ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2005 МАТЕМАТИКА № 11 (522)

УДК 517.926

А.В. ДАНЕЕВ, В.А. РУСАНОВ, Д.Ю. ШАРПИНСКИЙ

ПРИНЦИП МАКСИМУМА ЭНТРОПИИ В СТРУКТУРНОЙ ИДЕНТИФИКАЦИИ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ. АНАЛИТИЧЕСКИЙ ПОДХОД

Подзаголовок статьи — "аналитический подход" вызван двумя причинами. Во-первых, все концептуальное обсуждение проблемы апостериорного математического моделирования динамических систем (D-систем) выполнено в рамках энтропийного анализа [1], [2], общей теории идентификации [3] и теории реализации Калмана–Месаровича [4]–[9]. Во-вторых, намеченная ниже программа выделяет пять областей исследования в рамках единой структуры [10]–[12]:

— *анализ типов* должен определять тип структуры D-системы, представленной набором пар "траектория, управление";

— *синтез типов* предназначен выявлять условия сохранения ранее установленного типа структуры исследуемой D-системы при расширении информации о ее поведении;

— *анализ представлений* должен определять аналитическое представление (вид) структуры D-системы, в положении, когда известен ее тип;

— *синтез представлений* призван описывать инвариантность вида структуры исследуемой D-системы по отношению к расширению информации о ее поведении;

— *конструирование* предполагает "манипулирование" числовыми параметрами математической модели системы в рамках той аналитической структуры, которая зафиксирована результатом решений четырех предыдущих задач.

Заметим, что формально типу структуры отвечает [13] ее *род* на соответствующих ступенях шкалы множеств, при этом вид структуры является сужением типа структуры на фиксированный класс математических моделей систем с конечной идентификационной размерностью ([11], определение 8). В качестве сравнения с данной программой можно рекомендовать "три шага" в теоретико-модельном подходе к выбору и подтверждению структуры модели системы, предложенным в ([3], с. 349).

1. Предварительные сведения

Везде далее термин "структура" будет пониматься в смысле ([13], с. 245), а запись (Δ, S_Δ) означать, что множество Δ наделено структурой S_Δ.

Определение 1 ([12], с. 10). D-системой назовем упорядоченную тройку пар $\{(T, S_T), (W, S_W), (\Omega, S_\Omega)\} =: \Sigma$, в которой T — множество моментов времени, W — множество алфавита сигналов, Ω — поведение D-системы, т. е. семейство процессов $\omega : T \to W$, совместимых с динамикой D-системы, при этом фиксированный кортеж $\langle S_T, S_W, S_\Omega \rangle$ будем называть структурой D-системы Σ.

Относительно структуры S_T ограничимся изучением линейного порядка в T (обозначим его как обычно $<$). В такой постановке пару (T_*, T^*) подмножеств из T такую, что $T_* \cup T^* = T$ и $T_* \neq \emptyset \neq T^*$, а из $t_* \in T_*$ и $t^* \in T^*$ следует $t_* < t^*$, называют сечением множества T. Говорят [14], что сечение (T_*, T^*) образует скачок, если существует наибольший элемент в T_* и наименьший

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 05-01-00623, Российской федеральной целевой программы "Интеграция", грант № Б0077, программы фундаментальных исследований № 19 Президиума Российской академии наук (проект № 2.5).

элемент в T^*, и называют щелью, если не существует наибольшего элемента в T_* и наименьшего элемента в T^*.

Определение 2. Тип D-системы $\{(T,S_T),(W,S_W),(\Omega,S_\Omega)\}$ дискретный, если структура S_T такова, что любое сечение в T — скачок, и непрерывный, если никакое сечение в T не является скачком или щелью.

Пусть W — абелева группа со сложением $\oplus$ в качестве групповой операции, R — некоторое поле и пусть, кроме того, задано такое отображение $\otimes : R\times W \to W$, что комплекс $(W,(\oplus,R,\otimes))$ — векторное пространство над полем R.

Определение 3 ([5], с. 84). D-система $\{(T,S_T),(W,S_W),(\Omega,S_\Omega)\}$ имеет линейный тип, если структура S_Ω такова, что

$$\omega(\cdot)\in\Omega\&\omega'(\cdot)\in\Omega \Rightarrow \exists\omega^*(\cdot)\in\Omega : (\forall t\in T)\ \omega^*(t)=\omega(t)\oplus\omega'(t)\in W;$$
$$\omega(\cdot)\in\Omega\&\alpha\in R \Rightarrow \exists\omega^*(\cdot)\in\Omega : (\forall t\in T)\ \omega^*(t)=\alpha\otimes\omega(t)\in W.$$

Определение 2.1 ([5], с. 210) постулирует $\{(T,S_T),(W,S_W),(\Omega^\#,S_{\Omega^\#})\}$ как подсистему D-системы $\{(T,S_T),(W,S_W),(\Omega,S_\Omega)\}$, если $\Omega^\#\subset\Omega$. В этом положении назовем $\Omega^\#$ частичным поведением D-системы или множеством наблюдаемых динамических процессов.

Линейность D-системы не гарантирует линейность ее произвольной подсистемы, например, когда $\Omega^\#$ — ограниченное множество, поскольку в данном случае речь идет об экзогенном представлении системы. Эндогенную модель системы дадим в определении 4. По Калману эндогенной и экзогенной аксиоматизации систем отвечают, соответственно, определения 1.1 ([4], с. 13) и 1.8 ([4], с. 20). В этой связи отметим, что все D-системы суть подсистемы линейной D-системы $\{(T,S_T),(W,S_W),(W^T,S_{W^T})\}$.

Определения 1–3 будучи необходимыми в построении аналитической теории структурной идентификации D-систем не достаточны для этой цели. Так, простая линейная D-система $\{(T,S_T),(R,S_R),(R^T,S_{R^T})\}$, где R — поле вещественных чисел, T — конечный интервал в R, не представляет математическую модель линеаризации реального "физического объекта". Отсюда возникает потребность в структурах, определяющих более узкую свободу в обращении с множествами динамических процессов.

2. Формулировки "стандартных" задач классификации непрерывных D-систем

В структурной идентификации D-систем важно понимать "математическую онтологию" причин, по которым заданное семейство пар "траектория, управление" допускает (или не допускает) характеризацию своей структуры посредством заранее выделенного класса уравнений состояний.

