G замкнута, если ее начальное и конечное звенья совпадают; в частности, однозвенная цепочка, очевидно, замкнута, не имеет соседних звеньев и для нее $\widehat{G} = \emptyset$ и $q(G, H) = 0$ $\forall H$;

смещение — оператор сдвига на $\pm\delta$ по одной из координат x_j, $j = 1, \ldots, n$;

ряд смещений в цепочке G — последовательность смещений, переводящих звенья G в непосредственно следующие;

цепочка G — мини-цепочка, если в ее ряду смещений нет одинаковых элементов.

Лемма 1. *Если G — мини-цепочка, то $\cap G \neq \emptyset$.*

Доказательство. Для любого звена (куба) $g \in G$ имеем $g = \bigcap_{j=1}^{n} P_{gj}$, где $P_{gj} = \{x \in E_n \mid \widehat{g}_j \leq x_j \leq \widehat{g}_j + \delta\}$. Поэтому будет выполняться $\cap G = \bigcap_{g} (\bigcap_{j=1}^{n} P_{gj}) = \bigcap_{j=1}^{n} (\bigcap_{g} P_{gj}) = \bigcap_{j=1}^{n} P_{Gj}$. Поскольку G — мини-цепочка, то $P_{Gj} \neq \emptyset \; \forall j$. Действительно, если в цепочке G смещений по j-й координате нет совсем, то P_{Gj} — это слой $P_{Gj} = P_{gj}$; если же смещения по j-й координате имеются, то P_{Gj} — это гиперплоскость $x_j = \widehat{g}_j + \delta$ (если имеется смещение только на δ или сначала на δ, а потом на $-\delta$) или гиперплоскость $x_j = \widehat{g}_j$ (если имеется смещение только на $-\delta$ или сначала на $-\delta$, а потом на δ).

Так как принадлежность к P_{Gj} определяется лишь j-й координатой, то и $\bigcap_{g=1}^{n} P_{Gj} \neq \emptyset$. $\square$

Лемма 2. *Пусть $\omega, \omega' \in W_n^\delta$ и $\omega \cap \omega' \neq \emptyset$. Тогда существует мини-цепочка $G = [\omega, \omega']$.*

Доказательство. Поскольку $\omega \cap \omega' \neq \emptyset$, то вектор $\widehat{\omega}'$ смещен относительно вектора $\widehat{\omega}$ по каждой из координат не более чем на δ. Будем двигаться от $\widehat{\omega}$ к $\widehat{\omega}'$, смещаясь по очереди по каждой из смещенных координат на δ. Таким образом, за не более чем n шагов будет построена мини-цепочка $[\omega, \omega']$. $\square$

Лемма 3. *Пусть $G = [\omega, \omega']$ — мини-цепочка, $\Omega \subset W_n^\delta$ и множество H экспансивно в $\Gamma(\Omega)$. Число $q(G, H)$ четно тогда и только тогда, когда ω и ω' имеют одинаковую принадлежность к множеству Ω, т. е. когда либо $\omega, \omega' \in \Omega$, либо $\omega, \omega' \notin \Omega$.*

Доказательство. Поскольку G — мини-цепочка, то (в силу леммы 1) $\cap G \neq \emptyset$ и, значит, $\cap \widehat{G} \neq \emptyset$. Если $H_G = \emptyset$, то $q(G, H) = 0$. Будем далее считать, что $H_G \neq \emptyset$. Тогда в силу того, что $\cap \widehat{G} \neq \emptyset$ и $H \lhd \Gamma(\Omega)$, получим $H_G = (\Gamma(\Omega))_G$ и, значит, $q(G, H) = q(G, \Gamma(\Omega))$. Но для любой цепочки $\widetilde{G}$ число $q(\widetilde{G}, \Gamma(\Omega))$, очевидно, совпадает с числом перемен принадлежности к множеству Ω в ряду всех последовательных звеньев цепочки $\widetilde{G}$, начиная с первого. (Два соседних звена цепочки имеют, очевидно, разную принадлежность к множеству Ω тогда и только тогда, когда их пересечение принадлежит к $\Gamma(\Omega)$.) Поэтому $q(\widetilde{G}, \Gamma(\Omega))$ четно, если у начала и конца $\widetilde{G}$ принадлежности к множеству Ω одинаковые и $q(\widetilde{G}, \Gamma(\Omega))$ нечетно, если у начала и конца $\widetilde{G}$ принадлежности к множеству Ω различные. $\square$

Лемма 4. *Пусть G — замкнутая цепочка, $\Omega \subset W_n^\delta$ и множество H экспансивно в $\Gamma(\Omega)$. Тогда $q(G, H)$ четно.*

Доказательство проводится индукцией по числу звеньев цепочки G. Если G — мини-цепочка, то $q(G, H)$ четно в силу леммы 3. Будем далее считать, что G — не мини-цепочка. Тогда в силу замкнутости G найдется такое j, что в G будет более двух смещений по x_j и найдутся такие g_1 и g_2 — звенья цепочки G, что на участке G^{12} цепочки G от g_1 до g_2 будет ровно два смещения по x_j и они противоположны ("от", "до", "между" в данной лемме понимаются включительно).

