ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1999 МАТЕМАТИКА № 4 (443)

УДК 517.554

И.А. БИКЧАНТАЕВ

ТЕОРЕМА КЛИФФОРДА ДЛЯ КВАЗИРАЦИОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

На компактной римановой поверхности R рода h число l линейно независимых мероморфных функций, кратных дивизору $1/D$, в случае, когда $\operatorname{ord} D \neq 0, 1, \dots, 2h-2$, определяется формулой

$$l = \max\{0,\ \operatorname{ord} D - h + 1\}, \tag{1}$$

а при $0 \le \operatorname{ord} D \le 2h-2$ удовлетворяет неравенству

$$l \le [\operatorname{ord} D/2] + 1, \tag{2}$$

где [ ] означает целую часть числа (теорема Клиффорда).

Равенство (1) было доказано на произвольной римановой поверхности в классе мероморфных функций с Λ_K-поведением [1]. Оценка (2) была получена в [2] для числа l линейно независимых мероморфных функций на параболической римановой поверхности, ограниченных вне любой окрестности полюсов, в случае целого дивизора D. Здесь неравенство (2) доказывается для числа l линейно независимых квазирациональных функций на параболической римановой поверхности R, кратных произвольному конечному дивизору D, носитель которого лежит на компактификации Стоилова поверхности R.

1. Приведем некоторые определения и результаты, используемые в дальнейшем.

1.1. Пусть R — некомпактная риманова поверхность. Буквой Q с индексом или без него условимся обозначать любую область на R, которая не является относительно компактной на R, но имеет компактную относительную границу ∂Q. Граничной компонентой поверхности R назовем, следуя ([3], с. 81–83), непустое семейство q множеств Q, удовлетворяющих следующим условиям: 1) если $Q_0 \in q$ и $Q \supset Q_0$, то $Q \in q$, 2) если $Q_1, Q_2 \in q$, то существует $Q_3 \in q$ такое, что $Q_3 \subset Q_1 \cap Q_2$, 3) пересечение всех замыканий $\overline{Q}$, $Q \in q$, пусто.

Множество β_R всех граничных компонент поверхности R называется идеальной границей поверхности R. Для заданной области Q через $\beta_R(Q)$ будем обозначать множество таких граничных компонент q поверхности R, что $Q \in q$.

Риманова поверхность R может быть вложена в качестве открытого плотного подмножества в компактное топологическое пространство $R^* = R \cup \beta_R$, в котором базисом открытых множеств являются все открытые множества на R и все множества вида $Q \cup \beta_R(Q)$, где Q принадлежит некоторой граничной компоненте. Построенная компактификация поверхности R называется компактификацией Стоилова, а $\beta_R = R^* \setminus R$ — идеальной границей Стоилова ([3], с. 82–83). Компоненты множества β_R называются также точками идеальной границы Стоилова.

Описанный способ компактификации применяется для любой открытой римановой поверхности R, однако в дальнейшем мы ограничимся изучением лишь параболических поверхностей.

1.2. Пусть Q есть область на параболической римановой поверхности R с некомпактным замыканием и компактной относительной границей. Через $n(f, w, Q)$ обозначим число w-точек мероморфной в Q функции f (с учетом кратностей).

Определение ([4]). Граничная компонента $q \in \beta_R(Q)$ является для мероморфной в Q функции f а) устранимой (в обобщенном смысле), если $\lim\limits_{p \to q} f(p)$ существует и конечен, б) полюсом (в обобщенном смысле), если $\lim_{p\to q} f(p)=\infty$, в) существенно особой (в обобщенном смысле), если $\lim_{p\to q} f(p)$ не существует.

Определим еще кратность значения $f(p)$ в граничной компоненте q. Пусть для некоторого $Q\in q$ $N(f,q)=\max_{w\in\overline{\mathbb{C}}} n(f,w,Q)$. Тогда кратность $n(f,f(q),q)$ значения $f(q)$ в q определим формулой $n(f,f(q),q)=\min_{Q\in q} N(f,Q)$. Мероморфную на параболической римановой поверхности функцию f назовем квазирациональной, если она в $R^*=R\cup\beta_R$ не допускает иных особенностей, кроме устранимых особых точек и полюсов.