Пусть $t_0 < t_1$, $T := [t_0,t_1]$ — отрезок числовой прямой R с мерой Лебега μ и пусть $\Pi_{ACLL} := \Pi_{ACL}\times L_{p'}(T,\mu,R^q) := AC(T,R^n)\times L_{p'}(T,\mu,R^m)\times L_{p'}(T,\mu,R^q)$, где AC, $L_{p'}$ — "стандартные" функциональные пространства абсолютно непрерывных вектор-функций и классов эквивалентности всех μ-интегрируемых по Бохнеру [15] на T вектор-функций с $L_{p'}$-нормой. Обозначение Π_{ACLL} будет применяться без указания, что а) $\Pi_{ACLL}\subset H_{(Lp')^3} := L_{p'}(T,\mu,R^n)\times L_{p'}(T,\mu,R^m)\times L_{p'}(T,\mu,R^q)$; б) точкам из $AC(T,R^n)$ в конструкции Π_{ACLL} соответствуют классы эквивалентности из $L_{p'}(T,\mu,R^n)$; в) топологическая структура в Π_{ACLL} есть сужение метрической топологии из банахова пространства $H_{(Lp')^3}$ с нормой $\|(\omega_1,\omega_2,\omega_3)\|_{Hp'} := \Big(\int\limits_T(\|\omega_1(t)\|^{p'}_{R^n} + \|\omega_2(t)\|^{p'}_{R^m} + \|\omega_3(t)\|^{p'}_{R^q})\mu(dt)\Big)^{1/p'}$, где $\omega_1\in L_{p'}(T,\mu,R^n)$, $\omega_2\in L_{p'}(T,\mu,R^m)$, $\omega_3\in L_{p'}(T,\mu,R^q)$, $p'\in(1,\infty)$, $\|\cdot\|_{R^k}$ — норма в R^k. Условимся, что позиции а)–в) распространяются и на подмножества из Π_{ACLL}.

Выделим непрерывные управляемые D-системы с алфавитом сигналов R^{n+m} и траекториями в виде решений Каратеодори ([10], с. 70) для векторно-матричных квазилинейных дифференциальных уравнений вида

$$\frac{dx(t)}{dt} = A(t)x(t) + B(t)u(t) + B^{\#}(t)u^{\#}(x(t)), \quad t \in T; \tag{2.1}$$

$x(\cdot)\in AC(T, R^n)$ — решение Каратеодори (K-решение), $u(\cdot)\in L_{p'}(T,\mu,R^m)$, $u^{\#}(x(\cdot))\in L_{p'}(T,\mu,R^q)$ — соответственно программное и позиционное управления, $(A(\cdot), B(\cdot), B^{\#}(\cdot))\in L_p(T,\mu,L(R^n,R^n))\times L_p(T,\mu,L(R^m,R^n)) \times L_p(T,\mu,L(R^q,R^n))$, где $p, p' \in (1,\infty)$ — сопряженные числа $1/p + 1/p' = 1$, $L(R^k, R^n)$ $(k = n, m, q)$ — пространство с операторной нормой всех матриц, действующих из R^k в R^n. Примем соглашение, что допускается нестрогое выражение "*пара* $(x(\cdot), u(\cdot)) \in \Pi_{ACL}$ — *K-решение системы* (2.1)", если $(x(\cdot), u(\cdot), u^{\#}(x(\cdot))) \in \Pi_{ACLL}$ μ-почти всюду удовлетворяет (2.1) для некоторой тройки $(A(\cdot), B(\cdot), B^{\#}(\cdot)) \in L_p(T,\mu,L(R^n,R^n)) \times L_p(T,\mu,L(R^m,R^n)) \times L_p(T,\mu,L(R^q,R^n))$. Обозначенную тройку назовем $(A, B, B^{\#})$-архитектурой или $(A, B, B^{\#})$-моделью системы (2.1).

Тезис Л. Льюнга о том, что "множество моделей-кандидатов устанавливается посредством фиксации той группы моделей, в пределах которой собираемся искать наиболее подходящую" ([3], с. 20), может быть постулирован как

Определение 4. Непустой фиксированный класс позиционных законов управления $U_{A,q} := \{u_\alpha : u_\alpha = \mathrm{col}(u_{\alpha 1}, \ldots, u_{\alpha q})\}_{\alpha\in A}$, где A — нумерация законов, такой, что $u^{\#} \in U_{A,q} \Rightarrow u^{\#}(x(\cdot)) \in L_{p'}(T,\mu,R^q)$, $x(\cdot) \in AC(T,R^n)$ назовем структурным классификатором и скажем, что поведение $P \subset E \subset \Pi_{ACL}$ D-системы $\{(T, S_T), (R^{n+m}, S_{R^{n+m}}), (E, S_E)\}$ согласовано с $U_{A,q}$ структурой обыкновенной квазилинейно дифференциальной совместимости (ОКД-$U_{A,q}$-совместимости), если существует такая дифференциальная система (2.1) с $u^{\#} \in U_{A,q}$, что P удовлетворяет классу ее K-решений.

Замечание 1. Наличие в P структуры ОКД-$U_{A,q}$-совместимости предполагает, что а) S_T — структура линейно упорядоченного метрического пространства с метрикой $d(t', t'') := |t' - t''|$, $t', t'' \in T$; б) структура S_E такова, что для пар $(x, u) \in E \cap P$ справедливо $x(t) \to u^{\#}(x(t)) \in L_{p'}(T,\mu,R^q)$, где позиционный закон $u^{\#}$ задан явным аналитическим представлением; в) $S_{R^{n+m}}$ — структура банахова пространства; г) ОКД-$\{u^{\#} \equiv 0\}$-совместимость эквивалентна обыкновенной линейно дифференциальной совместимости (ОЛД-совместимости) [9].

Коррективом п. г) замечания 1 служит следующая важная теорема, показывающая, что структуры ОКД- и ОЛД-совместимости в Π_{ACL} и $\mathrm{AC}(T,R^n) \times L_{p'}(T,\mu,R^k)$, $k = m + q$, соответственно, всегда можно согласовать. Доказательство теоремы основывается на методе сравнения [10].