Пусть G_1 — участок G от начала до g_1, G^2 — от g_2 до конца, $G^{21} = G^2 + G^1$. Поскольку в G более двух смещений по x_j, то G^{21} содержит хотя бы одно смещение по x_j, а т. к. цепочка $G^{12} + G^{21}$ замкнута, то G^{21} содержит и противоположное смещение по x_j. Таким образом, G^{12} и G^{21} не являются кратчайшими цепочками, связывающими кубы g_1 и g_2. Рассмотрим отдельно два случая.

1) $g_1 \neq g_2$. Пусть G^+ — кратчайшая цепочка, связывающая g_1 и g_2. Тогда $G_1 = G^{12} + (-G^+)$, $G_2 = G^{21} + G^+$ — замкнутые цепочки с меньшим, чем у G, количеством звеньев и, очевидно,

$$q(G, H) = q(G_1, H) + q(G_2, H) - 2q(G^+, H).$$

Поскольку по предположению индукции числа $q(G_1, H)$ и $q(G_2, H)$ четные, то и число $q(G, H)$ четное.

2) $g_1 = g_2$. В этом случае G^{12} и G^{21} — замкнутые цепочки с меньшим, чем у G, количеством звеньев, тогда

$$q(G, H) = q(G^{12}, H) + q(G^{21}, H).$$

Поскольку по предположению индукции числа $q(G^{12}, H)$ и $q(G^{21}, H)$ четные, то и число $q(G, H)$ четное. $\square$

Лемма 5. *Пусть R', R'' — два связных и экспансивных в R множества. Тогда либо $R' \cap R'' = \emptyset$, либо $R' = R''$.*

Доказательство. Допустим, что вопреки утверждению леммы $R' \cap R'' \neq \emptyset$, но существует $r' \in R' \setminus R''$. Пусть $r^0 \in R' \cap R''$. Поскольку R' связно, то существует контур $K = (r^0, r')/R$. Поскольку же $r^0 \in R''$ и $R'' \lhd R$, то все звенья контура K будут принадлежать множеству R'', что противоречит тому, что $r' \notin R''$. $\square$

Лемма 6. *Пусть R' — связное подмножество множества R. Тогда существует однозначно определенное связное и экспансивное в R множество, содержащее R'.*

Доказательство. Пусть $r^0 \in R'$. Рассмотрим систему множеств $M = \{m \mid m \subseteq R, r^0 \in m, m$ связное$\}$. Множество $M \neq \emptyset$, т. к. $R' \in M$. Мы утверждаем, что тогда искомым будет множество $\cup M = \{r \in R \mid \exists m \in M : r \in m\}$.

Докажем вначале связность множества $\cup M$. Пусть $r, r' \in \cup M$. Тогда найдутся $m, m' \in M$ такие, что $r \in m$, $r' \in m'$. В силу связности множеств m и m' найдутся контуры $K = (r, r^0)/m$ и $K' = (r^0, r')/m'$. Но тогда контур $K + K' = (r, r')/ \cup M$ будет связывать множества r и r' элементами из $\cup M$. Связность $\cup M$ установлена.

Покажем теперь, что множество $\cup M$ экспансивно в R. Пусть $r \in \cup M$, $r' \in R$, $r \cap r' \neq \emptyset$. Докажем, что тогда $r' \in \cup M$. Найдется $m \in M$ такое, что $r \in m$. Поскольку $r \cap r' \neq \emptyset$, то $m \cup \{r'\} \in M$ и, значит, $r' \in \cup M$. Экспансивность множества $\cup M$ доказана. Однозначность расширения множества R' до связного и экспансивного в R следует из леммы 5. $\square$

Теорема 1. *Пусть множество $\Omega \subseteq W_n^\delta$ таково, что Ω и $\backslash\Omega$ связны. Тогда и множество $\Gamma(\Omega)$ связно.*

Доказательство. Пусть H — некоторое связное и экспансивное в $\Gamma(\Omega)$ множество. Оно существует в силу леммы 5. Докажем, что в действительности оно совпадает со всем множеством $\Gamma(\Omega)$ и тем самым теорема будет доказана. Пусть $\eta \in H$ и допустим, что существует $\eta^0 \in \Gamma(\Omega) \backslash H$. Существуют, следовательно, кубы $\omega, \omega^0 \in \Omega$ и $\omega', \omega'^0 \in \backslash\Omega$ такие, что $\eta|\omega$, $\eta|\omega'$, $\eta^0|\omega^0$, $\eta^0|\omega'^0$. В силу связности множеств Ω и $\backslash\Omega$ найдутся контуры $K' = (\omega', \omega'^0)/(\backslash\Omega)$, $K = (\omega^0, \omega)/\Omega$.

