ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2000 МАТЕМАТИКА № 7 (458)

УДК 514.144 : 514.755

Н.П. МОЖЕЙ

ОДНОРОДНЫЕ ПОДМНОГООБРАЗИЯ В ЧЕТЫРЕХМЕРНОЙ АФФИННОЙ И ПРОЕКТИВНОЙ ГЕОМЕТРИИ

1. Введение

Данная статья посвящена описанию всех локально-однородных гиперповерхностей в четырехмерной аффинной и проективной геометрии, алгебры симметрий которых имеют размерность ≥ 4. Однородные подмногообразия являются интересным и важным классом подмногообразий в однородных пространствах, и задача их классификации активно обсуждается в математической литературе с конца прошлого века.

Наиболее хорошо изучены однородные подмногообразия в аффинной и проективной геометриях размерности ≤ 3. Так, еще Софус Ли описал однородные подмногообразия в трехмерной комплексной проективной геометрии [1]. В работах [2]–[4] представлена классификация однородных поверхностей для трехмерной унимодулярной аффинной геометрии. В последние годы получено описание однородных поверхностей в трехмерной аффинной геометрии [5] (см. также [6], где классифицированы все однородные поверхности с нулевым инвариантом Пика) и в трехмерной проективной геометрии [7], [8].

Однако при переходе к четырехмерным аффинной и проективной геометриям возникает ряд трудностей, связанных с резким увеличением объема вычислений и громоздкостью конечного результата. Так, в данной работе мы ограничиваемся описанием таких однородных поверхностей, алгебры симметрий которых имеют размерность ≥ 4, т. е. грубо говоря, наиболее симметричных поверхностей. В частности, в этот класс попадают все цилиндры и квадрики. Теоремы 1 и 2 данной работы дают полный список остальных однородных поверхностей из этого класса (27 поверхностей в проективной геометрии и 33 поверхности в аффинной геометрии).

Отметим, что аналогичные классы однородных поверхностей в трехмерном случае (т. е. с алгеброй симметрий размерности ≥ 3) исчерпываются цилиндрами, квадриками и

поверхностью Кэли $z = xy + x^3/3$ в аффинной геометрии,
поверхностью Кэли и поверхностью Энриквеса $(z - xy + x^3/3)^2 = 8/9(y - x^2/2)^3$ в проективной геометрии.

Рассматриваемая в работе задача тесно связана также с описанием аффинных и проективных действий, имеющих нетривиальную открытую орбиту, и, в частности, таких действий с конечным числом орбит. Действительно, в этом случае размерность группы преобразований не менее 4, и эта группа содержится в группе симметрий одной из орбит меньшей размерности. В случае, когда одна из орбит является гиперповерхностью, она попадает в рассматриваемый в работе класс подмногообразий. Таким образом, мы попутно получаем широкий набор примеров действий с открытой орбитой и конечным числом орбит.

Особенностью методики, представленной в данной работе, является использование чисто алгебраических методов описания однородных подмногообразий. Для решения проблемы используется алгебраический аналог метода Картана подвижных реперов, описанный в [5].

2. Методика классификации

Пусть M — однородное пространство, снабженное транзитивным действием группы Ли $\overline{G}$, и L — вложенное подмногообразие в M. Будем предполагать, что действие $\overline{G}$ на M локально эффективно, и отождествлять алгебру Ли $\bar{\mathfrak{g}}$ группы Ли $\overline{G}$ с некоторой подалгеброй алгебры Ли векторных полей на M.

Определение. *Алгеброй симметрий подмногообразия* L называется подалгебра $\mathrm{sym}(L)$ алгебры $\bar{\mathfrak{g}}$, определенная следующим соотношением:

$$\mathrm{sym}(L) = \{X \in \bar{\mathfrak{g}} \mid X_p \in T_pL \text{ для всех } p \in L\}.$$

Пусть L — замкнутое локально-однородное подмногообразие в M. Тогда группа симметрий $\mathrm{Sym}(L) = \{g \in \overline{G} \mid g.L = L\}$ является подгруппой Ли группы $\overline{G}$, и $\mathrm{sym}(L)$ совпадает с соответствующей подалгеброй алгебры $\bar{\mathfrak{g}}$. Более того, L является однородным тогда и только тогда, когда $\mathrm{Sym}(L)$ действует транзитивно на L. Но в общем случае это неверно. Например, если $\overline{G}$ — группа всех параллельных переносов на прямой и L — открытый интервал, то $\mathrm{sym}(L) = \bar{\mathfrak{g}}$, но $\mathrm{Sym}(L)$ тривиальна.