Теорема 1. *Пусть $U_{A,q}$ — некоторый структурный классификатор. Тогда частичное поведение $P \subset E \subset \Pi_{ACL}$ D-системы $\{(T, S_T), (R^{n+m}, S_{R^{n+m}}), (E, S_E)\}$ обладает структурой ОКД-$U_{A,q}$-совместимости в том и только том случае, если существует позиционный закон управления $u^{\#} \in U_{A,q}$, для которого множество $\{(x, u) : (x', u') \in P,\ x = x' \& u = \mathrm{col}(u', u^{\#}(x'))\}$ ОЛД-совместимо в Π_{ACLL}.*

Первым шагом анализа типов при декомпозиции D-системы на подсистемы выступает простая идея — поведение системы, как правило, является дизъюнктным семейством с элементами гомогенного типа. Так, для линейной непрерывной D-системы ее отдельная D-подсистема, как класс эквивалентности, строится "по чертежам" сильной (A, B)-модели ([6], определение 5). Аналогично фактор-множество подсистем нелинейной D-системы естественно реализовать посредством "сильной" $(A, B, B^{\#})$-архитектуры у каждого класса поведения D-подсистемы.

Определение 5. Пусть $U_{A,q}$ — некоторый фиксированный структурный классификатор и в $N \subset \Pi_{ACL}$ существует максимальное относительно теоретико-множественного включения ОКД-$U_{A,q}$-совместимое множество $P^{\#}$. Тогда каждую $(A, B, B^{\#})$-модель, реализующую $P^{\#}$ с некоторым $u^{\#} \in U_{A,q}$, назовем сильной $(A, B, B^{\#})$-архитектурой с позиционным законом управления $u^{\#}$ над $P^{\#}$ (соответственно сильной неопровержимой $(A, B, B^{\#})$-архитектурой над N, если $P^{\#} = N$).

Характер изучаемых ниже непрерывных D-систем и сопряженных им дифференциальных моделей (2.1) отличается от изучавшихся в [6]–[9] не только с формальной стороны. А именно, моделируется не столько аналитический аппарат, являющийся естественным обобщением структуры ОЛД-совместимости [9], и его инструментальные средства, сколько методологическая проблематика: "классический взгляд на моделирование — это дескриптивный подход физика" ([12], с. 121). В этой парадигме конкретной физической теории в рамках структурного классификатора $U_{A,q}$, как правило, основанного на каком-либо универсальном вариационном принципе, сопоставляется некоторая математическая структура $\langle S_T, S_{R^{n+m}}, S_E\rangle$, позволяющая определить предмет изучения данной теории — ее аналитический объект в виде фиксированной D-системы $\{(T, S_T), (R^{n+m}, S_{R^{n+m}}), (E, S_E)\}$.

В работах [8], [9], [16] показано, что проблема существования сильных неопровержимых дифференциальных (A, B)-архитектур тесно связана с геометрическим решением алгебраических ОЛД-расширений — задач, по существу подготовивших теоретический фундамент при проведении синтеза типов в классе линейных конечномерных непрерывных D-систем. Подобная математическая конструкция должна существовать и в структурах ОКД-совместимости, на что и указывает

Определение 6. Пусть $N_1, N_2 \subset \Pi_{ACL}$, $N_1 \neq N_2$ — ОКД-$U_{A,q}$-совместимые множества. Тогда ОКД-$U_{A,q}$-расширением пары (N_1, N_2) назовем множество $N_1 \cup N_2$, если оно ОКД-$U_{A,q}$-совместимо.

Ближайшая цель — обсудить вопрос энтропийного анализа структурной идентификации непрерывных D-систем, как унифицированного аналитического подхода, обеспечивающего "единство стиля" в исследованиях общей теории реализации D-систем с позиций выяснения их "ОКД-типа". Основа — структурные признаки ОКД-совместимости и ОКД-расширения.

3. Принцип максимума энтропии в апостериорном построении $(A, B, B^{\#})$-архитектур

Пусть $L(T, \mu, R)$ — пространство классов эквивалентности всех μ-измеримых на T вещественных функций и пусть $\leq_L$ — квазиупорядочение в $L(T, \mu, R)$ такое, что $\phi_1 \leq_L \phi_2$ для $\phi_1, \phi_2 \in L(T, \mu, R)$, когда $\phi_1(t) \leq \phi_2(t)$ поточечно μ-почти всюду в T. Наименьшую верхнюю грань для $W \subset L(T, \mu, R)$ будем обозначать $\sup_L W$, если она существует для частичного упорядочения $\leq_L$. Далее, для энтропийного анализа апостериорной информации о поведении непрерывных D-систем введем в рассмотрение оператор энтропии $\Psi : \Pi_{ACLL} \to L(T, \mu, R)$ вида

$$\Psi(x, u, v)(t) := \begin{cases} \frac{\|\frac{dx(t)}{dt}\|_{R^n}}{\|(x(t), u(t), v(t))\|_{R^{n+m+q}}}, & (x(t), u(t), v(t)) \neq 0 \in R^{n+m+q}; \\ 0, & (x(t), u(t), v(t)) = 0 \in R^{n+m+q}, \end{cases} \tag{3.1}$$

$\|\cdot\|_{R^n}$ и $\|\cdot\|_{R^{n+m+q}}$ — нормы в R^n и R^{n+m+q}. В данной системологической трактовке энтропия выражена значением функционального оператора Ψ, а не интегрального [1], [2], поскольку (3.1) дает расширительное (структурное) толкование ее семантики. Переход к L_p-норме, определяющей меру энтропии, не должен вызывать принципиальных трудностей. Наконец, в (3.1) a priori не предполагается, что $\{(x, u, v)\}$ — ОЛД-совместимое множество в Π_{ACLL}, но даже если это положение a posteriori нарушено, то и в этом случае справедливо

Утверждение. $\{t \in T : \frac{dx(t)}{dt} = 0\} \supset T_{xuv} := \{t \in T : (x(t), u(t), v(t)) = 0\} \pmod{\mu}$.

Доказательство. Надо показать, что для любой тройки $(x, u, v) \in \Pi_{ACLL}$ равенство $\frac{dx(t)}{dt} = 0$ выполнено μ-почти всюду в T_{xuv}.