Но каждую пару соседних звеньев из K' и K можно (в силу леммы 2) соединить мини-цепочкой, которая (в силу леммы 3) пересекает H четное число раз. Следовательно, существуют цепочки $G' = [\omega', \omega^0]$, $G = [\omega^0, \omega]$ такие, что числа $q(G', H)$ и $q(G, H)$ четные. Образуем далее цепочку G^+, дополнив цепочку G одним последним идущим за ω звеном ω'. Поскольку $\eta = \omega \cap \omega' \in H$, то $q(G^+, H) = q(G, H) + 1$. Но тогда замкнутая цепочка $G^0 = G' + G^+$ будет вопреки лемме 4 пересекать множество H нечетное число раз: $q(G^0, H) = q(G', H) + q(G, H) + 1$ нечетно. $\square$

Для любого множества $\Omega \subseteq W_n^\delta$ будем в дальнейшем обозначать через $\Omega^\wedge = \{\omega \in \Omega \mid \exists \omega' \notin \Omega : \omega|\omega'\}$ множество граничных элементов множества Ω.

Лемма 7. *Если для $\Omega \subseteq W_n^\delta$ множество $\Gamma(\Omega)$ связно, то связно и $\Omega^\wedge$.*

Доказательство. Пусть $\omega, \omega' \in \Omega^\wedge$. Докажем, что тогда существует контур $K = (\omega, \omega')/\Omega^\wedge$. Найдутся $\eta, \eta' \in \Gamma(\Omega)$ такие, что $\eta \subset \omega$ и $\eta' \subset \omega'$. Так как $\Gamma(\Omega)$ связно, то найдется контур $K^0 = (\eta, \eta')/\Gamma(\Omega)$. Заменяя каждое звено k из контура K^0 на ω_k такое, что $k \subseteq \omega_k$, $\omega_k \in \Omega^\wedge$, получим искомый контур $K = (\omega, \omega')/\Omega^\wedge$. $\square$

Лемма 8. *Пусть множество $\Omega \subseteq W_n^\delta$ (где $n > 1$) конечно, Ω_∞ бесконечно и экспансивно в $\backslash\Omega$. Тогда $\Omega_+ = \backslash\Omega_\infty$ конечно.*

Доказательство. Поскольку Ω конечно, то найдется число h такое, что если для какого-либо куба ω найдется индекс j такой, что $|\widehat{\omega}_j| > h$, то необходимо $\omega \in \backslash\Omega$. Допустим, что множество Ω_+ бесконечно. Тогда найдутся кубы ω, ω' и индексы j, j' такие, что $\omega \in \Omega_\infty$, $\omega' \in \Omega_+$, $|\widehat{\omega}_j| > h$, $|\widehat{\omega}'_{j'}| > h$. Рассмотрим возможные случаи.

1) $j \neq j'$. В этом случае существует цепочка $G = [\omega, \omega']/(\backslash\Omega)$. Действительно, можно преобразовать вектор $\widehat{\omega}$ в $\widehat{\omega}'$, меняя сначала только j'-ю координату (j-я на этом этапе обеспечивает принадлежность порожденных кубов к $\backslash\Omega$), а затем, не трогая ее, меняя остальные координаты (на этом этапе j'-я координата будет обеспечивать принадлежность порожденных кубов к $\backslash\Omega$). Поскольку $\Omega_\infty \lhd (\backslash\Omega)$ и $\omega \in \Omega_\infty$, получим $\omega' \in \Omega_\infty$, вопреки тому, что $\omega' \in \Omega_+$.

2) $j = j'$. Поскольку $n > 1$, то найдется куб ω^+ и индекс $j^+ \neq j$ такие, что $\widehat{\omega}^+_{j^+} > h$ и $\widehat{\omega}^+_l = \widehat{\omega}_l$ $\forall l \neq j^+$. Существует цепочка $G = [\omega, \omega']/(\backslash G)$. Действительно, можно преобразовать $\widehat{\omega}$ в $\widehat{\omega}^+$, меняя только j^+-ю координату (j-я будет обеспечивать принадлежность порожденных кубов к $\backslash\Omega$). Поскольку $\Omega_\infty \lhd (\backslash\Omega)$ и $\omega \in \Omega_\infty$, то и $\omega^+ \in \Omega_\infty$. Переобозначая далее $\omega = \omega^+$, $j = j^+$, приходим к случаю 1). $\square$

Для любого множества $\Omega \subseteq W_n^\delta$ будем обозначать через $\breve{\Omega} = \{\omega \in W_n^\delta \mid -\omega \in \Omega\}$ множество всех кубов, симметричных относительно начала координат кубам из множества Ω.

Теорема 2. *Пусть множество $\Omega \subseteq W_n^\delta$ связно, а $\Omega \cap \breve{\Omega}$ конечно и непусто. Тогда (при $n > 1$) $\widehat{\Gamma}(\Omega) \cap \widehat{\Gamma}(\breve{\Omega}) \neq \emptyset$.*

Доказательство. Введем обозначения $\Omega' = \breve{\Omega}$, $\Omega^\cap = \Omega \cap \Omega'$, $\Omega^+ = \Omega \setminus \Omega'$, $\Omega'^+ = \Omega' \setminus \Omega$. Пусть Ω^0 связно и экспансивно в $\Omega^\cap$, Ω^0_∞ связно, бесконечно и экспансивно в $\backslash\Omega^0$, $\Omega^0_+ = \backslash\Omega^0_\infty$. (Существование множеств Ω^0 и Ω^0_∞ обеспечивается леммой 6.) Очевидно, $\Omega^0 \subseteq \Omega^0_+$. Докажем, что ω^0_+ связно. Пусть $\omega, \omega' \in \Omega^0_+$, $K = (\omega, \omega')/W_n^\delta$, а k_1 и k_2 — соответственно первый и последний элементы контура K, не принадлежащие множеству Ω^0_+, звено k_1^- предшествует звену k_1 и звено k_2^+ следует за звеном k_2.