Предложение ([4]). *Пусть f — непостоянная квазирациональная функция на параболической римановой поверхности R. Тогда* 1) *f имеет предельные значения в каждой граничной компоненте,* 2) *отображение $f: R^*\to\overline{\mathbb{C}}$ непрерывно,* 3) *f конечнозначна: $n(f,w,R)\le N<\infty$ для всех $w\in\overline{\mathbb{C}}$,* 4) *$n(f,w,R)=\max_{w\in\overline{\mathbb{C}}} n(f,w,R)$ для всех $w\in\overline{\mathbb{C}}\setminus E$, где E — множество нулевой емкости,* 5) *f может быть представлена в виде $f=a+1/g$, где $a\in\mathbb{C}$, g ограничена вне некоторого компактного подмножества R,* 6) *для всех $w\in\overline{\mathbb{C}}$ справедливо равенство $n(f,w,R^*)=n(f,w,R)+n(f,w,\beta_R)=\max_{w\in\overline{\mathbb{C}}} n(f,w,R)$, где w-точки функции f на R и на β_R считаются с учетом кратностей.*

1.3. Пусть Q — область с некомпактным замыканием $\overline{Q}$ на R с компактной кусочно-гладкой относительной границей ∂Q, f — мероморфная в Q функция, имеющая предел, конечный или бесконечный, в точке $q\in\beta_R(Q)$. Тогда из определения кратности значения $f(q)$ в точке q и леммы 2.7 из [4] следует, что существует область $Q_0\in q$, обладающая следующими свойствами: 1) каждая точка области $f(Q_0)\subset\overline{\mathbb{C}}$ (исключая, возможно, подмножество нулевой емкости) имеет ровно $n(f,f(q),q)$ прообразов при отображении $f: Q_0\to\overline{\mathbb{C}}$, 2) $f(\partial Q_0)=\partial f(Q_0)$, причем каждая точка границы $\partial f(Q_0)$ области $f(Q_0)$ имеет ровно $n(f,f(q),q)$ различных прообразов при отображении $f:\partial Q_0\to\partial f(Q_0)$.

Видно, что $[\arg(f-f(q))]_{\partial Q_0}=2\pi n(f,f(q),q)$ при $f(q)\neq\infty$ и $[\arg f]_{\partial Q_0}=-2\pi n(f,f(q),q)$ при $f(q)=\infty$. Отсюда вытекает следующее обобщение принципа аргумента.

Пусть f — мероморфная функция в области Q, имеющая предел, конечный или бесконечный, в каждой точке $q\in\beta(Q)$, предельные значения которой на ∂Q непрерывны и отличны от нуля. Тогда

$$\frac{1}{2\pi}[\arg f]_{\partial Q}=n(f,0,Q\cup\beta_R(Q))-n(f,\infty,Q\cup\beta_R(Q)).$$

Дивизором D на $Q^*=Q\cup\beta_R(Q)$ назовем символ вида $D=p_1^{n_1}p_2^{n_2}\cdots p_k^{n_k}$, где $p_1,p_2,\ldots,p_k$ — точки множества Q^*, $n_1,n_2,\ldots,n_k$ — целые числа. Обычным образом определим понятия умножения и деления дивизоров, так что множество всех дивизоров на Q^* образует мультипликативную абелеву группу. Дивизор D назовем целым, если все числа n_i, $i=1,2,\ldots,k$, неотрицательны. Дивизор D_1 будем называть кратным дивизору D_2, если дивизор D_1/D_2 целый. Дивизором функции f, мероморфной в Q и имеющей конечные или бесконечные предельные значения в точках множества $\beta_R(Q)$, назовем дивизор $(f):=p_1^{n_1}p_2^{n_2}\cdots p_k^{n_k}p_{k+1}^{-n_{k+1}}p_{k+2}^{-n_{k+2}}\cdots p_{k+l}^{-n_{k+l}}$, где $p_1,p_2,\ldots,p_k$ — все нули, $p_{k+1},p_{k+2},\ldots,p_{k+l}$ — все полюсы функции f в Q^*, n_i — кратность нуля ($1\le i\le k$) или полюса ($k+1\le i\le k+l$) функции f в точке p_i. Будем говорить, что функция f кратна дивизору D (пишем $D|(f)$), если дивизор (f) кратен дивизору D. Дивизор D на R^* назовем главным, если он является дивизором квазирациональной функции. Два дивизора D_1 и D_2 назовем эквивалентными, если их отношение D_1/D_2 есть главный дивизор.