Поскольку $\{t \in T : x(t) = 0\} =: T_x \supset T_{xuv}$, то в случае $\mu(T_x) = 0$ наше утверждение справедливо. Поэтому рассмотрим вариант $\mu(T_x) \neq 0$.

Обозначим через T_δ множество $\{t \in T_x : \exists\delta > 0,\ \mu((t-\delta, t+\delta) \cap T_x) = 0\}$. Покажем, что $\mu(T_\delta)$=0. Для этого выберем для каждого $t{\in}T_\delta$ константу δ^{*t} так, чтобы $\mu((t-\delta^{*t}, t+\delta^{*t}) \cap T_x)$=0. Найдем такие рациональные $\delta'^t, \delta''^t > 0$, что $\delta'^t \in (t-\delta^{*t}, t)$, $\delta''^t \in (t, t+\delta^{*t})$, и положим $I^t := (\delta'^t, \delta''^t)$. Тогда семейство $\{I^t\}_{t\in T\delta}$ покрывает T_δ и т.к. каждый интервал I^t является открытым интервалом с рациональными концами, то $\{I^t\}_{t\in T\delta}$ содержит счетное подсемейство $\{I^{ti}\}_{i=1,2,\dots}$, также являющееся покрытием T_δ. Далее, т.к. для любого $i = 1, 2, \dots$ выполняется $I^{ti} \subset (t_i - \delta^{*ti}, t_i + \delta^{*ti})$, то $\mu(I^{ti} \cap T_\delta) = 0$, а значит, $\mu(T_\delta) = \mu(T_\delta \cap (\cup\{I^{ti} : i = 1, 2, \dots\})) = \mu(\cup\{T_\delta \cap I^{ti} : i = 1, 2, \dots\}) \le \Sigma\mu(T_\delta \cap I^{ti}) = 0$, $i = 1, 2, \dots$, откуда будет $\mu(T_\delta) = 0$. Теперь проведем завершающую часть доказательства.

Пусть $t \in T_x \setminus T_\delta$, тогда, очевидно, для любого $\delta > 0$ имеем $\mu((t-\delta, t+\delta) \cap T_x) > 0$. Поскольку $x(\cdot) \in AC(T, R^n)$, то найдется $T^* \subset T$, $\mu(T^*) = 0$ и $\forall t \in T_x \setminus T^*$ существует $\frac{dx(t)}{dt}$. Покажем, что $\frac{dx(t)}{dt} = 0$ для $t \in T_x \setminus (T_\delta \cup T^*)$. Действительно, для любого целого k имеем $\mu((t - \frac{1}{k}, t + \frac{1}{k}) \cap T_x) > 0$ и, следовательно, найдется $t_k \neq t$, $|t_k - t| < 1/k$, $t_k \in T_x$. Но тогда $\frac{dx(t)}{dt} = \lim\{(x(t-\Delta t) - x(t))/\Delta t : \Delta t \to 0\} = \lim\{(x(t_k) - x(t))/(t_k - t) : k \to \infty\} = 0$. □

Утверждение показывает, что энтропийный оператор своей второй строкой в (3.1) "не стирает информацию" в точках множества $\{t \in T : (x(t), u(t), u^\#(x(t))) = 0\}$ о системе (2.1), в которой протекает процесс $t \to (x(t), u(t), u^\#(x(t))) : T \to R^{n+m+q}$. Структурный характер этой информации иллюстрирует

Пример 1. Для процесса $(x(t), u(t), u^\#(x(t))) = (ce^{at}, 0, 0)$ на $T = [0, \tau]$ L_1-норма его энтропии равна $\int\limits_T \Psi(x, u, u^\#(x))(t)\mu(dt) = |\ln x(\tau) - \ln x(0)| = \tau|a|$, т.е. $\tau^{-1}\int\limits_T \Psi(x, u, u^\#(x))(t)\mu(dt)$ — минимальная L_∞-норма для $(A, B, B^\#)$-модели уравнения $\frac{dx(t)}{dt} = ax(t) + bu(t) + b^\# u^\#(x(t))$, реализующего процесс $(ce^{at}, 0, 0)$.

Покажем, что конструкция (3.1) опирается на хорошо известное отношение Релея–Ритца ([15], с. 211). Пусть $(\Gamma, z) \to \mathrm{rel}(\Gamma, z) : L(R^{n+m+q}, R^{n+m+q}) \times R^{n+m+q} \to R$ — данное отношение, где Γ и z — матрица и вектор соответствующих размерностей. Тогда если $f := (x, u, u^\#(x))$ — вектор-функция из правой части (2.1) с $(A, B, B^\#)$-моделью $C(t) := [A(t), B(t), B^\#(t)]$ и Ψ взят с евклидовыми нормами $\|\cdot\|_{R^n}$ и $\|\cdot\|_{R^{n+m+q}}$, то в силу (2.1) имеем $\Psi(f)(t) = (\mathrm{rel}(\Gamma, f))^{1/2}(t)$, где $\Gamma(t) = [\mathrm{C}(t)]'[\mathrm{C}(t)]$, $[\cdot]'$ — операция транспонирования матрицы. В связи с последним замечанием оператор Ψ будем называть оператором Релея–Ритца.

Из (3.1) следует, что оператор Релея–Ритца удовлетворяет соотношениям

$$0 \le_L \Psi(\omega), \quad \omega \in \Pi_{ACLL}; \quad \Psi(\alpha\omega) = \Psi(\omega), \quad 0 \neq \alpha \in R. \tag{3.2}$$

Определение 7. Скажем, что оператор Релея–Ритца Ψ полуаддитивен на $E^+ \subset \Pi_{ACLL}$ с весом α (const), если $\Psi(\omega_1 + \omega_2) \le_L \alpha\Psi(\omega_1) + \alpha\Psi(\omega_2)$, $(\omega_1, \omega_2) \in E^+ \times E^+$.

Оказывается, что свойство полуаддитивности оператора Релея–Ритца инвариантно по отношению выбора векторных норм в конструкции (3.1).

