ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2006 МАТЕМАТИКА № 6 (529)

УДК 514.752

О.В. ВАСИЛЬЕВА

НЕГОЛОНОМНЫЕ ПОВЕРХНОСТИ ДВОЙНОГО ВРАЩЕНИЯ В ЧЕТЫРЕХМЕРНОМ ЕВКЛИДОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Цель данной работы — исследование геометрии интегральных кривых одного не вполне интегрируемого уравнения Пфаффа, заданного в некоторой области G четырехмерного евклидова пространства. При этом используется метод внешних форм Картана, изложению которого посвящена монография [1].

Задание на $\mathbb{E}_4$ уравнения Пфаффа

$$P_\alpha dx^\alpha = 0 \quad (\alpha = \overline{1,4}), \tag{1}$$

где $P_\alpha(x^\beta)$ $(\beta = \overline{1,4})$ — гладкие функции в какой-то точке $M \in \mathbb{E}_4$, определяет на $\mathbb{E}_4$ гладкое распределение гиперплоскостных элементов (M, π) ([2], с. 29; [3], с. 13; [4], с. 19), где $M \in \mathbb{E}_4$, π — трехмерная плоскость, которой касаются все интегральные кривые уравнения (1), проходящие через точку M. Если уравнение (1) вполне интегрируемо, то возникает слоение ([5], с. 683), т. е. через каждую точку $M \in \mathbb{E}_4$ проходит трехмерная интегральная поверхность уравнения (1), для которой плоскость π является касательной плоскостью в точке M. В этом случае распределение называется интегрируемым или голономным. Если же (1) не является вполне интегрируемым, то распределение называется неголономным ([3], с. 13). Всякую интегральную кривую уравнения (1) называют кривой распределения, а совокупность всех интегральных кривых неголономного распределения называют неголономной поверхностью ([6], с. 98). Кривые неголономного распределения (или неголономной поверхности), проходящие через точку M, не образуют гиперповерхности, но все касаются плоскости π. Поэтому плоскость π называется касательной гиперплоскостью неголономной поверхности в точке M, а прямая, проходящая через M ортогонально плоскости π, — нормалью неголономной поверхности в этой точке.

Подобно тому, как в четырехмерном евклидовом пространстве различают два вида поверхностей вращения (сферические поверхности вращения и поверхности двойного вращения) ([7], с. 22), в неголономной геометрии также различаем два вида неголономных поверхностей вращения.

Определение 1. *Сферической неголономной поверхностью вращения* (*с. н. п. в.*) называется такая неголономная поверхность, все нормали которой пересекают неподвижную прямую (ось вращения).

Определение 2. *Неголономной поверхностью двойного вращения* (*н. п. д. в.*) называется такая неголономная поверхность, нормали которой пересекают две неподвижные взаимно перпендикулярные двумерные плоскости (оси вращения), пересекающиеся в одной точке. Точку пересечения осей вращения назовем центром вращения.

Эти названия даны в связи с тем, что в случае голономности распределения интегральными гиперповерхностями уравнения (1) будут соответственно трехмерные сферические поверхности вращения или поверхности двойного вращения ([7], с. 22).

В данной работе изучается геометрия неголономных поверхностей двойного вращения.

1. Главные кривизны 2-го рода неголономной поверхности двойного вращения

Пусть (M,π) — гиперплоскостной элемент распределения. Выберем ортонормированный подвижной репер $\{M,\vec{e}_\alpha\}$ $(\alpha=\overline{1,4})$ следующим образом: векторы $\{\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\}$ поместим в касательную гиперплоскость π, а вектор $\vec{e}_4$ направим по нормали к π в точке M.

Деривационные формулы репера $\{M,\vec{e}_\alpha\}$ $(\alpha=\overline{1,4})$ имеют вид

$$d\vec{r}=\omega^\alpha\vec{e}_\alpha,\quad d\vec{e}_\alpha=\omega_\alpha^\beta\vec{e}_\beta, \tag{1.1}$$

где $\vec{r}$ — радиус-вектор точки M, $\omega_\alpha^\beta=-\omega_\beta^\alpha$ $(\alpha,\beta=\overline{1,4})$. Помимо этого имеем

$$D\omega^\alpha=\omega^\beta\wedge\omega_\beta^\alpha,\quad D\omega_\alpha^\beta=\omega_\alpha^\gamma\wedge\omega_\gamma^\beta\quad(\alpha,\beta,\gamma=\overline{1,4}).$$

Главными формами являются формы Пфаффа ω^α, ω_4^α. Из них ω^α — базисные формы, а потому

$$\omega_4^\alpha=A_\beta^\alpha\omega^\beta\quad(\alpha,\beta=\overline{1,4}). \tag{1.2}$$

Кривые распределения при данном выборе подвижного репера состоят из интегральных кривых уравнения Пфаффа

$$\omega^4=0. \tag{1.3}$$

По терминологии Г.Ф. Лаптева уравнение (1.3) является ассоциированным с данным распределением, а A_β^α образуют фундаментальный объект.