Поскольку $\Omega^0_\infty \lhd (\backslash\Omega^0)$, то $k_1^-, k_2^+ \in \Omega^0$, и в силу связности множества Ω^0 существует контур $K^{12} = (k_1^-, k_2^+)/\Omega^0$. Пусть K^1 — участок контура K от начала до k_1^-, а K^2 — от k_2^+ до конца ("от" и "до" понимаются включительно). Но тогда $K^1 + K^{12} + K^2 = (\omega, \omega')/\Omega^0_+$. Таким образом, установили, что ω^0_+ связно.

Введем обозначения

$$\Omega^{0\wedge}_+ = \{\omega \in \Omega^0_+ \mid \exists \omega' \in \Omega^0_\infty : \omega|\omega'\},$$
$$\Omega^{0\wedge}_\infty = \{\omega \in \Omega^0_\infty \mid \exists \omega' \in \Omega^0_+ : \omega|\omega'\}$$

для множеств граничных элементов множеств Ω^0_+ и Ω^0_∞ соответственно. Покажем, что

$$\Omega^{0\wedge}_+ \subseteq \Omega^0. \tag{2.1}$$

Действительно, если бы $\omega \in \Omega^{0\wedge}_+$, но $\omega \in \backslash\Omega^0$, то в силу $\Omega^0_\infty \lhd (\backslash\Omega^0)$ получили бы включение $\omega \in \Omega^0_\infty$, противоречащее тому, что $\omega \in \Omega^0_+ = \backslash\Omega^0_\infty$. Соотношение (2.1) установлено. Покажем далее, что

$$\Omega^{0\wedge}_\infty \cap \Omega^\cap = \emptyset. \tag{2.2}$$

Допустим, что существует $\omega \in \Omega^{0\wedge}_\infty \cap \omega \in \Omega^\cap$. Тогда $\omega \in \Omega^0_\infty$ и существует $\omega' \in \Omega^0_+$ такое, что $\omega \cap \omega' \neq \emptyset$. Отсюда, используя (2.1), будем иметь $\omega' \in \Omega^{0\wedge}_+ \subseteq \Omega^0 \subseteq \Omega^\cap$. В силу $\Omega^0 \lhd \Omega^\cap$ получим $\omega \in \Omega^0$, что противоречит включению $\omega \in \Omega^0_\infty$. Соотношение (2.2) установлено.

Предположим далее, что теорема не верна, т. е. выполняется равенство

$$\widehat{\Gamma}(\Omega) \cap \widehat{\Gamma}(\breve{\Omega}) = \emptyset. \tag{2.3}$$

Для доказательства теоремы достаточно убедиться в том, что это предположение неизбежно ведет к противоречиям. Докажем (в предположении (2.3)) включение

$$\Omega^{0\wedge}_\infty \subseteq \Omega^+ \cup \Omega'^+. \tag{2.4}$$

В силу (2.2) достаточно убедиться лишь в том, что $\Omega^{0\wedge}_\infty \subseteq \Omega \cup \Omega'$. Пусть существует куб $\omega \in \Omega^{0\wedge}_\infty$, но $\omega \notin \Omega \cup \Omega'$. Тогда $\omega \in \Omega^0_\infty$ и существует $\omega' \in \Omega^0_+ : \omega|\omega'$. Отсюда, используя (2.1), будем иметь $\omega' \in \Omega^{0\wedge}_+ \subseteq \Omega^0 \subseteq \Omega^\cap$ и, значит, $\emptyset \neq \omega \cap \omega' \subseteq \widehat{\Gamma}(\Omega) \cap \widehat{\Gamma}(\Omega')$ и даже $\omega \cap \omega' \in \Gamma(\Omega) \cap \Gamma(\Omega')$. Соотношение (2.4) установлено.

Докажем далее (в предположении (2.3)), что

$$\Omega^{0\wedge}_\infty \subseteq \Omega^+ \quad \text{либо} \quad \Omega^{0\wedge}_\infty \subseteq \Omega'^+. \tag{2.5}$$

Предположим, что вопреки (2.5) существуют $\omega, \omega' \in \Omega^{0\wedge}_\infty$ такие, что $\omega \in \Omega^+$, $\omega' \in \Omega'^+$. В силу связности ω^0_+, теоремы 1 и леммы 7 существует контур $K = (\omega, \omega')/\Omega^{0\wedge}_\infty$. В силу (2.4) найдутся k, k' — соседние элементы этого контура K — такие, что $k \in \Omega^+$, $k' \in \Omega'^+$. Следовательно, существует (в силу леммы 2) мини-цепочка $G = [k, k']$.