Лемма 1. *Если Ψ^*, Ψ^{**} — операторы (3.1), отличающиеся своими нормами $\|\cdot\|_{R^n}$ и $\|\cdot\|_{R^{n+m+q}}$, и $E^+ \subset \Pi_{ACLL}$ — подмножество, на котором Ψ^* полуаддитивен с некоторым весом, то на E^+ с некоторым весом полуаддитивен и Ψ^{**}.*

Доказательство. Пусть $\|\cdot\|^*_{R^n}$, $\|\cdot\|^*_{R^{n+m+q}}$ — нормы из (3.1) для Ψ^*, а $\|\cdot\|^{**}_{R^n}$, $\|\cdot\|^{**}_{R^{n+m+q}}$ — нормы, отвечающие Ψ^{**}. Так как все нормы в конечномерном пространстве эквивалентны, то найдутся такие числа $\alpha_i, \beta_i > 0$ $(i = 1, 2)$, что $\alpha_1\|\cdot\|^{**}_{R^n} \le \|\cdot\|^*_{R^n} \le \alpha_2\|\cdot\|^{**}_{R^n}$ и $\beta_1\|\cdot\|^{**}_{R^{n+m+q}} \le \|\cdot\|^*_{R^{n+m+q}} \le \beta_2\|\cdot\|^{**}_{R^{n+m+q}}$. Предположим теперь, что на E^+ оператор Ψ^* полуаддитивен с весом α. Тогда в силу (3.1) имеем $\Psi^{**}(\omega_1 + \omega_2) \le_L \alpha_0\Psi^{**}(\omega_1) + \alpha_0\Psi^{**}(\omega_2)$, где $(\omega_1, \omega_2) \in E^+ \times E^+$, $\alpha_0 = \alpha\alpha_2\beta_2/\alpha_1\beta_1$.

Лемма 2. *$\{(x, u, v)\} \subset \Pi_{ACLL}$ обладает ОЛД-совместимостью тогда и только тогда, когда функция $t \to g(t) = \Psi(x, u, v)(t)$ принадлежит $L_p(T, \mu, R)$.*

Доказательство. Необходимость. Пусть $(A', B', B'^{\#})$ — некоторая $(A, B, B^{\#})$-модель, для которой пара скобок $(\dots) - ((x, u, v), (A', B', B'^{\#}))$ превращает уравнение (2.1) с $u^{\#} = v$ в тождество. Тогда в силу неравенства Гёльдера $g(t) \le c'(\|A'(t)\|^p_{L(R^n,R^n)} + \|B'(t)\|^p_{L(R^m,R^n)} + \|B'^{\#}(t)\|^p_{L(R^q,R^n)})^{1/p}$, где c' — константа, отвечающая неравенству $(\|\cdot\|^{p'}_{R^n} + \|\cdot\|^{p'}_{R^m} + \|\cdot\|^{p'}_{R^q})^{1/p'} \le c'\|\cdot\|_{R^{n+m+q}}$, которое справедливо, поскольку все нормы в R^{n+m+q} эквивалентны. Значит, $g(\cdot) \in L_p(T, \mu, R)$.

Достаточность. В силу утверждения и интегрального неравенства Гёльдера для μ-измеримого $S \subset T$ $\int\limits_S \|\frac{dx(t)}{dt}\|_{R^n}\mu(dt) \le c''\Big(\int\limits_S g^p(t)\mu(dt)\Big)^{1/p}\Big(\int\limits_S(\|x(t)\|^{p'}_{R^n} + \|u(t)\|^{p'}_{R^m} + \|v(t)\|^{p'}_{R^q})\mu(dt)\Big)^{1/p'}$, где c'' — константа из $\|\cdot\|_{R^{n+m+q}} \le c''(\|\cdot\|^{p'}_{R^n} + \|\cdot\|^{p'}_{R^m} + \|\cdot\|^{p'}_{R^q})^{1/p'}$. Отсюда ([6], теорема 2) $\{(x, u, v)\}$ — ОЛД-совместимое множество. $\square$

Пусть $U_{A,q}$ — структурный классификатор, $N \subset \Pi_{ACL}$, $SN_{u^{\#}} := \mathrm{Span}\{(x, u, u^{\#}(x)) : (x, u) \in N\}$, $u^{\#} \in U_{A,q}$, Ψ — оператор (3.1), $Q_{u^{\#}}$ — поглощающее множество в $SN_{u^{\#}}$, где в конструкции поглощающего множества следуем ([17], с. 42). В такой постановке основой структурной идентификации D-систем может служить

Теорема 2. а) *Принцип максимума энтропии: ОКД-$U_{A,q}$-совместимость структуры S_N в D-системе $\{(T, S_T), (R^{n+m}, S_{R^{n+m}}), (N, S_N)\}$ равносильна*

$$\exists u^{\#} \in U_{A,q} : \exists \varphi = \sup_L \Psi[Q_{u^{\#}}] \in L_p(T, \mu, R).$$

б) *Если $\mathrm{Card}\, N \ne \infty$, существует $u^{\#} \in U_{A,q}$, для которого $\Psi[Q_{u^{\#}}] \subset L_p(T, \mu, R)$, и оператор Ψ полуаддитивен с некоторым весом на $SN_{u^{\#}}$, то множество N является ОКД-$U_{A,q}$-совместимым.*

Замечание 2. На практике классификатор $U_{A,q}$, для которого $\exists u^{\#} \in U_{A,q} : (x, u) \in N \Rightarrow (x, u, u^{\#}(x)) \in \Pi_{ACLL} \& N$ ОКД-$U_{A,q}$-совместимо, можно проектировать логическим поиском [18] с широким привлечением символьных вычислений.

Доказательство. Принцип максимума энтропии предопределяется комбинированием (в рамках [9], определение 1; [6], теорема 1, лемма 2, теорема 2, и [19], с. 68, теорема 17, п. а)), поэтому в теореме 2 обоснуем только п. б).