Так как $\omega_4^4=0$, то матрица фундаментального объекта имеет вид

$$\begin{pmatrix} A_1^1 & A_2^1 & A_3^1 & A_4^1\\ A_1^2 & A_2^2 & A_2^2 & A_4^2\\ A_1^3 & A_2^3 & A_3^3 & A_4^4\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

С другой стороны, используя формулы (1.1) и (1.2), легко убедимся, что эта матрица является матрицей линейного оператора A, определяемого формулой

$$A(d\vec{r})=d\vec{e}_4,$$

где $d\vec{r}$ — касательный вектор к любой кривой, проходящей через точку M. Однако векторы плоскости π он переводит в векторы этой же плоскости. Таким образом, можно сузить оператор A на плоскость π. Матрица оператора A^*, являющегося сужением оператора A, имеет вид

$$\mathbf{A}^*_{(e)}=\begin{pmatrix} A_1^1 & A_2^1 & A_3^1\\ A_1^2 & A_2^2 & A_2^2\\ A_1^3 & A_2^3 & A_3^3\end{pmatrix}.$$

Собственные значения оператора A^*, взятые с противоположным знаком, называются главными кривизнами 2-го рода неголономной поверхности, а направления собственных векторов оператора A, соответствующие им, — главными направлениями 2-го рода в точке M. Линией кривизны 2-го рода называется линия неголономной поверхности, в каждой точке которой касательный вектор идет по одному из главных направлений 2-го рода.

Полной кривизной 2-го рода называется величина $K_2=\det A^*$. Для н. п. д. в. $K_2=-k_1k_2k_3$.

Направим вектор $\vec{e}_1$ по главному направлению 2-го рода. Тогда $A_1^1=-k_1$, $A_1^2=A_1^3=0$. Действительно, собственные значения λ_i оператора A^* являются корнями уравнения

$$\begin{vmatrix} A_1^1-\lambda & A_2^1 & A_3^1\\ A_1^2 & A_2^2-\lambda & A_3^2\\ A_1^3 & A_2^3 & A_3^3-\lambda\end{vmatrix}=0, \tag{1.4}$$

а собственные векторы $\vec{\xi}(\xi^i)$, соответствующие им, определяются уравнениями

$$\begin{aligned}
&(A^1_1-\lambda)\xi^1+A^1_2\xi^2+A^1_3\xi^3=0,\\
&A^2_1\xi^1+(A^2_2-\lambda)\xi^2+A^2_3\xi^3=0,\\
&A^3_1\xi^1+A^3_2\xi^2+(A^3_3-\lambda)\xi^3=0.
\end{aligned}\tag{1.5}$$

Так как (1.4) — уравнение 3-ей степени, то по крайней мере одно из λ_i — действительное число и ему соответствует действительный собственный вектор. Примем этот вектор за $\vec{e}_1(1,0,0)$. Тогда из (1.5) имеем $\lambda_1=A^1_1$, $A^2_1=A^3_1=0$. Следовательно, одна из главных кривизн 2-го рода $k_1=-A^1_1$. В силу инвариантности вектора $\vec{e}_1$ формы ω^2_1, ω^3_1 стали главными. Неглавной остается только форма ω^3_2. Продолжая систему (1.2), получим

$$dA^\alpha_\gamma=A^\alpha_\beta\omega^\beta_\gamma-A^\beta_\gamma\omega^\alpha_\beta+A^\alpha_{\gamma\mu}\omega^\mu.$$

Отсюда

$$dA^3_2=A^3_2=A^3_3\omega^3_2-A^1_2\omega^3_1-A^2_2\omega^3_2+A_{2\mu}\omega^\mu.\tag{1.6}$$

Из (1.6) видим, что при $A^3_2=0$, $A^2_2\neq A^3_3$ форма ω^3_2 становится главной, а репер — каноническим.

Для н. п. д. в. все три кривизны 2-го рода вещественны и различны.

Действительно, при данном выборе репера характеристическое уравнение имеет вид

$$\begin{vmatrix}A^1_1-\lambda & A^1_2 & A^1_3\\ 0 & A^2_2-\lambda & A^2_3\\ 0 & 0 & A^3_3-\lambda\end{vmatrix}=0.\tag{1.7}$$

Следовательно, главные кривизны 2-го рода $k_i=-\lambda_i=-A^i_i$ $(i=\overline{1,3})$ являются вещественными числами в точке M.

Так как репер $\{M,\vec{e}_\alpha\}$ $(\alpha=\overline{1,4})$ канонический, то все функции в формулах (1.2) инварианты. Величины A^1_4, A^2_4, A^3_4 — координаты вектора кривизны линии тока векторного поля $\vec{e}_4$ (поля нормалей). Тензор неголономности в данном случае имеет только три существенные компоненты:

$$\vec{\rho}=\rho^1\vec{e}_1+\rho^2\vec{e}_2+\rho^3\vec{e}_3,$$

т. е. является вектором неголономности. Обращение в нуль вектора $\vec{\rho}$ характеризует голономность $\omega^4=0$. Для него $\rho^1=A^2_3/2$, $\rho^2=-A^1_3/2$, $\rho^3=A^1_2/2$. Обозначим $A^1_4=a$, $A^2_4=b$, $A^3_4=c$. Тогда формулы (1.2) и уравнение (1.7) примут соответственно вид

$$\begin{aligned}
&\omega^1_4=-k_1\omega^1+2\rho^3\omega^2-2\rho^2\omega^3+a\omega^4,\\
&\omega^2_4=-k_2\omega^2+2\rho^1\omega^3+b\omega^4,\\
&\omega^3_3=-k_3\omega^3+c\omega^4
\end{aligned}$$

и

$$\begin{vmatrix}-k_1-\lambda & 2\rho^3 & 2\rho^2\\ 0 & -k_2-\lambda & 2\rho^1\\ 0 & 0 & -k_3-\lambda\end{vmatrix}=0.$$

