Подготовка учащихся 5-6 классов к олимпиадам по математике

1. Обзор литературы и тематики занятий.

В большинстве книг, выпущенных издательством МЦНМО в серии «Школьные математические кружки», предлагаются тематические занятия математического кружка первого-второго года обучения, то есть занятия для школьников 5-6 классов.

В начале каждого занятия, как правило, даются методические рекомендации. Затем подробно разбираются несколько *ключевых задач*. Далее следуют задачи для самостоятельного решения. Количество этих задач, как правило, избыточно. Это делается сознательно, поскольку подобрать универсальный набор задач для кружка произвольного уровня невозможно.

Решение большинства задач школьнику 5-6 класса *трудно записать* и гораздо *легче рассказать*. Чтобы каждый успел высказаться, тренер-учитель проверяет *устные* решения у первых 2-3 учеников, назначает их экспертами по данной задаче, затем остальных отправляет рассказывать своё решение экспертам.

План занятий по теме «Математические игры»

- Симметричные стратегии, в которых используется симметрия объектов, разбиения на равные или подобные группы и т.п.
- Парные стратегии, в которых используется разбиение всех возможных ходов на пары, при этом возможность ответного «парного» хода обеспечивает выигрыш одному из игроков.
- Выигрышные позиции. Решение игр состоит в описании для каждого игрока множества *позиций*, в которых начинающий игрок может выиграть при любой стратегии противника.
- Стратегии остатков. Разбор игр, в которых выигрышные позиции описываются в терминах остатков при делении на некоторое число.
- Игры на графах, в которых строится дерево игры, а также решение задач на сохранение определенных свойств графа.
- Существование стратегии. Решение игровых задач, в которых требуется доказать, что один из игроков обладает выигрышной стратегией, при этом вовсе необязательно указывать эту выигрышную стратегию.

Симметричные стратегии

Математическим играм присущи многие черты произведений искусства — простые и четкие правила создают строго упорядоченный мир, где все целесообразно, полно внутренней гармонии и красоты.

Во всех предлагаемых задачах-играх всегда участвуют два игрока, ходы делаются по очереди, причем игроки не могут пропустить ход. *Проигравшим считается тот, кто не может сделать очередной ход*. В задачах этого раздела — там, где вопрос не указан, — *требуется определить, кто выигрывает при правильной игре*: начинающий игру или его партнер?

Пример. *Два игрока по очереди кладут доминошки* 1×2 *на доске* 8×8. *За один ход разрешается положить доминошку на любое свободное место. Кто выигрывает?*

Ответ*: второй игрок*.

Симметричные стратегии

1. Двое по очереди кладут пятаки на круглый стол так, чтобы они не накладывались друг на друга. Кто выигрывает?

Ответ: *первый игрок*.

2. В строке написано несколько минусов. Два игрока по очереди переправляют один или два соседних минуса на плюсы. Выигрывает тот, кто переправит последний минус.

Ответ: *первый игрок*.

3. У ромашки *а*) 12 лепестков; *б*) 11 лепестков. За один ход игроку разрешается оторвать либо один лепесток, либо два соседних (с самого начала) лепестка. Кто выигрывает?

Ответ: *второй игрок*.

4. Имеется цепочка из n сосисок. Два кота по очереди перегрызают по одной перемычке между сосисками и съедают образовавшиеся одиночные сосиски. Выигрывает тот, кто съест больше сосисок.

Ответ: *если n — четное, выигрывает первый игрок, иначе — второй*.

5. В трех кучках по 100 спичек. За один ход разрешается взять любое количество спичек, но только из одной кучки. Проигрывает тот, кто не может сделать очередной ход.

Ответ: *первый игрок*.

6. На поле 5×5 играют двое. Каждый игрок ставит своим ходом в любую клетку крестик или нолик. Тот, кому удалось поставить любые три знака в ряд (по горизонтали, вертикали или диагонали), — победитель. Если это никому не удалось, а свободные поля кончились — ничья. Каков результат при правильной игре?

Ответ: *первый игрок*.

7. Есть шоколадки размерами *а*) 2016×2016 и *б*) 2015×2015 долек. Малыш и Карлсон играют в такую игру: ход состоит в том, что один из имеющихся прямоугольных кусков шоколада разламывают на две прямоугольные части, одну из которых можно после этого сразу съесть (а можно и не есть). Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Первым ходит Карлсон.

Ответ: *а*) *Карлсон; б*) *Малыш*.

Пример. *Двое играют на доске 8×8. Сначала первый ставит шахматного короля на любую клетку доски и делает ход (по обычным шахматным правилам). После этого игроки по очереди делают ходы королем, причем не разрешается ставить короля на клетки, где он уже побывал. Кто выигрывает?*

Ответ: *первый игрок*.

Решение.

Все клетки шахматной доски разобьем на 32 «доминошки» 1×2, как показано на рис. 1. Две клетки из одной «доминошки» назовем *парными*. Начинающий ставит короля на любую клетку шахматной доски и передвигает его в парную клетку. Затем каждый раз ставит короля в клетку, парную той, куда его поставил второй игрок. Эта тактика гарантирует первому игроку возможность ответного хода (*парная стратегия!*). Второй игрок каждым своим ходом должен начинать новую пару, а первый — её завершает.