Пусть $\{(x_i, u_i, v_i) : i = 1, \dots, k\}$ — алгебраический базис в $SN_{u^{\#}}$ и пусть $\Psi(x_i, u_i, v_i) = \varphi_i$, где $\varphi_i \in L_p(T, \mu, R)$, $i = 1, \dots, k$. Если $(x, u, v) \in SN_{u^{\#}}$, то $(x, u, v) = \Sigma\beta_i(x_i, u_i, v_i)$, $i = 1, \dots, k$, $\beta_i \in R$, и, значит, на основании (3.2) имеет место цепочка отношений

$$\Psi(x, u, v) = \Psi(\Sigma\beta_i(x_i, u_i, v_i)) \le_L \Sigma\alpha^{i-1}\Psi(\beta_i(x_i, u_i, v_i)) = \Sigma\alpha^{i-1}\Psi(x_i, u_i, v_i) = \Sigma\alpha^{i-1}\varphi_i, \quad i = 1, \dots, k,$$

где α — вес, с которым Ψ полуаддитивен на $SN_{u^{\#}}$. Далее, т. к. (x, u, v) по своему выбору из $SN_{u^{\#}}$ предполагалась произвольной и сумма $\sum\limits_{1 \le i \le k} \alpha^{i-1}\varphi_i$, $i = 1, \dots, k$, как функция класса $L_p(T, \mu, R)$, то $\sup_L \Psi[SN_{u^{\#}}] \le_L \Sigma\alpha^{i-1}\varphi_i$, $i = 1, \dots, k$, что подтверждает п. б). $\square$

Пункт б) теоремы 17 из ([19], с. 68) показывает, что, если для $N \subset \Pi_{ACL}$ выполнен принцип максимума энтропии, то существует счетное множество $Q^* \subset Q_{u^{\#}}$ такое, что теоретико-множественная модель функции $\varphi = \sup_L \Psi[Q_{u^{\#}}]$ может быть представлена как $t \to \varphi(t) = \sup\{\Psi(\omega)(t) : \omega \in Q^*\}$, где sup соответствует естественному упорядочению в R, а $Q_{u^{\#}}$, Ψ и φ — конструкции п. а) теоремы 2. Заметим, что, если $1 < \mathrm{Card}\, N < \infty$, то $\mathrm{Card}\, Q_{u^{\#}}$ — мощность континуума.

Пример 2. Пусть $T = [0, 1]$, $n = m = q = 1$, $p = p' = 2$, $N = \{(x, u) : x(t) = t^2,\ u(t) = 0\}$, и Ψ — оператор Релея–Ритца с евклидовыми нормами. В [6] показано, что N не обладает структурой ОКД-$\{u^{\#} \equiv 0\}$-совместимости. Поэтому рассмотрим структурный классификатор $U_{1,1} = \{x^{1/2}\}$. В силу (3.2) в качестве множества $Q_{u^{\#}}$ выберем $\{(x, u, x^{1/2}), -(x, u, x^{1/2}), (0, 0, 0)\}$.

Тогда $\sup_L \Psi[Q_{u^\#}] = 2(t^2+1)^{-1/2} \in L_2(T,\mu,R)$, что устанавливает для N структуру ОКД-$U_{1,1}$-совместимости. Пример проясняет главное требование к организации структурной идентификации. Оно заключается в том, что в варианте $\operatorname{Card} N = 1$ процедуру вычисления $\sup_L \Psi[Q_{u^\#}]$ и проверку "гипотезы" $\sup_L \Psi[Q_{u^\#}] \in L_2(T,\mu,R)$ необходимо автоматизировать специализированными средствами символьного вывода, а при $1 \neq \operatorname{Card} N \neq \infty$ их необходимо по возможности дополнять логическим выводом [18], осуществляющим автоматическое доказательство по индукции п. б) теоремы 2.

Теорема 2 — более емкая в сравнении с теоремами 2 из [6] и 1 из [7] характеризация неопровержимой $(A,B,B^\#)$-модели, совместимой с a posteriori предъявленной D-системой. И она позволяет также чрезвычайно компактно, например, в сравнении с теоремой 3 из [9], формулировать условия ОКД-расширения.

Теорема 3. *Пусть $N_1, N_2 \subset \Pi_{ACL}$, $N_1 \neq N_2$ — ОКД-$U_{A,q}$-совместимые множества с $u^\# \in U_{A,q}$, и пусть $SN_{1,u^\#} := \operatorname{Span}\{(x,u,u^\#(x)) : (x,u) \in N_1\}$, $SN_{2,u^\#} := \operatorname{Span}\{(x,u,u^\#(x)) : (x,u) \in N_2\}$. Тогда $N_1 \cup N_2$ есть ОКД-$U_{A,q}$-расширение пары (N_1,N_2), если оператор Релея–Ритца полуаддитивен на $SN_{1,u^\#} + SN_{2,u^\#}$ с некоторым весом.*

Доказательство. Так как $SN_{1,u^\#}$ и $SN_{2,u^\#}$ — поглощающие множества в себе, то в силу п. а) теоремы 2 существуют функции $\varphi_1, \varphi_2 \in L_p(T,\mu,R)$, для которых $\sup_L \Psi[SN_{1,u^\#}] \leq_L \varphi_1$ и $\sup_L \Psi[SN_{2,u^\#}] \leq_L \varphi_2$, где Ψ — оператор Релея–Ритца (3.1). Далее, выберем в качестве поглощающего множества в линейном многообразии $SN_{1,u^\#} + SN_{2,u^\#}$ само это линейное многообразие. В силу полуаддитивности (с весом α) оператора Ψ на $SN_{1,u^\#} + SN_{2,u^\#}$ справедливо $\sup_L \Psi[SN_{1,u^\#} + SN_{2,u^\#}] \leq_L \alpha \sup_L \Psi[SN_{1,u^\#}] + \alpha \sup_L \Psi[SN_{2,u^\#}] \leq_L \alpha(\varphi_1 + \varphi_2)$. Отсюда $N_1 \cup N_2$ есть ОКД-$U_{A,q}$-совместимое множество в соответствии с п. а) теоремы 2. $\square$

Даже располагая теоремой 3, пока затруднительно ответить на вопрос: существуют ли подмножества в Π_{ACLL}, на которых оператор Релея–Ритца полуаддитивен с некоторым фиксированным весом. (Конечно, не принимаются в расчет одноэлементные подмножества из Π_{ACLL} и вес $\geq 0{,}5$.) Это затруднение преодолевается посредством теоремы 4, которой предпошлем лемму, прозрачную по доказательству.