Переходим к нахождению линий кривизны 2-го рода. Известно ([4], с. 62), что вдоль всякой линии кривизны 2-го рода нормали неголономной поверхности описывают торс, точка ребра возврата которого на образующей обратна главной кривизне 2-го рода. Так как для н. п. д. в. в каждой точке имеем три действительные, не совпадающие кривизны 2-го рода, то им соответствуют на нормали, проходящей через всякую точку $M\in G$, три не совпадающих точки F_1, F_2, F_3 ребер возврата торсов с радиус-векторами

$$\vec{F}_1=\vec{r}+\frac{1}{k_1}\vec{e}_4,\quad \vec{F}_2=\vec{r}+\frac{1}{k_2}\vec{e}_4,\quad \vec{F}_3=\vec{r}+\frac{1}{k_3}\vec{e}_4.$$

Главными направлениями, соответствующими главным кривизнам k_1, k_2, k_3, будут направления векторов

$$\vec{e}_1, \quad 2\rho^3\vec{e}_1 + (k_1 - k_2)\vec{e}_2, \quad (4\rho^1\rho^3 + 2\rho^2(k_3 - k_1))\vec{e}_1 - 2\rho^1(k_3 - k_1)\vec{e}_2 + (k_3 - k_1)^2\vec{e}_3.$$

А линии кривизны 2-го рода — это линии, определяемые уравнениями

$$\omega^2 = \omega^3 = \omega^4 = 0, \tag{1.8}$$

$$\begin{aligned} (k_2 - k_1)\omega^1 + 2\rho^3\omega^2 &= 0, \\ \omega^3 &= 0, \\ \omega^4 &= 0, \end{aligned} \tag{1.9}$$

$$\begin{aligned} (k_3 - k_1)\omega^1 + 2\rho^3\omega^2 - 2\rho^2\omega^3 &= 0, \\ (k_3 - k_2)\omega^2 + 2\rho^1\omega^3 &= 0, \\ \omega^4 &= 0. \end{aligned} \tag{1.10}$$

Для поверхности двойного вращения вдоль двух линий кривизны нормали описывают конус ([3], с. 23). Требуем выполнение этого свойства и для н. п. д. в.

Пусть $\vec{F}_3 = \mathrm{const}$ вдоль линии кривизны (1.10), которая соответствует кривизне k_3. Тогда

$$dk_3 = \alpha_1[(k_3 - k_1)\omega^1 + 2\rho^3\omega^2 - 2\rho\omega^3] + \alpha_2[(k_3 - k_2)\omega^2 + 2\rho^1\omega^3] + \alpha_3\omega^4. \tag{1.11}$$

Пусть также $\vec{F}_2 = \mathrm{const}$ вдоль линии кривизны (1.9), которая соответствует кривизне k_2. Тогда

$$dk_2 = \beta_1[(k_2 - k_1)\omega^1 + 2\rho^3\omega^2] + \beta_2\omega^3 + \beta_3\omega^4.$$

Неголономная поверхность $\omega^4 = 0$ будет неголономной поверхностью двойного вращения лишь тогда, когда точки F_3 и F_2 будут описывать две неподвижные двумерные взаимно перпендикулярные плоскости P_3 и P_2, пересекающиеся в одной точке. Чтобы получить данные условия, находим прежде всего плоскость, проходящую через точку F_3 и касательные к линиям, описываемым точкой F_3 вдоль линий кривизны (1.8) и (1.9). Уравнения искомой плоскости имеют вид

$$\begin{aligned} \alpha_1 x^1 + \alpha_2 x^2 + k_3 x^4 &= 1, \\ x^3 &= 0. \end{aligned} \tag{1.12}$$

Аналогично плоскость, проходящая через F_2 и касательные к линиям, описываемым точкой F_2 вдоль линий кривизны (1.8) и (1.9), определяется уравнениями

$$\begin{aligned} (k_2 - k_3)x^2 - 2\rho^1 x^3 &= 0, \\ \beta_1 x^1 + (2\rho^2\beta_1 + \beta_2)x^2 + k_2 x^4 &= 1. \end{aligned} \tag{1.13}$$

Плоскости (1.12), (1.13) ортогональны и пересекаются в одной точке лишь при выполнении условий

$$\rho^1 = \alpha_2 = 0, \quad \alpha_1\beta_1 + k_2k_3 = 0, \quad \beta_2 + 2\rho^2\beta_1 = 0, \quad \alpha_1k_2 - \beta_1k_3 \neq 0.$$

Тогда уравнения (1.12), (1.13) принимают вид

$$\alpha_1 x^1 + k_3 x^4 = 1, \quad x^3 = 0 \tag{1.14}$$

и

$$\beta_1 x^1 + k_2 x^4 = 1, \quad x^2 = 0. \tag{1.15}$$

Требование неподвижности плоскостей (1.14) и (1.15) приводит к равенствам

$$\begin{aligned}
&b=0,\quad c=0,\quad \alpha_3=(k_3)^2+a\alpha_1,\quad \beta_3=(k_2)^2+a\beta_1,\\
&\omega_1^3=-\alpha_1\omega^3,\quad \omega_2^3=0,\quad \omega_1^2=-\beta_1\omega^2,\quad \beta_2=-2\beta_1\rho^2,\\
&d\alpha_1=((\alpha_1)^2+k_1k_3)\omega^1-2\rho^3k_3\omega^2+2\rho^2k_3\omega^3+k_3(\alpha_1-a)\omega^4,\\
&d\beta_1=((\beta_1)^2+k_1k_2)\omega^1-2\rho^3k_2\omega^2+2\rho^2k_2\omega^3+k_2(\beta_1-a)\omega^4,
\end{aligned}\tag{1.16}$$