2. Обозначим через $M(R)$ пространство мероморфных на R функций, имеющих конечное число полюсов и ограниченных вне любой окрестности полюсов, а через $M^*(R)$ — пространство квазирациональных функций на R. Тогда $M^*(R)$ есть наименьшее поле, содержащее $M(R)$.

Лемма 1. *Пространство квазирациональных функций на параболической римановой поверхности R изоморфно пространству мероморфных функций на некоторой компактной римановой поверхности, если $M^*(R)$ содержит непостоянные функции.*

Доказательство. Поверхность R может быть вложена однолистно и конформно в другую риманову поверхность S, обладающую тем свойством, что любая область S_0 на S, род которой конечен и относительная граница ∂S_0 компактна, имеет компактное замыкание в S. Такая поверхность определяется по R с точностью до конформной эквивалентности и также является параболической, а при $h < \infty$ даже компактной. Поверхность R отождествим с подмножеством римановой поверхности S. При этом множество $S \backslash R$ имеет гармоническую меру нуль и, следовательно, является AB-устранимым на S ([5], с. 137). Поэтому любая квазирациональная функция f на R аналитически продолжима на S, и ее продолжение является квазирациональной функцией на S. Этим определяется взаимно однозначное соответствие между пространствами $M^*(R)$ и $M^*(S)$, которые в дальнейшем будем отождествлять. Через S^* обозначим компактификацию Стоилова римановой поверхности S, через $\beta_S = S^* \setminus S$ — идеальную границу Стоилова.

Пусть z — непостоянная квазирациональная функция на R. Для ее аналитического продолжения на S сохраним прежнее обозначение z. Число полюсов (в обычном и обобщенном смысле) функции z с учетом кратностей обозначим через n. Отображение $z : S \to \overline{\mathbb{C}}$ определяет n-листную накрывающую (S, z) расширенной комплексной плоскости $\overline{\mathbb{C}}$. Множество β_S совпадает с множеством всех точек сгущения (в топологии S^*) для нулей дифференциала $\mathrm{d}z$ или, что то же самое, с множеством всех точек сгущения для точек ветвления накрывающей (S, z).

На поверхности S можно выделить n областей $S_1, S_2, \ldots, S_n$ с кусочно-гладкими границами, которые обладают следующими свойствами: 1) попарно не пересекаются; 2) $\overline{S}_1 \cup \overline{S}_2 \cup \cdots \cup \overline{S}_n = S$, где $\overline{S}_i$ означает замыкание области S_i в топологии S; 3) функция $z : S_i \to \overline{\mathbb{C}}$ осуществляет однолистное и конформное отображение области S_i на $z(S_i)$.

Все нули дифференциала $\mathrm{d}z$ и кратные полюсы функции z лежат на границах областей S_i, $i = 1, 2, \ldots, n$. Если точка $p \in S$ является нулем порядка $m - 1$ дифференциала $\mathrm{d}z$ (очевидно, m не превосходит n), то p является точкой ветвления порядка $m - 1$ для накрывающей (S, z), общей точкой для границ m областей S_i и внутренней точкой для объединения замыканий этих m областей. То же верно и для точки p, являющейся полюсом порядка m для функции z.

Обозначим через $N(\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_m)$, $2 \le m \le n$, множество всех точек ветвления порядка $m - 1$ накрывающей (S, z), лежащих на пересечении границ областей $S_{\nu_1}, S_{\nu_2}, \ldots, S_{\nu_m}$, где $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_m$ — различные натуральные числа, не превосходящие числа n. Таким образом, все точки ветвления накрывающей (S, z) оказываются разбитыми на непересекающиеся множества $N(\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_m)$. Совокупность всех таких множеств обозначим через $\mathfrak{N}$. Легко видеть, что множество $\mathfrak{N}$ конечно, и число его элементов не превосходит $2^n - n - 1$.