Лемма 3. *Полуаддитивность с весом оператора Релея–Ритца есть свойство конечного характера в $\{(x,u,u^\#(x)) : (x,u) \in N\}$, $N \subset \Pi_{ACL}$, $u^\# \in U_{A,q}$.*

Лемма 3 и лемма Тейхмюллера–Тьюки ([14], с. 28) приводят к следующей геометрической характеристике полуаддитивности энтропийного оператора.

Теорема 4. *Пусть $E^+ \neq \{0\}$ — линейное множество в Π_{ACLL}, Ψ — оператор Релея–Ритца и $\alpha \in [1,\infty)$. Тогда существует максимальное относительно теоретико-множественного включения множество E_α в E^+, на котором Ψ полуаддитивен с весом α, при этом E_α — ненулевое линейное множество. Если E^+ есть ОЛД-совместимое множество, замкнутое в $H_{(L_{p'})^3}$, то таковым будет и E_α.*

Замечание 3. В E^+ существует максимальное множество, на котором Ψ полуаддитивен с весом $\alpha \in [0,1)$. Но тогда оно не может быть линейным, за исключением варианта $E_\alpha = \{0\}$. Поэтому предполагается $\alpha \in [1,\infty)$.

Доказательство. Вначале покажем, что в E^+ существует максимальное множество E_α, на котором оператор Ψ полуаддитивен с весом α и при этом E_α — линейное множество. Пусть (x_1,u_1,v_1) — ненулевой элемент в E^+. Тогда в силу соотношений (3.2) оператор Ψ полуаддитивен с весом $\alpha \in [1,\infty)$ на линейной (одномерной) оболочке E_1 над (x_1,u_1,v_1). Далее, допустим, что пара $(x_2,u_2,v_2) \in E^+$ такова, что $(x_2,u_2,v_2) \notin E_1$, и пусть оператор Ψ полуаддитивен на $E_1 \cup \{(x_2,u_2,v_2)\}$ с весом α. Выберем в $E_1 + E_2$, где E_2 — линейная оболочка над (x_2,u_2,v_2), некоторый элемент $(\beta_1 x_1 + \beta_2 x_2, \beta_1 u_1 + \beta_2 u_2, \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2)$, $\beta_2 \neq 0$. В соответствии с (3.2) имеем

$$\begin{aligned}\Psi(\beta_1 x_1 + \beta_2 x_2, \beta_1 u_1 + \beta_2 u_2, \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2) = \Psi(\beta_1\beta_2^{-1} x_1 + x_2, \beta_1\beta_2^{-1} u_1 + u_2, \beta_1\beta_2^{-1} v_1 + v_2) \leq_L \\ \leq_L \alpha\Psi(\beta_1\beta_2^{-1}x_1, \beta_1\beta_2^{-1}u_1, \beta_1\beta_2^{-1}v_1) + \alpha\Psi(x_2, u_2, v_2) = \\ = \alpha\Psi(\beta_1 x_1, \beta_1 u_1, \beta_1 v_1) + \alpha\Psi(\beta_2 x_2, \beta_2 u_2, \beta_2 v_2),\end{aligned}$$

откуда заключаем, что Ψ полуаддитивен на $E_1 + E_2$ с весом α. Рассуждая аналогично, можно показать, что в предыдущих выкладках E_1 можно заменить на любое линейное множество из E^+, на котором Ψ полуаддитивен с весом α.

Пусть P — семейство всех пар $(E^\#, \Psi^\#)$, где $E^\#$ — линейное множество в E^+, $\Psi^\#$ — оператор Релея–Ритца, причем $\Psi^\#$ полуаддитивен на $E^\#$ с весом α. Введем в P упорядочение $\ll$, считая, что $(E^\#, \Psi^\#) \ll (E^{\#\#}, \Psi^{\#\#})$, если $(E^\# \subset E^{\#\#}$, $\Psi^\# = \Psi^{\#\#})$. По теореме Хаусдорфа в P существует максимальное линейно упорядоченное множество Ω, содержащее (E_1, Ψ). Пусть Φ — множество всех таких линейных множеств E^α в E^+, что $(E^\alpha, \Psi) \in \Omega$. Тогда Φ линейно упорядочено относительно теоретико-множественного включения. Объединение E_α всех множеств, принадлежащих Φ, является линейным многообразием в E^+. Если $(\omega_1, \omega_2) \in E_\alpha \times E_\alpha$, то $(\omega_1, \omega_2) \in E^\# \times E^\#$ для некоторого $E^\# \in \Phi$, откуда $\Psi(\omega_1 + \omega_2) \leq_L \alpha\Psi(\omega_1) + \alpha\Psi(\omega_2)$. Значит, $(E_\alpha, \Phi) \in \Omega$. Если бы E_α не оказалось максимальным множеством в E^+, на котором Ψ полуаддитивен с весом α, то конструкция, указанная выше, позволила бы продолжить Ψ на большее линейное множество с сохранением всех нужных свойств, а это противоречило бы максимальности Ω в P.

Теперь покажем, что E_α замкнуто в $H_{(L_{p'})^3}$, если E^+ — ОЛД-совместимое множество, замкнутое в $H_{(L_{p'})^3}$. Предположив обратное, выберем в замыкании E_α точку $(x_\#, u_\#, v_\#)$, не принадлежащую E_α, $(x_\#, u_\#, v_\#) \in E^+$ в силу замкнутости E^+ в $H_{(L_{p'})^3}$. Если покажем, что на $E_\alpha \cup \{(x_\#, u_\#, v_\#)\}$ оператор Ψ полуаддитивен с весом α, то, как было установлено выше, $(E_\alpha + E^\#, \Psi) \in P$, где $E^\#$ — линейная оболочка над $(x_\#, u_\#, v_\#)$, при этом $(E_\alpha + E^\#, \Psi) \notin \Omega$, что не соответствует максимальности Ω.