в силу которых формы Пфаффа, входящие в деривационные формулы репера, выразятся через базисные формы следующим образом:

$$\begin{gathered}
\omega_4^1=-k_1\omega^1+2\rho^3\omega^2-2\rho^2\omega^3+a\omega^4,\\
\omega_4^2=-k_2\omega^2,\quad \omega_4^3=-k_3\omega^3,\quad \omega_2^3=0,\quad \omega_2^1=\beta_1\omega^2,
\end{gathered}\tag{1.17}$$

где

$$\begin{gathered}
\alpha_1\neq 0,\quad \beta_1\neq 0,\quad k_2\neq 0,\quad k_3\neq 0,\\
k_2k_3+\alpha_1\beta_1=0,\quad \alpha_1k_2-\beta_1k_3\neq 0.
\end{gathered}$$

Кроме того, путем внешнего дифференцирования форм, входящих в (1.16), (1.17), получаем

$$\begin{aligned}
dk_1&=-\gamma_{11}\omega^1+(2\rho^3(\beta_1+a)-\gamma_{12})\omega^2+(-2\rho^2(\alpha_1+a)-\gamma_{13})\omega^3+(a^2+(k_1)^2-\gamma_{14})\omega^4,\\
dk_2&=\beta_1(k_2-k_1)\omega^1+2\rho^3\beta_1\omega^2-2\rho^2\beta_1\omega^3+((k_2)^2+a\beta_1)\omega^4,\\
dk_3&=\alpha_1(k_3-k_1)\omega^1+2\rho^3\alpha_1\omega^2-2\rho^2\alpha_1\omega^3+((k_3)^2+a\alpha_1)\omega^4,\\
d\alpha_1&=((\alpha_1)^2+k_1k_3)\omega^1-2\rho^3k_3\omega^2+2\rho^2k_3\omega^3+k_3(\alpha_1-a)\omega^4,\\
d\beta_1&=((\beta_1)^2+k_1k_2)\omega^1-2\rho^3k_2\omega^2+2\rho^2k_2\omega^3+k_2(\beta_1-a)\omega^4,\\
2d\rho^3&=\gamma_{12}\omega^1+\gamma_{22}\omega^2+\gamma_{23}\omega^3+(\gamma_{24}+2\rho^3(k_1+k_2))\omega^4,\\
2d\rho^2&=-\gamma_{13}\omega^1-\gamma_{23}\omega^2-\gamma_{33}\omega^3+(2\rho^2(k_1+k_3)-\gamma_{34})\omega^4,\\
da&=\gamma_{14}\omega^1+\gamma_{24}\omega^2+\gamma_{34}\omega^3+\gamma_{44}\omega^4.
\end{aligned}$$

Итак, имеем две неподвижные взаимно перпендикулярные плоскости P_3 и P_2, пересекающиеся в одной точке и определяемые в локальных координатах уравнениями (1.14) и (1.15). Всякая параллель н. п. д. в. пересекает эти плоскости в двух точках $F_3\in P_3$ и $F_2\in P_2$. Плоскости P_3 и P_2 называются *двумерными осями вращения данной н. п. д. в.*

Из сказанного выше следует, что вдоль двух линий кривизны 2-го рода, проходящих через данную точку $M\in G$, нормали н. п. д. в. описывают конус с вершиной на одной из двумерных осей вращения. Для них имеет место

Теорема 1. *Линии кривизны 2-го рода, соответствующие кривизнам k_2 и k_3, лежат на двумерных сферах с центрами на плоскостях вращения.*

Доказательство. Покажем, что сфера

$$(x^1)^2+(x^2)^2+\left(x^4-\tfrac{1}{k_2}\right)^2=\left(\tfrac{1}{k_2}\right)^2,\quad x^3=0\tag{1.18}$$

остается неподвижной в точках линии кривизны 2-го рода (1.9). Характеристика сферы (1.18) при смещении по произвольной линии определяется системой уравнений

$$\begin{gathered}
(x^1)^2+(x^2)^2+\left(x^4-\tfrac{1}{k_2}\right)^2=\left(\tfrac{1}{k_2}\right),\\
x^3=0,\\
2x^1(-\omega_2^1x^2-\omega_4^1x^4-\omega^1)+2x^2(-\omega_1^2x^1-\omega_4^2x^4-\omega^2)+\\
+2x^4(-\omega_1^4x^1-\omega_2^4x^2)+\tfrac{2}{k_2}(\omega_1^4x^1+\omega_2^4x^2)+\tfrac{2dk_2}{(k_2)^2}x^4=0,\\
\omega_1^3x^1+\omega_2^3x^2+\omega_4^3x^4+\omega^3=0.
\end{gathered}\tag{1.19}$$

Вдоль линии кривизны (1.9) последние два уравнения системы (1.17) обращаются в тождества. Таким образом, вдоль линии кривизны (1.9) сфера (1.18) не меняется. Значит, линия кривизны (1.9) лежит на двумерной сфере (1.18), центр $C_2(0,0,0,1/k_2)$ которой лежит в плоскости (1.14).

Аналогично убеждаемся, что вторая линия кривизны 2-го рода (1.10) лежит на двумерной сфере

$$(x^1)^2 + (x^3)^2 + \left(x^4 - \tfrac{1}{k_3}\right)^2 = \left(\tfrac{1}{k_3}\right)^2, \quad x^2 = 0$$

с центром $C_3(0,0,0,1/k_3)$, принадлежащим плоскости (1.15).