Если все множества из $\mathfrak{N}$ конечны, то поверхность S компактна, и лемма 1 может считаться доказанной. Поэтому в дальнейшем будем считать, что среди множеств из $\mathfrak{N}$ есть бесконечные. Это равносильно тому, что род поверхности R бесконечен.

Пусть теперь w — другая квазирациональная функция на R. Покажем, что функция w принимает одинаковые значения во всех точках p, принадлежащих областям $S_{\nu_1}, S_{\nu_2}, \ldots, S_{\nu_m}$ и имеющих один и тот же образ при отображении $z : S \to \overline{\mathbb{C}}$, если множество $N(\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_m)$ бесконечно.

Функции z и w связаны соотношением вида $P(z, w) = 0$, где $P(z, w)$ — многочлен по z и w [4]. Дифференцируя это соотношение, получим равенство $P_z \mathrm{d}z + P_w \mathrm{d}w = 0$. Так как P_z и P_w принадлежат $M^*(S)$, то они могут иметь лишь конечное число нулей и полюсов. Поэтому функции $\mathrm{d}z/\mathrm{d}w$ и $\mathrm{d}w/\mathrm{d}z$ могут иметь лишь конечное число нулей и полюсов на S. Так как множество $N(\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_m)$ бесконечно, то найдется такая точка $p_0 \in N(\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_m)$, что $w(p)$ голоморфна по $z = z(p)$, когда точка p принадлежит окрестности точки p_0. Отсюда следует, что функция w принимает одинаковые значения во всех точках областей $S_{\nu_1}, S_{\nu_2}, \ldots, S_{\nu_m}$, имеющих один и тот же образ при отображении $z : S \to \overline{\mathbb{C}}$.

Образуем теперь риманову поверхность $\widetilde{S}$, которая получается склеиванием точек поверхности S, в которых любая функция из $M^*(S)$ принимает одинаковые значения. Формальное построение поверхности $\widetilde{S}$ проводится следующим образом. Введем на поверхности S отношение эквивалентности. Пусть p_{01} и p_{02} — две точки на S, для которых $z(p_{01}) = z(p_{02}) =: z_0$. Обозначим через k минимальное натуральное число, обладающее тем свойством, что функции $w(p_i(t))$, где $t = (z - z_0)^{1/k}$, $p_i(t)$ — точка из окрестности точки p_{0i} такая, что $t(p_i(t)) = t$, $p_i(0) = p_{0i}$, $i = 1, 2$, являются однозначными в окрестности точки $t = 0$ для любой функции w из $M^*(S)$. Если при этом для любой функции w из $M(S)$ выполняется равенство $w(p_1(t)) = w(p_2(t))$ в некоторой окрестности точки $t = 0$, то точки $p_{01} = p_1(0)$ и $p_{02} = p_2(0)$ назовем эквивалентными (пишем $p_{01} \sim p_{02}$). В случае $z_0 = \infty$ при определении эквивалентности точек p_{01} и p_{02} следует взять $t = 1/z^{1/k}$, сохраняя все остальные условия. Класс эквивалентности, содержащий точку p, будем обозначать через $\widetilde{p}$.

Рассмотрим фактор-пространство $\widetilde{S} = S/\sim$, снабженное фактор-топологией. В окрестности каждой точки $\widetilde{p}_0 = \{p_{01}, \ldots, p_{0m}\}$ из $\widetilde{S}$ введем локальную униформизирующую $t = t(\widetilde{p})$, полагая $t = (z - z_0)^{1/k}$ (или $t = 1/z^{1/k}$, если $z_0 = \infty$), где $z = z(p)$, $z_0 = z(p_0)$, $p \in \widetilde{p}$, $p_0 \in \widetilde{p}_0$, число k определяется как наименьшее из натуральных чисел, для которых все функции $w(p_i(t))$, $i = 1, \ldots, m$, $w \in M^*(S)$, однозначны в окрестности точки $t = 0$. Очевидно, k является делителем чисел m_i, $i = 1, 2, \ldots, m$, где $m_i - 1$ есть порядок ветвления накрывающей (S, z) в точке p_{0i}. Введенная система локальных координат определяет на $\widetilde{S}$ конформную структуру и $\widetilde{S}$ становится параболической римановой поверхностью. Род поверхности $\widetilde{S}$, очевидно, конечен.