Поскольку $k \in \Omega^+$, то если G не пересекает $\Gamma(\Omega)$, то и $k' \in \Omega$, а если G не пересекает $\Gamma(\Omega')$, то $k' \notin \Omega'$. Поэтому G пересекает $\Gamma(\Omega)$ и $\Gamma(\Omega')$. И следовательно, с учетом леммы 1 будем иметь $\emptyset \neq \cap\widehat{G} \subseteq \widehat{\Gamma}(\Omega) \cap \widehat{\Gamma}(\Omega')$, что противоречит предположению (2.3). Итак, (2.5) установлено.

Рассмотрим случай

$$\Omega^{0\wedge}_\infty \subseteq \Omega^+. \tag{2.6}$$

(Обоснование 2-го возможного случая $\Omega^{0\wedge}_\infty \subseteq \Omega'^+$ аналогично.) Докажем (в предположении (2.3) и (2.6)), что выполняется

$$\Omega' \subseteq \Omega^0_+. \tag{2.7}$$

Допустим, что вопреки (2.7) существует $\omega' \in \Omega' \setminus \Omega^0_+$; пусть $\omega \in \Omega^0$. В силу связности Ω' существует контур $K = (\omega, \omega')/\Omega'$. Тогда найдутся соседние звенья этого контура k, k' такие, что $k \in \Omega^0_+$, $k' \notin \Omega^0_+$, и в силу леммы 2 существует мини-цепочка $G = [k, k']$. Пусть $\overline{g}$ — *последнее* звено цепочки G такое, что $\overline{g} \in \Omega^0_+$, и $\overline{g}^+$ — следующее за ним звено. Учитывая (2.1) и (2.6), будем иметь $\overline{g} \in \Omega^{0\wedge}_+ \subseteq \Omega^0 \subseteq \Omega'$, $\overline{g}^+ \in \Omega^{0\wedge}_\infty \subseteq \Omega^+$ и, значит, $\overline{g}^+ \notin \Omega'$. Следовательно, пара $\overline{g}$, $\overline{g}^+$ пересекает $\Gamma(\Omega')$, а точнее $\overline{g} \cap \overline{g}^+ \in \Gamma(\Omega')$.

Пусть $\overline{\overline{g}}$ — *первое* после $\overline{g}^+$ звено цепочки G и $\overline{\overline{g}} \notin \Omega^+$. (Оно существует, поскольку $k' \in \Omega'$ и, значит, $k' \notin \Omega^+$.) Рассмотрим два случая.

1) $\overline{\overline{g}} \notin \Omega^\cap$. В этом случае $\overline{\overline{g}} \notin \Omega$. Для звена $\overline{\overline{g}}^-$, предшествующему звену $\overline{\overline{g}}$, выполняется включение $\overline{\overline{g}}^- \in \Omega^+ \subseteq \Omega$. Следовательно, пара $\overline{\overline{g}}^-$, $\overline{\overline{g}}$ пересекает $\Gamma(\Omega)$, а точнее $\overline{\overline{g}}^- \cap \overline{\overline{g}} \in \Gamma(\Omega)$. Поскольку в силу леммы 1 $\overline{g} \cap \overline{g}^+ \cap \overline{\overline{g}}^- \cap \overline{\overline{g}} \neq \emptyset$, то, вопреки (2.3), будем иметь $\widehat{\Gamma}(\Omega) \cap \widehat{\Gamma}(\Omega') \neq \emptyset$.

2) $\overline{\overline{g}} \in \Omega^\cap$. Поскольку в силу леммы 1 $\overline{g} \cap \overline{\overline{g}} \neq \emptyset$, а также учитывая, что $\overline{g} \in \Omega^0$, $\Omega^0 \lhd \Omega^\cap$, получим $\overline{\overline{g}} \in \Omega^0 \subseteq \Omega^0_+$, что противоречит определению звена $\overline{g}$. Соотношение (2.7) установлено.

Поскольку множество Ω^0_+ конечно (в силу леммы 8), а множество Ω^0_∞ бесконечно и связно, то найдется контур $K = (\omega, \omega')/\Omega^0_\infty$ такой, что $\omega \in \Omega^{0\wedge}_\infty$, $\omega' \notin \breve{\Omega}^0_+$. Пусть $\breve{K}$ — контур, полученный из K заменой каждого звена (куба) k из K на симметричное относительно начала координат звено $\breve{k}$, т. е. $\breve{k} = -k$. Докажем (в предположении (2.3) и (2.6)), что выполняется

$$\breve{K} \subseteq \Omega^0_\infty, \tag{2.8}$$

т. е. каждое звено (куб) из $\breve{K}$ есть элемент (куб) из множества Ω^0_∞. Поскольку в силу (2.7) $\Omega^\cap \subseteq \Omega' \subseteq \Omega^0_+$, то $K \cap \Omega^\cap = \emptyset$. Поскольку же $\Omega^\cap = \breve{\Omega}^\cap$, то и $\breve{K} \cap \Omega^\cap = \emptyset$. Для последнего звена $\breve{\omega}'$ контура $\breve{K}$, очевидно, выполняется $\breve{\omega}' = -\omega' \in \Omega^0_\infty$. Допустим, что (2.8) не выполняется и $\overline{k}$ — последнее из звеньев контура $\breve{K}$, для которых $\overline{k} \notin \Omega^0_\infty$. Если бы $\overline{k} \in (\setminus\Omega^0)$, то в силу $\Omega^0_\infty \lhd (\setminus\Omega^0)$ получили бы включение $\overline{k} \in \Omega^0_\infty$ вопреки определению звена $\overline{k}$. Если же $\overline{k} \in \Omega^0$, то получим $\breve{K} \cap \Omega^\cap \neq \emptyset$ вопреки ранее доказанному. Итак, (2.8) установлено.