Теорема 2. *Линии кривизны 2-го рода, соответствующие кривизне k_1, лежат в двумерных плоскостях, проходящих через нормаль н. п. д. в.*

Доказательство. Найдем соприкасающуюся плоскость той линии кривизны 2-го рода (1.8), которая соответствует k_1. Она определяется уравнениями

$$x^2 = 0, \quad x^3 = 0. \tag{1.20}$$

Поскольку вдоль линии кривизны (1.8) имеем $dx^2 = 0$, $dx^3 = 0$, то соприкасающаяся плоскость данной линии кривизны не меняется, а значит, линия кривизны 2-го рода (1.18) лежит в плоскости (1.20), которая, очевидно, проходит через нормаль неголономной поверхности.

Определение 3. Линии неголономной поверхности двойного вращения, вдоль которых нормали образуют конус, называются *параллелями* н. п. д. в.

Определение 4. Линии кривизны 2-го рода неголономной поверхности двойного вращения, лежащие в двумерных плоскостях, называются *меридианами* н. п. д. в.

Легко доказать, что меридианы и параллели н. п. д. в. обладают следующими свойствами:

1) плоскость, в которой лежит меридиан, проходит через центр вращения;

2) меридианы являются геодезическими прямейшими;

3) вдоль каждой параллели одна из главных кривизн 2-го рода постоянна;

4) линия тока векторного поля нормалей $\{\vec{e}_4\}$ н. п. д. в. лежит в одной двумерной плоскости с меридианом и ортогональна ему;

5) длины отрезков нормалей, заключенных между точкой н. п. д. в. и двумерными осями вращения, равны абсолютным величинам тех радиусов кривизны 2-го рода, которые соответствуют параллелям.

2. Эквидирекционные линии и поверхности на н. п. д. в.

Линия (поверхность) называется эквидирекционной линией (поверхностью) векторного поля, если вдоль нее векторы поля параллельны ([8], с. 61).

Поскольку матрица $A_{(e)}$ основного линейного оператора A н. п. д. в. в выбранном репере имеет вид

$$\mathbf{A}_{(e)} = \begin{pmatrix} -k_1 & 2\rho^3 & -2\rho^2 & a \\ 0 & -k_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -k_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

то эквидирекционные линии определяются системой уравнений

$$\begin{aligned} -k_1\omega^1 + a\omega^4 &= 0, \\ \omega^2 &= 0, \\ \omega^3 &= 0. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Теорема 3. *Через каждую точку н. п. д. в. проходит либо одна эквидирекционная линия, либо двумерная эквидирекционная поверхность. Эквидирекционных поверхностей размерности 3 нет.*

Доказательство. Так как ранг матрицы системы (2.1) не может быть равен единице, то это значит, что у н. п. д. в. трехмерных эквидирекционных поверхностей быть не может.

Изучая систему (2.1), заметим, что имеют место две возможности.

1) Если $k_1 = a = 0$, то $\operatorname{rang} A_{(e)} = 2$, и система (2.1) вполне интегрируема. Это означает, что через каждую точку н. п. д. в. проходит двумерная эквидирекционная поверхность.

2) Если хотя бы одна из величин k_1 или a отлична от нуля, то $\operatorname{rang} A_{(e)} = 3$. В этом случае через каждую точку н. п. д. в. проходит единственная эквидирекционная линия.

Покажем, что если через точку $M \in G$ проходит эквидирекционная линия, то эта линия будет прямой линией, совпадающей либо с линией тока векторного поля нормалей, либо с меридианом.

2.1) При $a = 0$, $k_1 \neq 0$ эквидирекционная линия совпадает с линией тока. Так как a — кривизна плоской линии тока, то в этом случае линия тока (а значит, и эквидирекционная линия) — прямая линия. 2.2) При $k_1 = 0$, $a \neq 0$ эквидирекционная линия совпадает с меридианом, и меридиан — прямая линия, т. е. и в этом случае эквидирекционная линия — прямая линия.

Если же через точку $M \in G$ проходит эквидирекционная поверхность, то эта поверхность является плоскостью, проходящей через линию тока векторного поля нормалей и через меридиан.

Действительно, система (2.1) определяет эквидирекционные поверхности лишь при $k_1{=}a{=}0$. При этом линии тока $\omega^1 = \omega^2 = \omega^3 = 0$ лежат на эквидирекционных поверхностях (2.1) и меридианы $\omega^2 = \omega^3 = \omega^4 = 0$ также лежат на эквидирекционных поверхностях.

Исследуем эквидирекционную поверхность, проходящую через точку $M \in G$. Ее касательная плоскость определяется системой уравнений

$$x^2 = 0, \quad x^3 = 0. \tag{2.2}$$

Нетрудно показать, что эта плоскость остается неподвижной вдоль поверхности (2.1) (при $k_1 = a = 0$). Таким образом, при $k_1 = a = 0$ эквидирекционные поверхности н. п. д. в. представляют собой двумерные плоскости.