Между квазирациональными функциями на $\widetilde{S}$ и S имеется взаимно однозначное соответствие, определяемое равенством $\widetilde{w}(\widetilde{p}) = w(p)$, $p \in \widetilde{p} \in \widetilde{S}$, $\widetilde{w} \in M^*(\widetilde{S})$, $w \in M^*(S)$. Так как $\widetilde{S}$ однозначно продолжима до компактной римановой поверхности T и любая функция из $M^*(\widetilde{S})$ аналитически продолжима на T, то $M^*(\widetilde{S}) = M(T)$, если отождествить функцию $w \in M^*(\widetilde{S})$ и ее аналитическое продолжение на T. Отсюда следует, что $M^*(R)$ изоморфно $M(T)$. $\square$

Замечание. Из доказанного видно, что в определении эквивалентности точек p и q на S вместо требования равенства функциональных ростков, определяемых функцией w в точках p и q, достаточно ограничиться более слабым требованием равенства чисел $w(p)$ и $w(q)$ для всех w из $M^*(S)$. Действительно, если точки p и q не эквивалентны, то они определяют различные точки $\widetilde{p}$ и $\widetilde{q}$ на $\widetilde{S}$. Так как род поверхности $\widetilde{S}$ конечен, то всегда найдется функция $\widetilde{f} \in M^*(\widetilde{S})$ такая, что $\widetilde{f}(\widetilde{p}) \neq \widetilde{f}(\widetilde{q})$. Тогда соответствующая ей функция $f \in M^*(S)$, определяемая равенством $f(p) = \widetilde{f}(\widetilde{p})$, $p \in S$, принимает различные значения в точках p и q.

Обозначим через l максимальное число эквивалентных точек на S и через $M^*(R, 1/D)$ подпространство $M^*(R)$, состоящее из функций, кратных дивизору $1/D$, причем точки множества $\operatorname{supp} D$ могут находиться и на β_R. Тогда имеет место

Лемма 2. *Пространство $M^*(R,\, 1/D)$ изоморфно пространству $M^*(\widetilde{S},\, 1/\widetilde{D})$, где $\widetilde{D}$ — дивизор на $\widetilde{S}$, порядок которого удовлетворяет неравенству* $\operatorname{ord} \widetilde{D} \le l^{-1} \operatorname{ord} D$.

Доказательство. Каждой функции $f \in M^*(R) = M^*(S)$ соответствует функция $\widetilde{f} \in M^*(\widetilde{S})$, определяемая равенством $\widetilde{f}(\widetilde{p}) = f(p)$. Выясним, какому подпространству $M^*(\widetilde{S})$ соответствует пространство $M^*(S, 1/D)$ при отображении $f \mapsto \widetilde{f}$. Можно считать, что в дивизор D вместе с каждой точкой входят и все эквивалентные ей точки, добавляя при необходимости в D конечное число точек с показателем 0. Максимальное число попарно неэквивалентных точек из $\operatorname{supp} D$ обозначим через α. Тогда дивизор D может быть записан в виде