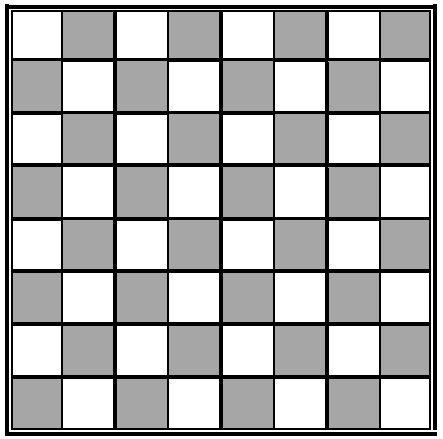

Рис. 1

Парные стратегии

1. Двое играют на шахматной доске. Первым ходом начинающий ставит шахматного коня на любую клетку доски, затем они по очереди (начиная со второго) передвигают его, при этом нельзя ставить коня на клетку, где он уже побывал. Кто выигрывает?

Ответ: *второй игрок*.

2. В коробке лежит полный набор костей домино. Два игрока по очереди выбирают из коробки по одной кости и выкладывают их на стол по правилам домино (т.е. прикладывая к уже выложенной цепочке с любой из двух сторон). Кто выигрывает?

Ответ: *первый игрок*.

3. На крайней правой клетке доски 1×40 стоит фишка. Два игрока по очереди двигают эту фишку (вправо или влево) на любое число клеток, которое еще не встречалось при выполнении предыдущих ходов. Кто выигрывает?

Ответ: *первый игрок*.

4. Двое играют на шахматной доске. Сначала первый игрок ставит шашку на любую клетку доски 8×8, затем они по очереди (начиная со второго) передвигают ее на соседнее по диагонали поле, не возвращаясь на клетки, где она уже побывала. Проигрывает тот, кто не сможет сделать свой очередной ход.

Ответ: *второй игрок*.

5. Двое по очереди вычеркивают по 9 любых чисел из последовательности 1, 2, 3, ... , 100, 101. После одиннадцати таких вычеркиваний останутся два числа. Выигрыш первого игрока равен разности между этими числами. Докажите, что первый игрок всегда сможет добиться, чтобы эта разность была не меньше 55.

Указание: *первый игрок сначала вычеркивает* 9 *чисел* от 47 *до* 55, *а оставшиеся две группы — от* 1 *до* 46 *и от* 56 *до* 101 *— разбивает на пары*.

6. На доске 2 × 2010 играют Иван и Пётр. Иван ставит горизонтальное домино, а Пётр — вертикальное домино, затем Иван снова ставит горизонтальное домино, а Пётр снова вертикальное домино, и так далее. Кто выигрывает?

Ответ: *Иван*.

Литература по работе математического кружка

Гуровиц В.М., Ховрина В.В. *Графы*. — М.: МЦНМО, 2008. — 32 с.

Заславский А.А, Френкин Б.Р., Шаповалов А.В. *Задачи о турнирах*. — М.: МЦНМО, 2013. — 104 с.

Екимова М.А., Кукин Г.П. *Задачи на разрезание*. — М.: МЦНМО,2002. — 120 с.

Евдокимов М.А. *От задачек к задачам*. — М.: МЦНМО, 2004. — 72 с.

Козлова Е.Г.*Сказки и подсказки (задачи для математического кружка)*. — М.: МЦНМО, 2004. — 165 с.

Коробицын Д.А., Жуков Г.К. *Математический кружок* (5 *класс*). — М.: Изд-во МГУ, 2015. — 121 с.

Кноп К. *Взвешивания и алгоритмы: от головоломок к задачам*. — М.: МЦНМО, 2011. — 104 с.

Медников Л.Э. *Чётность*. — М.: МЦНМО, 2013. — 60 с.

Мерзон Г.А., Ященко И.В. *Длина, площадь, объем*. — М.: МЦНМО, 2011. — 48 с.

Раскина И.В., Шноль Д.Э. *Логические задачи*. — М.: МЦНМО, 2014. — 120 с.

Литература по работе математического кружка

Сгибнев А.И. *Делимость чисел и простые числа*. — М.: МЦНМО, 2012. — 152 с.

Спивак А.В. *Тысяча и одна задача по математике*: Кн. для учащихся 5-7 кл. — М.: Просвещения, 2002. — 207 с.

Спивак А.В. *Математический кружок*. 6-7 *классы*. — М.: Посев, 2003. — 128 с.

Стрелкова Н.П., Кузнецов С.Л. *Математический кружок* (6-7 *классы*). — М.: Изд-во МГУ, 2014. — 36 с.

Чулков П.В. *Арифметические задачи*. — М.: МЦНМО, 2014. — 64 с.

Шаповалов А. *Как построить пример*. — М.: МЦНМО, 2013. — 80 с.

Шаповалов А.В. *Принцип узких мест*. — М.: МЦНМО, 2006. — 24 с.