Найдем характеристики эквидирекционной плоскости при смещении вдоль параллелей н. п. д. в. Характеристика

$$\begin{gathered} x^2 = x^3 = 0, \\ \omega_1^2 x^2 + \omega_4^2 x^4 + \omega^2 = 0, \\ \omega_1^3 x^1 + \omega_4^3 x^4 + \omega^3 = 0 \end{gathered}$$

вдоль параллели

$$k_2\omega^1 + 2\rho^3\omega^2 = 0, \quad \omega^3 = 0, \quad \omega^4 = 0$$

определяется системой

$$\begin{gathered} x^2 = x^3 = 0, \\ \beta_1 x^1 + k_2 x^4 - 1 = 0. \end{gathered} \tag{2.3}$$

Уравнения характеристики плоскости (2.2) вдоль параллели

$$k_3\omega^1 - 2\rho^2\omega^3 = 0, \quad \omega^2 = 0, \quad \omega^4 = 0$$

имеют вид

$$\begin{gathered} x^2 = x^3 = 0, \\ \alpha_1 x^1 + k_3 x^4 - 1 = 0. \end{gathered} \tag{2.4}$$

Отсюда следуют два утверждения:

а) *характеристики эквидирекционной плоскости при смещении ее по параллелям пересекают нормаль в точках* F_2 *и* F_3;

б) *характеристики* (2.3) *и* (2.4) *ортогональны.*

3. Главные кривизны и главные направления 1-го рода. Линии кривизны 1-го рода н. п. д. в.

В построенном репере матрица оператора A^* имеет вид

$$\mathbf{A}^*_{(e)} = \begin{pmatrix} -k_1 & 2\rho^3 & -2\rho^2 \\ 0 & -k_2 & 0 \\ 0 & 0 & -k_3 \end{pmatrix}.$$

Разложим матрицу $A^*_{(e)}$ на сумму двух матриц

$$\mathbf{A}^*_{(e)} = \begin{pmatrix} -k_1 & \rho^3 & -\rho^2 \\ \rho^3 & -k_2 & 0 \\ -\rho^2 & 0 & -k_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \rho^3 & -\rho^2 \\ -\rho^3 & 0 & 0 \\ \rho^2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Оператор B первой из этих матриц является симметричным. Характеристическое уравнение оператора B имеет вид

$$\begin{vmatrix} -k_1 - \mu & \rho^3 & -\rho^2 \\ \rho^3 & -k_2 - \mu & 0 \\ -\rho^2 & 0 & -k_3 - \mu \end{vmatrix} = 0. \tag{3.1}$$

Его корни, взятые с противоположными знаками, называются главными кривизнами 1-го рода ([8], с. 63), а собственные векторы, им соответствующие, — главными направлениями 1-го рода.

Полной кривизной 1*-го рода* K_1 называется

$$\det B_{(e)} = -k_1^{(2)} k_2^{(2)} k_3^{(2)} + k_2^{(2)} (\rho^2)^2 + k_3^{(2)} (\rho^3)^2.$$

Поскольку $K_2 = -k_1^{(2)} k_2^{(2)} k_3^{(2)}$, то связь между полными кривизнами 1-го и 2-го рода выражается равенством

$$K_1 = K_2 + k_2^{(2)} (\rho^2)^2 + k_3^{(2)} (\rho^3)^2.$$

Можно показать, что главная кривизна 2-го рода $k_1^{(2)}$, которая соответствует меридиану, не может быть главной кривизной 1-го рода. Но одна из главных кривизн 2-го рода ($k_2^{(2)}$ или $k_3^{(2)}$) для некоторых н. п. д. в. может быть также и главной кривизной 1-го рода.

Предложение 1. *Одна из главных кривизн 2-го рода, соответствующая параллели, является также и главной кривизной 1-го рода тогда и только тогда, когда данная параллель ортогональна меридиану.*

Доказательство. Пусть главная кривизна 2-го рода $k_2^{(2)}$ является главной кривизной 1-го рода, тогда $(-k_2^{(2)})$ является корнем характеристического уравнения (3.1). Следовательно, $(\rho^3)^2 (k_3^{(2)} - k_2^{(2)}) = 0$. Так как $k_3^{(2)} \neq k_2^{(2)}$, то $\rho^3 = 0$. Итак, $k_2^{(2)}$ будет главной кривизной 1-го рода лишь при $\rho^3 = 0$, и только в этом случае параллель

$$(k_2^{(2)} - k_1^{(2)}) \omega^1 + 2\rho^3 \omega^2 = 0, \quad \omega^3 = 0, \quad \omega^4 = 0$$

($k_2^{(2)} \neq k_1^{(2)}$), соответствующая $k_2^{(2)}$, ортогональна меридиану $\omega^2 = \omega^3 = \omega^4 = 0$. Если же $k_3^{(2)}$ является главной кривизной 1-го рода, то аналогично получаем $\rho^2 = 0$ и тогда вторая параллель будет ортогональна меридиану.

Заметим, что вектор неголономности $\vec{\rho} = \rho^2 \vec{e}_2 + \rho^3 \vec{e}_3$, который для н. п. д. в. в общем случае лежит в плоскости, ортогональной меридиану, при $\rho^3 = 0$ ($\rho^2 = 0$) является касательным к соответствующей параллели.

4. Неголономные поверхности двойного вращения нулевой полной кривизны 2-го рода

Так как для н. п. д. в. $k_2 \neq 0$, $k_3 \neq 0$, то полная кривизна 2-го рода $K_2 = -k_1k_2k_3$ равна нулю лишь при $k_1 = 0$.

Предложение 2. *Меридиан н. п. д. в. является прямой тогда и только тогда, когда* $K_2 = 0$.

Действительно, из (1.1) и (1.14) находим, что вдоль меридиана $\omega^2 = \omega^3 = \omega^4 = 0$ имеет место формула $d\vec{e}_1 = k_1\omega^1\vec{e}_4$. Следовательно, $d\vec{e}_1 = 0$ лишь при $k_1 = 0$. То есть касательный вектор $\vec{e}_1$ к меридиану остается постоянным во всех его точках лишь при $k_1 = 0$. Последнее же означает, что меридианы н. п. д. в. представляют собой прямые линии тогда и только тогда, когда полная кривизна 2-го рода равна нулю.