Из (2.8) следует $\breve{\omega} = -\omega \in \Omega^0_\infty$. С другой стороны, используя (2.7), вопреки этому будем иметь $\breve{\omega} \in \Omega' \subseteq \Omega^0_+$.

Таким образом, допущение (2.3) ведет к противоречиям. $\square$

3. О представлении точек множества в виде полусуммы граничных точек

Пусть A — выпуклое множество из E_n, $\mathcal{K}(A)$ — его внутренний конус, т. е. совокупность (вместе с точкой 0) направляющих векторов лучей, содержащихся в A, и $\mathcal{R}(A) = \mathcal{K}(A) \cap (-\mathcal{K}(A))$ — его внутреннее подпространство, т. е. совокупность (вместе с точкой 0) направляющих векторов прямых, содержащихся в A. Ниже будем многократно использовать известную лемму из выпуклого анализа, которую здесь сформулируем в следующей форме (см. [1], с. 37, лемма 13; [2], с. 148, а также [3], с. 79, теорема 8.2).

Лемма 9. *Пусть выпуклое множество $A \subseteq E_n$ и последовательность точек $\{x^k\}$ таковы, что*

$$\sup_k \rho(x^k, A) = \sup_k(\inf_{x\in A} |x^k - x|) < +\infty, \quad |x^k| \to +\infty, \quad x^k/|x^k| \to v.$$

Тогда множество A содержит лучи с направляющим вектором v (т. е. $v \in \mathcal{K}(A)$), причем указанные лучи проходят через каждую точку множества A, внутреннюю относительно аффинной оболочки множества A.

Ниже в теоремах 3–5 речь пойдет о множествах $A \subseteq E_n$, помещающихся в выпуклых множествах, не содержащих прямых, т. е. для которых выполняется

$$\dim \mathcal{R}(\operatorname{conv} A) = 0, \tag{3.1}$$

где $\operatorname{conv} A$ — выпуклая оболочка множества A.

Теорема 3. *Пусть множество $A \subset E_n$, где $n > 1$, содержится в некотором выпуклом множестве, не содержащем прямых (т.е. для него выполняется (3.1)). Тогда имеет место включение*

$$A \subseteq \frac{\Gamma(A) + \Gamma(A)}{2},$$

т. е. каждая точка множества A представляется в виде полусуммы двух граничных точек этого множества.

Доказательство. Допустим, что вопреки теореме 3, существует точка

$$x^0 \in A, \quad x^0 \notin \frac{\Gamma(A) + \Gamma(A)}{2}. \tag{a}$$

Легко видеть, что эффект (a) сохраняется при переносе начала координат в точку x^0; поэтому будем с самого начала считать, что $x^0 = 0$. Построим множество $\Omega^{0\delta} = \{\omega \in W_n^\delta \mid \omega \cap A \neq \emptyset\}$. В силу леммы 6 существует множество Ω^δ связное и экспансивное в $\Omega^{0\delta}$, и которому принадлежит хотя бы один куб ω, содержащий точку 0 (а значит, и все кубы, содержащие 0). Пусть $\Omega'^\delta = \{\omega \in W_n^\delta \mid -\omega \in \Omega^\delta\}$ — множество кубов, симметричных относительно начала координат кубам из множества Ω^δ. Поскольку $0 \in A$, то $\Omega^\delta \cap \Omega'^\delta \neq \emptyset$. В силу (3.1) и леммы 9 множество $\Omega^\delta \cap \Omega'^\delta$ конечно. Поэтому в силу теоремы 2 найдутся точки $y^\delta \in \widehat{\Gamma}(\Omega^\delta) \cap \widehat{\Gamma}(\Omega'^\delta)$ и $-y^\delta \in \widehat{\Gamma}(\Omega^\delta)$. Поскольку $\Omega^\delta \lhd \Omega^{0\delta}$, то $\Gamma(\Omega^\delta) \subseteq \Gamma(\Omega^{0\delta})$ и, значит, $y^\delta \notin A$ и $-y^\delta \notin A$. Поэтому найдутся точки $x^\delta, x^{\delta+} \in \Gamma(A)$ такие, что $|x^\delta - y^\delta| \le \delta\sqrt{n}$, $|x^{\delta+} + y^\delta| \le \delta\sqrt{n}$.