Пусть $\mathfrak{h}$ — произвольная подалгебра в $\bar{\mathfrak{g}}$, и H — соответствующая связная виртуальная подгруппа группы $\overline{G}$. Тогда орбиты H могут быть рассмотрены как вложенные подмногообразия в M. Говорят, что L является орбитой подалгебры $\mathfrak{h}$, проходящей через точку $p \in M$, если L — связное открытое подмногообразие (во внутренней топологии) орбиты H, примененной к точке p, и $p \in L$. Разумеется, орбита $\mathfrak{h}$ через точку $p \in M$ определяется не однозначно, но любые две орбиты совпадают в некоторой окрестности точки p.

Таким образом, чтобы найти соответствующее однородное подмногообразие L, нужно найти для $\mathfrak{h}$ связную виртуальную подгруппу H группы $\overline{G}$ и ее орбиту, проходящую через фиксированную точку. Рассмотрим пример построения подмногообразия по его алгебре симметрий.

Пример. Пусть $\bar{\mathfrak{g}} = \mathfrak{sl}(5,\mathbb{R})$, $\mathbf{M} = \mathbb{R}\mathrm{P}^4$ и

$$\mathfrak{h} = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 & z & 0 & x \\ z & t & x/2 & 0 & y \\ 0 & 0 & -t & 0 & z \\ 0 & z & y & 2t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2t \end{smallmatrix} \right) \middle| \ x, y, z, t \in \mathbb{R} \right\}$$

— алгебра симметрий некоторого подмногообразия, проходящего через точку $o \in \mathbb{R}\mathrm{P}^4$, записываемую в проективных координатах как $o = [0:0:0:0:1]$. Найдем уравнение, задающее это подмногообразие. Проективное преобразование

$$(x_1 : x_2 : x_3 : x_4 : x_5) \mapsto (x_4 : x_2 : x_1 : x_3 : x_5)$$

приводит подалгебру к верхнетреугольному виду и оставляет на месте точку o. Виртуальная подгруппа $H \subset SL(5,\mathbb{R})$ порождается матрицами вида $\exp(X)$, где $X \in \mathfrak{h}$ (см. [9]). Нетрудно проверить, что в данном случае

$$H = \left\{ \exp \left(\begin{smallmatrix} 2t & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2t \end{smallmatrix} \right) \exp \left(\begin{smallmatrix} 0 & z & 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & z & x/2 & y \\ 0 & 0 & 0 & z & x \\ 0 & 0 & 0 & 0 & z \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{smallmatrix} \right) \middle| \ x, y, z, t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Тогда

$$H.o = \left\{ \left[(zy + 1/4xz^2 + 1/24z^4)e^{4t} : (y + 3/4zx + 1/6z^3)e^{3t} : (x + z^2/2)e^{2t} : ze^t : 1 \right] \right\}.$$

Таким образом, параметрически в аффинных координатах искомая поверхность записывается в виде

$$\begin{cases} x_1 = (zy + 1/4xz^2 + 1/24z^4)e^{4t}, \\ x_2 = (y + 3/4zx + 1/6z^3)e^{3t}, \\ x_3 = (x + z^2/2)e^{2t}, \\ x_4 = ze^t. \end{cases}$$