Предложение 3. *Если для н. п. д. в.* $K_2 = 0$, *то ее касательные плоскости образуют трехпараметрическое семейство.*

Действительно, в выбранном репере касательная плоскость неголономной поверхности $\omega^4=0$ имеет уравнение $x^4 = 0$. Характеристика этой плоскости при смещении по любому направлению определяется системой уравнений

$$\begin{aligned} (2\rho^3x^1 - k_2x^2)\omega^2 + (-2\rho^2x^1 - k_3x^3)\omega^3 + (ax^1 - 1)\omega^4 = 0,\\ x^4 = 0. \end{aligned} \tag{4.1}$$

Уравнения (4.1) содержат только три базисные формы. Это означает, что плоскости $x^4 = 0$ образуют трехпараметрическое семейство, а не четырехпараметрическое, как это имеет место в общем случае.

Характеристическая точка M_0 плоскости $x^4 = 0$ имеет координаты

$$x_0^1 = \frac{1}{a}, \quad x_0^2 = \frac{2\rho^3}{ak_2}, \quad x_0^3 = -\frac{2\rho^2}{ak_3}. \tag{4.2}$$

Отсюда точка M_0 является собственной лишь тогда, когда $a \neq 0$.

Асимптотической линией неголономной поверхности называется линия, в каждой точке которой нормальная кривизна равна нулю.

Как известно ([8], с. 65), линия неголономной поверхности является асимптотической, если ее двумерная соприкасающаяся плоскость принадлежит касательной плоскости данного многообразия либо эта линия прямая.

Таким образом, найдем асимптотические линии н. п. д. в. $\omega^4 = 0$ из равенства

$$\langle d^2\vec{r}, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\rangle = 0.$$

Их дифференциальные уравнения имеют вид

$$k_1(\omega^1)^2 + k_2(\omega^2)^2 + k_3(\omega^3)^2 - 2\rho^3\omega^1\omega^2 + 2\rho^2\omega^1\omega^3 = 0, \quad \omega^4 = 0,$$

а совокупность всех касательных к ним определяется системой уравнений

$$k_1(x^1)^2 + k_2(x^2)^2 + k_3(x^3)^2 - 2\rho^3x^1x^2 + 2\rho^2x^1x^3 = 0, \quad x^4 = 0. \tag{4.3}$$

Предложение 4. *Пусть для н. п. д. в.* $K_2 = 0$ *и* $\operatorname{rang} A^*_{(e)} = 3$, *тогда в каждой точке* $M \in G$ *касательная к неплоской асимптотической линии н. п. д. в.* $\omega^4 = 0$ *проходит через характеристическую точку* M_0 *касательной плоскости.*

Это очевидно, поскольку при $k_1 = 0$ координаты характеристической точки M_0 (4.2) удовлетворяют системе (4.3), определяющей касательные к асимптотическим.

Теорема 4. *С произволом в одну функцию двух аргументов существует н. п. д. в. нулевой полной кривизны 2-го рода, для которой одна из параллелей перпендикулярна меридиану.*

Доказательство. Пусть $k_1 = \rho^3 = 0$. Тогда одна из параллелей определяется уравнениями

$$\omega^1 = \omega^3 = \omega^4 = 0.$$

Как видим, ее касательный вектор — $\vec{e}_2$. Поскольку репер ортонормированный, то вектор $\vec{e}_2$ ортогонален вектору $\vec{e}_1$, касательному вектору к меридиану $\omega^2 = \omega^3 = \omega^4 = 0$. Значит, параллель ортогональна меридиану. Докажем существование н. п. д. в. с таким свойством с помощью метода Кэлера ([1], с. 23).

Замкнем систему

$$\begin{aligned} 2d\rho^2 &= 2\rho^2(\alpha_1 + a)\omega^1 - \gamma_{33}\omega^2 + (2\rho^2 k_3 - \gamma_{34})\omega^4, \\ da &= a^2\omega^1 + \gamma_{34}\omega^3 + \gamma_{44}\omega^4. \end{aligned}$$

Получили следующие внешние дифференциальные уравнения:

$$\begin{gathered} [d\gamma_{33} + (4\rho^2\gamma_{34} - \gamma_{33}a - 2\gamma_{33}\alpha_1)\omega^1 + (4(\rho^2)^2 a - 2\gamma_{33}k_3)\omega^4] \wedge \omega^3 + \\ +[d\gamma_{34} + (2\rho^2\gamma_{44} - (\alpha_1 + 2a)\gamma_{34})\omega^1] \wedge \omega^4 = 0, \\ [d\gamma_{34} + (2\rho^2\gamma_{44} - (\alpha_1 + 2a)\gamma_{34})\omega^1 + (-2\rho^2 a^2 - \gamma_{34}k_3)\omega^4] \wedge \omega^3 + [d\gamma_{44} - 3a\gamma_{44}\omega^1] \wedge \omega^4 = 0. \end{gathered}$$

Перепишем систему в виде

$$\begin{aligned} d\gamma_{33} \wedge \omega^3 + d\gamma_{34} \wedge \omega^4 + A_1\omega^1 \wedge \omega^3 + A_2\omega^3 \wedge \omega^4 + A_3\omega^4 \wedge \omega^1 = 0, \\ d\gamma_{34} \wedge \omega^3 + d\gamma_{44} \wedge \omega^4 + B_1\omega^1 \wedge \omega^3 + B_2\omega^3 \wedge \omega^4 + B_3\omega^4 \wedge \omega^1 = 0, \end{aligned} \tag{4.4}$$