Пусть последовательность $\delta = \delta_k \to 0$. В силу (3.1) и леммы 9 последовательность x^{δ_k} ограниченная. Поэтому (на некоторой ее подпоследовательности) существует предел $x^{\delta_k} \to \overline{x}$ и, значит, $x^{\delta_k+} \to -\overline{x}$, причем $\overline{x}, -\overline{x} \in \Gamma(A)$. Тогда, вопреки предположению (a), получим $0 = (\overline{x} + (-\overline{x}))/2$. □

Следствие 1. Если $A \subset E_n$, где $n > 1$, — выпуклое замкнутое множество, не содержащее прямых, то для него выполняется равенство $2A = \Gamma(A) + \Gamma(A)$.

Следствие 2. Если $f(x)$ — выпуклая на E_n, где $n \ge 1$, функция, не являющаяся линейной, то для нее выполняется равенство $2 \operatorname{epi} f(x) = \Gamma f(x) + \Gamma f(x)$, где $\operatorname{epi} f(x)$ — надграфик функции f и $\Gamma f(x)$ — ее график.

Следующая теорема 4 является следствием и в то же время обобщением предыдущей теоремы 3.

Теорема 4. *Пусть множество $A \subset E_n$ таково, что*

$$\dim \mathcal{R}(\operatorname{conv} A) < n - 1. \tag{3.2}$$

Тогда выполняется $A \subseteq \frac{\Gamma(A)+\Gamma(A)}{2}$.

Доказательство. Пусть $x^0 \in A$, $x^0 \notin (\Gamma(A)+\Gamma(A))/2$. В силу (3.2) найдутся ненулевые векторы v^1, v^2 из ортогонального дополнения подпространства $\mathcal{R}(\operatorname{conv} A)$ такие, что $v^1 \perp v^2$. Пусть $P^0 = x^0 + L\{v^1, v^2\}$, где $L\{v^1, v^2\}$ — линейная оболочка пары векторов $\{v^1, v^2\}$.

Множество $A^0 = A \cap P^0$ лежит в двумерном линейном многообразии P^0 и не содержит прямых. По теореме 3 найдутся точки x^1 и x^2 граничные для A^0 относительно P^0 такие, что $x^0 = (x^1 + x^2)/2$. Но, очевидно, точки x^1 и x^2 будут тогда граничными для A относительно E_n. $\square$

Будем говорить, что множество $A \subseteq E_n$ является слабо связным, если его нельзя разбить на два подмножества A', A'' таких, что

$$A = A' \cup A'', \quad d(A', A'') = \inf\{|x' - x''| \mid x' \in A',\ x'' \in A''\} > 0.$$

Например, следующие множества являются слабо связными, но не являются связными в "обычном смысле" (см. [4], с. 463):

1) множество всех рациональных чисел в E_1,

2) множество $\{x \in E_2 \mid x_2 = \exp x_1$ или $x_2 = 0\}$, являющееся объединением экспоненты и ее асимптоты.

В то же время легко видеть, что всякое связное в "обычном смысле" множество является и слабо связным.

Лемма 10. *Для того чтобы множество $A \subset E_n$ было слабо связным, необходимо и достаточно, чтобы при любом $\delta > 0$ было связным множество $\Omega^\delta = \{\omega \in W_n^\delta \mid \omega \cap A \neq \emptyset\}$.*

Доказательство. Необходимость. Допустим, что A слабо связно, но Ω^δ при некотором $\delta > 0$ несвязно. Это значит, что найдутся кубы $\omega, \omega' \in \Omega^\delta$, для которых не существует контура $K = (\omega, \omega')/\Omega^\delta$. В силу леммы 6 существует связное множество Ω^ω такое, что $\omega \in \Omega^\omega$, $\Omega^\omega \lhd \Omega^\delta$.

Очевидно, $\omega' \notin \Omega^\omega$. Поэтому $\Omega^\omega \neq \Omega^\delta$. Обозначим $\Omega'^\omega = \Omega^\delta \setminus \Omega^\omega$. Поскольку $\Omega^\omega \lhd \Omega^\delta$, то кубы из Ω^ω не могут пересекаться с кубами из Ω'^ω. Поэтому $d(\overline{\omega}, \overline{\omega}') \geq \delta$ при любых $\overline{\omega} \in \Omega^\omega$, $\overline{\omega}' \in \Omega'^\omega$. Обозначив $\overline{A} = A \cap (\cup\Omega^\omega)$, $\overline{A}' = A \cap (\cup\Omega'^\omega)$, будем иметь $A = \overline{A} \cup \overline{A}'$ и $d(\overline{A}, \overline{A}') \geq \delta$, что противоречит тому, что множество A слабо связно.