Итак, пусть $\{(x_i, u_i, v_i)\}^\#$ — последовательность в E_α, сходящаяся в метрике пространства $H_{(L_{p'})^3}$ к вектор-функции $(x_\#(\cdot), u_\#(\cdot), v_\#(\cdot))$ и пусть $\{(x_i, u_i, v_i)\}$ — ее подпоследовательность, сходящаяся к $(x_\#(\cdot), u_\#(\cdot), v_\#(\cdot))$ поточечно μ-почти всюду в T. Введем отображение $G : E_\alpha \to L_1(T, \mu, R^n)$ вида

$$(x, u, v) \to G(x, u, v) := A(\cdot)x(\cdot) + B(\cdot)u(\cdot) + B^*(\cdot)v(\cdot), \tag{3.3}$$

где $(A(\cdot), B(\cdot), B^*(\cdot))$ — некоторая фиксированная (A, B, B^*)-модель системы (2.1), реализующей множество E^+ в структуре ОЛД-совместимости. Так как

$$G(x, u, v) = \frac{dx}{dt}, \tag{3.4}$$

то в силу (3.3) оператор G непрерывен относительно топологии индуцированной в E_α из $H_{(L_{p'})^3}$, и топологии порожденной в $L_1(T, \mu, R^n)$ нормой $\int\limits_T \|f(t)\|_{R^n}\mu(dt)$, $f \in L_1(T, \mu, R^n)$. Отсюда на основании равенства (3.4) заключаем, что последовательность $\{\frac{dx_i}{dt}\}^\#$ сходится в метрике пространства $L_1(T, \mu, R^n)$ к $\frac{dx_\#}{dt}$ и, следовательно, существует ее подпоследовательность $\{\frac{dx_i}{dt}\}$, сходящаяся к $\frac{dx_\#}{dt}$ поточечно μ-почти всюду в T. Таким образом, согласно (3.1) приходим к выводу, что в $\{(x_i, u_i, v_i)\}$ существует подпоследовательность $\{(x_j, u_j, v_j)\}$, для которой $\{\Psi(x_j, u_j, v_j)\}$ сходится поточечно μ-почти всюду в T к $\Psi(x_\#, u_\#, v_\#)$.

Пусть (x_+, u_+, v_+) — некоторая точка из E_α. Тогда поскольку $\{(x_j, u_j, v_j)\} \subset E_\alpha$, то можно утверждать, что μ-почти всюду в T имеет место транзитивность

$$\begin{aligned}\Psi(x_+ + x_\#, u_+ + u_\#, v_+ + v_\#)(t) = \lim\{\Psi(x_+ + x_j, u_+ + u_j, v_+ + v_j)(t) : j \to \infty\} \leq \\ \leq \lim\{(\alpha\Psi(x_+, u_+, v_+)(t) + \alpha\Psi(x_j, u_j, v_j)(t)) : j \to \infty\} = \\ = \alpha\Psi(x_+, u_+, v_+)(t) + \alpha\lim\{\Psi(x_j, u_j, v_j)(t) : j \to \infty\} = \alpha\Psi(x_+, u_+, v_+)(t) + \alpha\Psi(x_\#, u_\#, v_\#)(t).\end{aligned}$$

Так как вектор-функция (x_+, u_+, v_+) была выбрана в E_α произвольным образом, то из последней цепочки отношений следует, что оператор Релея–Ритца Ψ полуаддитивен на расширенном множестве $E_\alpha \cup \{(x_\#, u_\#, v_\#)\}$ с весом α.

Литература

1. Панченков А.Н. *Энтропия.* – Ниж. Новгород: Интелсервис, 1999. – 589 с.
2. Панченков А.Н. *Энтропия*-2. – Ниж. Новгород: Интелсервис, 2002. – 712 с.
3. Льюнг Л. *Идентификация систем. Теория для пользователя.* – М.: Наука, 1991. – 432 с.
4. Калман Р., Фалб П., Арбиб М. *Очерки по математической теории систем.* – М.: Мир, 1971. – 400 с.
5. Месарович М., Такахара Я. *Общая теория систем: математические основы.* – М.: Мир, 1978. – 312 с.
6. Данеев А.В., Русанов В.А. *Об одной теореме существования сильной модели* // Автоматика и телемеханика. – 1995. – № 8. – С. 64–73.
7. Данеев А.В., Русанов В.А. *Геометрические характеристики свойств существования конечномерных (A, B)-моделей в задачах структурно-параметрической идентификации* // Автоматика и телемеханика. – 1999. – № 1. – С. 3–8.
8. Данеев А.В., Русанов В.А. *Порядковые характеристики свойств существования сильных линейных конечномерных дифференциальных моделей* // Дифференц. уравнения. – 1999. – Т. 35. – № 1. – С. 43–50.
9. Данеев А.В., Русанов В.А. *Об одном классе сильных дифференциальных моделей над счетным множеством динамических процессов конечного характера* // Изв. вузов. Математика. – 2000. – № 2. – С. 32–40.
10. Матросов В.М., Анапольский Л.Ю., Васильев С.Н. *Метод сравнения в математической теории систем.* – Новосибирск: Наука, 1980. – 481 с.
11. Данеев А.В., Русанов В.А. *К аксиоматической теории идентификации динамических систем.* I. *Основные структуры* // Автоматика и телемеханика. – 1994. – № 8. – С. 126–136.
12. Виллемс Я. *От временного ряда к линейной системе* // Теория систем. Математические методы и моделирование / Под ред. А.Н. Колмогорова, С.П. Новикова. – М.: Мир, 1989. – С. 8–191.
13. Бурбаки Н. *Теория множеств.* – М.: Мир, 1965. – 455 с.
14. Энгелькинг Р. *Общая топология.* – М.: Наука, 1986. – 752 с.
15. Данеев А.В., Лакеев А.В., Русанов В.А., Русанов М.В. *К теории реализации сильных дифференциальных моделей.* I // Сиб. журн. индустриальной матем. – 2005. – № 1. – С. 53–63.
16. Хорн Р., Джонсон Ч. *Матричный анализ.* – М.: Мир, 1989. – 656 с.
17. Иосида К. *Функциональный анализ.* – М.: Мир, 1967. – 624 с.
18. Васильев С.Н., Жерлов А.К., Федосов Е.А., Федунов Б.Е. *Интеллектное управление динамическими системами.* – М.: Физматлит, 2000. – 352 с.
19. Канторович Л.В., Акилов Г.П. *Функциональный анализ.* – М.: Наука, 1977. – 442 с.

Иркутский государственный технический университет
Институт динамики систем и теории управления Сибирского отделения Российской академии наук

Поступили
первый вариант 10.06.2003
окончательный вариант 28.06.2005