где

$$\begin{gathered} A_1 = 4\rho^2\gamma_{34} - \gamma_{33}a - 2\gamma_{33}\alpha_1, \quad A_2 = 2\gamma_{33}k_3 - 4(\rho^2)^2 a, \quad A_3 = (\alpha_1 + 2a)\gamma_{34} - 2\rho^2\gamma_{44}, \\ B_1 = 2\rho^2\gamma_{44} - (\alpha_1 + 2a)\gamma_{34}, \quad B_2 = 2\rho^2 a^2 + \gamma_{34}k_3, \quad B_3 = 3a\gamma_{44}. \end{gathered}$$

Так как ω^1, ω^3, ω^4 — базисные формы, то можно положить

$$\begin{aligned} d\gamma_{33} &= \lambda_1\omega^1 + \lambda_3\omega^3 + \lambda_4\omega^4, \\ d\gamma_{34} &= \mu_1\omega^1 + \mu_3\omega^3 + \mu_4\omega^4, \\ d\gamma_{44} &= \nu_1\omega^1 + \nu_3\omega^3 + \nu_4\omega^4. \end{aligned} \tag{4.5}$$

Следуя методу Кэлера, строим цепь интегральных элементов $E_1 \subset E_2$. Пусть $\omega^1 = \omega^3 = 0$, тогда для E_1 параметры λ_4, μ_4, ν_4 свободные, т. е. характеристическое число $r_1 = 3$. Для E_2 полагаем $\omega^1 = 0$, тогда из (4.4) и (4.5) получаем

$$\mu_3 = \lambda_3 - A_2, \quad \nu_3 = \mu_4 - B_2.$$

Параметр λ_3 остается свободным. Значит, характеристическое число $r_2 = 1$. Подставляя (4.5) в (4.4), находим

$$\lambda_1 = -A_1, \quad \mu_1 = -B_1, \quad \nu_1 = -B_3, \quad B_1 + A_3 = 0.$$

Отсюда видим, что характеры системы s_1, s_2, s_3 имеют уравнения

$$s_1 = r_1 - r_2 = 2, \quad s_2 = r_2 - r_3 = 1, \quad s_3 = 0.$$

Достаточный признак Кэлера выполнен. Решение системы существует и имеет произвол в одну функцию двух аргументов.

Теорема 5. *Если $k_1 = \rho^3 = 0$, то одна из параллелей является окружностью.*

Действительно, найдем соприкасающуюся плоскость к параллели $\omega^1 = \omega^3 = \omega^4 = 0$. Ее уравнения имеют вид

$$\alpha_1 x^1 + k_3 x^4 = 0, \quad x^3 = 0. \tag{4.6}$$

Нетрудно проверить, что плоскость (4.6) не меняется вдоль параллели. Значит, параллель лежит в двумерной плоскости. Так как по теореме 2 она лежит также на трехмерной сфере, то эта параллель является окружностью.

Заметим, что вторая параллель

$$k_3\omega^1 - 2\rho^2\omega^3 = 0, \;\; \omega^2 = 0, \;\; \omega^4 = 0$$

будет окружностью лишь в голономном случае.

Теорема 6. *Если $k_1 = \rho^3 = 0$, то касательные к асимптотическим линиям в каждой точке н. п. д. в. образуют действительный конус 2-го порядка. Меридиан при этом является асимптотической линией.*

Доказательство. Если $k_1 = \rho^3 = 0$, то совокупность касательных к асимптотическим линиям определяется уравнениями

$$k_2(x^2)^2 + k_3(x^3)^2 + 2\rho^2 x^1 x^3 = 0, \quad x^4 = 0,$$

т. е. представляет собой действительный конус 2-го порядка.

Меридиан $\omega^2 = \omega^3 = \omega^4 = 0$ при $k_1 = \rho^3 = 0$ удовлетворяет системе (4.4), а значит, является асимптотической линией.

Литература

1. Фиников С.П. *Метод внешних форм Картана в дифференциальной геометрии.* – М.–Л.: ГИТТЛ, 1948. – 432 с.
2. Лаптев Г.Ф. *Распределения касательных элементов* // Тр. Геометрич. семин. – 1971. – Т. 3. – С. 29–48.
3. Вершик А.М., Гершкович В.Я. *Неголономные динамические системы. Геометрия распределений и вариационные задачи* // Итоги науки и техн. Современ. пробл. матем. – 1987. — Т. 16. – С. 13.
4. Кобаяси Ш., Номидзу К. *Основы дифференциальной геометрии.* Т. 1. – М.: Наука, 1981. – 344 с.
5. Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т. *Современная геометрия*: *Методы и приложения.* – М.: Наука, 1979. – 759 с.
6. Роговой М.Р. *К дифференциальной геометрии неголономной гиперповерхности* // Укр. геом. сб. – 1970. – Вып. 7. – С. 98–108.
7. Васильева О.В. *Поверхности вращения в четырехмерном евклидовом пространстве* // VII Всероссийская конф. студентов, аспирантов и молодых ученых "Наука и образование" (14–18 апреля 2003 г.): Материалы конференции. – Томск: Изд-во ТГПУ, 2003. – Т. 1. – С. 21–27.
8. Онищук Н.М. *Геометрия векторного поля в четырехмерном евклидовом пространстве* // Международн. конф. по матем. и механ.: Избранные доклады. – Томск, 2003. – С. 60–68.

Томский государственный университет

Поступила 02.07.2004