Достаточность. Допустим, что A не является слабо связным, т. е. существуют A', A'' и число γ такие, что $A = A' \cup A''$ и $d(A', A'') > \gamma > 0$. Докажем, что тогда множество Ω^δ несвязно при $\delta = \gamma/(2\sqrt{n})$. Введем множества

$$\Omega'^\delta = \{\omega \in W_n^\delta \mid \omega \cap A' \neq \emptyset\}, \quad \Omega''^\delta = \{\omega \in W_n^\delta \mid \omega \cap A'' \neq \emptyset\}.$$

Допустим, что Ω^δ связно. Пусть $\omega' \in \Omega'^\delta$, $\omega'' \in \Omega''^\delta$. Тогда найдутся контур $\mathcal{K} = (\omega', \omega'')/\Omega^\delta$ и соседние (или совпадающие) элементы k' и k'' контура $\mathcal{K}$ такие, что $k' \in \Omega'^\delta$, $k'' \in \Omega''^\delta$. Тогда найдутся и точки z', z'' такие, что

$$z' \in k', \ \ z' \in A'; \quad z'' \in k'', \ \ z'' \in A''; \quad |z' - z''| \leq 2\sqrt{n}\,\delta = \gamma,$$

что противоречит неравенству $d(A', A'') > \gamma$. $\square$

Теорема 5. *Пусть множество $A \subset E_n$, где $n > 1$, слабо связно и содержится в некотором выпуклом множестве, не содержащем прямых, т. е. для него выполняется* (3.1). *Тогда имеет место включение $A + A \subseteq \Gamma(A) + \Gamma(A)$.*

Доказательство. Допустим, что вопреки теореме 5 существует точка

$$x^0 \in A + A, \quad x^0 \notin \Gamma(A) + \Gamma(A). \tag{б}$$

Легко видеть, что эффект (б) сохраняется при переносе начала координат в точку x^0; поэтому будем с самого начала считать, что $x^0 = 0$. Построим (связные в силу леммы 10) множества $\Omega^\delta = \{\omega \in W_n^\delta \mid \omega \cap A \neq \emptyset\}$, $\Omega'^\delta = \{\omega \in W_n^\delta \mid -\omega \in \Omega^\delta\}$. Ω'^δ состоит из кубов, симметричных относительно начала координат кубам из множества Ω^δ. Поскольку $0 \in A + A$, то A содержит симметричные относительно нуля точки и поэтому $\Omega^\delta \cap \Omega'^\delta \neq \emptyset$. В силу (3.1) и леммы 9 множество $\Omega^\delta \cap \Omega'^\delta$ конечно. Поэтому в силу теоремы 2 найдутся точки $y^\delta \in \widehat{\Gamma}(\Omega^\delta) \cap \widehat{\Gamma}(\Omega'^\delta)$ и $-y^\delta \in \widehat{\Gamma}(\Omega^\delta)$. Поскольку, очевидно, $y^\delta \notin A$, $-y^\delta \notin A$, то найдутся точки $x^\delta, x^{\delta+} \in \Gamma(A)$ такие, что $|x^\delta - y^\delta| \leq \delta\sqrt{n}$, $|x^{\delta+} + y^\delta| \leq \delta\sqrt{n}$. Пусть теперь последовательность $\delta_k \to 0$. В силу (3.1) и леммы 9 последовательность x^{δ_k} ограниченная. Поэтому (на некоторой ее подпоследовательности) существует предел $x^{\delta_k} \to \overline{x}$ и, значит, $x^{\delta_k+} \to -\overline{x}$, причем $\overline{x}, -\overline{x} \in \Gamma(A)$. Тогда, вопреки предположению (б), получим $0 = \overline{x} + (-\overline{x})$. $\square$

Замечание. Интересно отметить, что теорема 5 не обобщается на манер теоремы 3, т. е. в теореме 5 условие (3.1) нельзя заменить на более общее условие (3.2). Чтобы убедиться в этом, достаточно рассмотреть в E_3 множество A вида $A = A_1 \cup A_2$, где

$$A_1 = \{x \in E_3 \mid 1/(1 + x_1^2) \leq x_2,\ x_3 \leq 0\},$$
$$A_2 = \{x \in E_3 \mid x_2 = -2/(1 + x_1^2),\ x_3 = 0\},$$

выбрать $x_0 = (0, 0, \alpha)$, $\alpha < 0$, и заметить, что $x_0 \in A + A$, но $x_0 \notin \Gamma(A) + \Gamma(A)$, хотя множество A слабо связное, $\mathcal{R}(\operatorname{conv} A) = \{x \in E_3 \mid x_2 = x_3 = 0\}$ и, значит, $\dim(\mathcal{R}(\operatorname{conv} A)) = 1 < 2 = n - 1$, т. е. для A выполняется условие (3.2).

Авторы благодарны Н.А. Курош за ценные замечания и, в частности, за ознакомление с простым доказательством теоремы 3 для случая выпуклого ограниченного множества. Авторы также благодарны рецензенту за весьма тонкие замечания.

Литература

1. Белоусов Е.Г. *Введение в выпуклый анализ и целочисленное программирование.* – М.: Изд-во МГУ, 1977. – 196 с.
2. Белоусов Е.Г., Андронов В.Г. *Разрешимость и устойчивость задач полиномиального программирования.* – М.: Изд-во МГУ, 1993. – 272 с.
3. Рокафеллар Р. *Выпуклый анализ.* – М.: Мир, 1973. – 469 с.
4. Ильин В.А., Позняк Э.Г. *Основы математического анализа.* Ч. 1. – М.: Наука, 1971. – 599 с.

Московский государственный университет

Поступила
22.08.1997