Выражая из трех последних уравнений системы переменные x, y, z и подставляя их в первое уравнение, получаем

$$x_1 = x_2x_4 - 1/2x_3x_4^2 + 1/8x_4^4$$

или, в исходных координатах,

$$x_4 = x_2x_3 - 1/2x_1x_3^2 + 1/8x_3^4.$$

Проективное преобразование $(x_1, x_2, x_3, x_4) \mapsto (-4x_1, 8x_2, x_3, 8x_4)$ приводит поверхность к более простому виду

$$x_4 = x_2x_3 + x_1x_3^2 + x_3^4.$$

Пусть L — орбита подалгебры $\mathfrak{h}$. Тогда $\mathfrak{h} \subset \mathrm{sym}(L)$. Легко видеть, что L локально-однородно. Но, вообще говоря, $\mathrm{sym}(L)$ больше, чем $\mathfrak{h}$. В [5] приведен критерий того, что $\mathfrak{h} = \mathrm{sym}(L)$. А именно, пусть a — фиксированная точка на M и L — орбита $\mathfrak{h}$ через точку a. Определим подалгебру $\mathfrak{g} \subset \bar{\mathfrak{g}}$ и построим цепочку подалгебр $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \supset \mathfrak{g}_1 \supset \cdots$ следующим образом: $\mathfrak{g} = \{X \in \bar{\mathfrak{g}} \mid X_a = 0\}$, $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}_{n+1} = \{x \in \mathfrak{g}_n \mid [x, \mathfrak{h}] \supset \mathfrak{g}_n + \mathfrak{h}\}$, $\mathfrak{g}_\infty = \bigcap_{n=0}^{\infty} \mathfrak{g}_n$. Тогда $\mathrm{sym}(L) = \mathfrak{g}_\infty + \mathfrak{h}$ и подалгебра $\mathrm{sym}(L)$ является наибольшей из подалгебр $\mathfrak{a}$ таких, что $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{a} \subset \mathfrak{g}+\mathfrak{h}$. Отсюда следует, что подалгебра $\mathfrak{h} \subset \bar{\mathfrak{g}}$ является алгеброй симметрий некоторого однородного подмногообразия L, содержащего a, тогда и только тогда, когда либо $\mathfrak{g}_\infty \subset \mathfrak{h}$, либо каждая подалгебра в $\bar{\mathfrak{g}}$, содержащая $\mathfrak{h}$ и содержащаяся в $\mathfrak{g} + \mathfrak{h}$, совпадает с $\mathfrak{h}$ (эти условия эквивалентны).

Будем полагать, что две подалгебры алгебры $\bar{\mathfrak{g}}$ эквивалентны, если они могут быть преобразованы друг в друга с помощью элементов группы $\mathrm{Aut}(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$.

Пусть $V_n = (\mathfrak{h} + \mathfrak{g}_n)/\mathfrak{g}_n \subset \bar{\mathfrak{g}}/\mathfrak{g}_n$ для всех $n \geq 0$, $V_\infty = (\mathfrak{h} + \mathfrak{g}_\infty)/\mathfrak{g}_\infty \subset \bar{\mathfrak{g}}/\mathfrak{g}_\infty$; а $\pi_n : \bar{\mathfrak{g}} \to \bar{\mathfrak{g}}/\mathfrak{g}_n$ и $\tau_n : \bar{\mathfrak{g}}/\mathfrak{g}_{n+1} \to \bar{\mathfrak{g}}/\mathfrak{g}_n$ — естественные проекции при всех $n \geq 0$. Для данного подпространства $V_n \subset \bar{\mathfrak{g}}/\mathfrak{g}_n$ обозначим через G_{n+1} подгруппу в $\mathrm{Aut}(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$, состоящую из всех автоморфизмов, которые сохраняют подалгебру $\mathfrak{g}_n$ и при индуцировании на $\bar{\mathfrak{g}}/\mathfrak{g}_n$ сохраняют подпространство V_n.

Алгоритм описания всех алгебр симметрий однородных подмногообразий в M (см. [5]).

1. Опишем все подпространства V_0 в $\bar{\mathfrak{g}}/\mathfrak{g}$ (с точностью до преобразований, индуцированных элементами группы $\mathrm{Aut}(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$).