$$D = \prod_{i=1}^{\alpha} \prod_{j=1}^{l_i} p_{ij}^{n_{ij}},$$

где $\widetilde{p}_{ij} = \{p_{i1}, \dots, p_{il_i}\}$, $l_i \le l$. Через $m_{ij} - 1$ обозначим порядок ветвления поверхности S над $\widetilde{S}$ в точке p_{ij} относительно канонического отображения $\rho : S \to \widetilde{S}$. Тогда $m_{i1} + m_{i2} + \dots + m_{il_i} = l$. Точки $p_{i1}, p_{i2}, \dots, p_{il_i}$ будем считать упорядоченными таким образом, что $n_{i1}/m_{i1} \le n_{i2}/m_{i2} \le \dots \le n_{il_i}/m_{il_i}$. Тогда отображение $f \mapsto \widetilde{f}$ устанавливает изоморфизм пространств $M^*(S, 1/D)$ $(= M^*(R, 1/D))$ и $M^*(\widetilde{S}, 1/\widetilde{D})$, где $\widetilde{D} = \widetilde{p}_{11}^{\nu_1} \widetilde{p}_{21}^{\nu_2} \cdots \widetilde{p}_{\alpha 1}^{\nu_\alpha}$, $\nu_i := [n_{i1}/m_{i1}]$. Действительно, пусть функция $f \in M^*(S, 1/D)$ имеет в точке p порядок $k(p)$ и $m(p) - 1 \ge 0$ есть порядок ветвления в точке p из накрывающей (S, ρ) над $\widetilde{S}$. Тогда функция $\widetilde{f}$ имеет в точке $\widetilde{p}$ порядок $k(p)/m(p) =: \kappa(\widetilde{p})$, который не зависит от выбора точки p из $\widetilde{p}$. Кратность функции f дивизору $1/D$ означает, что $k(p) \ge -n(p)$, $p \in S$, где $n(p)$ — порядок дивизора D в точке p (если p не принадлежит $\operatorname{supp} D$, то полагаем $n(p) = 0$). Последнее неравенство равносильно $\kappa(\widetilde{p}) \ge -n(p)/m(p)$, $p \in S$. Так как $\nu(\widetilde{p})$ есть целое число, то это неравенство и $\kappa(\widetilde{p}) \ge -[\min\limits_{p \in \widetilde{p}} n(p)/m(p)]$ эквивалентны. Отсюда и вытекает утверждение об изоморфности пространств $M^*(R, 1/D)$ и $M^*(\widetilde{S}, 1/\widetilde{D})$. Наконец, $\nu_i \le n_{i1}/m_{i1} \le (n_{i1} + \dots + n_{il_i})/(m_{i1} + \dots + m_{il_i}) = (n_{i1} + \dots + n_{il_i})/l$, откуда

$$\operatorname{ord} \widetilde{D} = \nu_1 + \nu_2 + \dots + \nu_\alpha \le \sum_{i=1}^{\alpha} \sum_{j=1}^{l_i} n_{ij}/l = l^{-1} \operatorname{ord} D. \quad \square$$

Так как любая функция $f \in M^*(\widetilde{S},\, 1/\widetilde{D})$ аналитически продолжима на компактную риманову поверхность $T \supset \widetilde{S}$, то $M^*(\widetilde{S}, 1/\widetilde{D}) = M(T, 1/\widetilde{D})$, если отождествить функцию $f \in M^*(\widetilde{S}, 1/\widetilde{D})$ и ее аналитическое продолжение на T. Поэтому из леммы 2 и классической теоремы Клиффорда на компактной римановой поверхности T вытекает следующее ее обобщение.

Теорема. *Пусть R — параболическая риманова поверхность рода $h \le \infty$, D — дивизор на R, порядок которого удовлетворяет неравенству $0 \le \operatorname{ord} D < 2h - 1$. Тогда размерность пространства квазирациональных функций на R, кратных дивизору $1/D$, не превосходит числа* $[\operatorname{ord} D/2] + 1$.

Отметим, что фактически из леммы 2 вытекает оценка $\dim M^*(R, 1/D) \le [\operatorname{ord} D/(2l)] + 1$, которая при $h < \infty$ совпадает с приведенной в теореме, а при $h = \infty$ является более точной, ибо в этом случае $l > 1$.

Литература

1. Бикчантаев И.А. *Дополнения к теореме Римана–Роха на некомпактной римановой поверхности* // Матем. заметки. – 1984. – Т. 35. – № 1. – С. 93–98.
2. Бикчантаев И.А. *О теореме Клиффорда на открытой римановой поверхности* // Изв. вузов. Математика. – 1993. – № 10. – С. 13–14.
3. Ahlfors L.V., Sario L. *Riemann surfaces.* – Princeton Univ. Press, 1960. – 382 p.
4. Myrberg L. *Über quasirationale Functionen auf parabolischen Riemannschen Flächen* // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A.I. – 1967. – № 404. – 23 S.
5. Sario L., Nakai M. *Classification theory of Riemann surfaces.* – Berlin. Heidelberg. New York: Springer–Verlag, 1970. – 446 p.

Казанский государственный университет

Поступила 12.02.1997