2. Для каждого подпространства V_n, найденного на предыдущем шаге, найдем подалгебру $\mathfrak{g}_{n+1}$, подгруппу G_{n+1}, и подпространство $W = \tau_n^{-1}(V_n)$ в $\bar{\mathfrak{g}}/\mathfrak{g}_{n+1}$. Если $\mathfrak{g}_{n+1} \neq \mathfrak{g}_n$, то опишем (с точностью до G_{n+1}) все подпространства V_{n+1} в W, для которых выполнены условия:

V_{n+1} является дополнительным к $\ker \tau_n = \mathfrak{g}_n/\mathfrak{g}_{n+1}$;
V_{n+1} удовлетворяет *условию* (**CS**): для любых двух элементов $x + \mathfrak{g}_n, y + \mathfrak{g}_n \in V_n$ элемент $[x, y] + \mathfrak{g}_{n-1}$ принадлежит подпространству V_{n-1}.

Затем повторяем этот шаг снова.

3. Если $\mathfrak{g}_n = \mathfrak{g}_{n+1}$, найдем $\mathfrak{h} = \pi_n^{-1}(V_n)$ в $\bar{\mathfrak{g}}$. Если $\mathfrak{h}$ является подалгеброй, то $\mathfrak{h}$ является алгеброй симметрий некоторого однородного подмногообразия. Более того, таким образом могут быть получены все алгебры симметрий.

3. Поверхности в проективной геометрии

Применяя алгоритм к случаю $\bar{\mathfrak{g}} = \mathfrak{sl}(5, \mathbb{R})$, $\mathbf{M} = \mathbb{R}\mathrm{P}^4$, получим классификацию.

Теорема 1. *Всякое трехмерное локально-однородное подмногообразие в $\mathbb{R}\mathrm{P}^4$, алгебра симметрий которого имеет размерность ≥ 4, либо является открытым подмножеством цилиндра или квадрики, либо эквивалентно открытому подмножеству одного из следующих подмногообразий:*

(1) $x_4 = x_1x_3^2 + x_2x_3$;
(2) $x_4 = x_1x_3^2 + x_2x_3 + x_3^4$;
(3) $x_4 = x_1^2x_3 + x_2x_3$;
(4) $x_4 = x_1^2 + x_2x_3 + x_3^3$;
(5) $x_4 = x_1^2 + x_1x_3^2 + x_2x_3 + ax_3^4$;
(6) $x_2^2 + x_1x_3^2 + x_1x_4 = 0$, $x_1 > 0 \vee x_1 < 0$;
(7) $x_4(1 + x_1^2) = x_1(x_2^2 - x_3^2) + 2x_2x_3$;
(8) $x_1 + x_3x_4 \pm x_2^2 + x_4^a = 0$, $a \sim 2 - a$, $a \neq -1, 0, 1, 2, 3$;
(9) $x_1 + x_3x_4 \pm x_2^2 + (1 + x_4^2)e^{a \operatorname{arctg} x_4} = 0$, $a \sim -a$, $a \neq 0$;
(10) $x_1 + x_3x_4 + x_2^2 + x_4 \ln x_4 = 0$;
(11) $x_1 + x_3x_4 + x_2^2 + (1 + x_4^2) \operatorname{arctg} x_4 = 0$;
(12) $x_1 + x_3x_4 + x_2^2 \pm \ln x_4 = 0$;
(13) $x_1 + x_3x_4 + x_2^2 \pm e^{x_4} = 0$;
(14) $x_2^2 + x_1x_3 = x_4^a$, $a \sim 2 - a$, $a \neq 0, 1, 2$;
(15) $x_2^2 + x_1x_3 = (1 + x_4^2)e^{a \operatorname{arctg} x_4}$, $a \sim -a$, $a \neq 0$;
(16) $x_2^2 + x_1x_3 = e^{x_4}$;
(17) $x_2 + x_1x_3 + \ln x_4 = 0$;
(18) $x_2 + x_1x_3 + e^{x_4} = 0$;
(19) $x_2 + x_1x_3 + x_4 \ln x_4 = 0$;
(20) $x_2 + x_1x_3 + x_4^a = 0$, $a \neq 0, 1, 2$;
(21) $\pm(x_1^2 + x_2^2) + x_3^2 = x_4^a$, $a \sim 2 - a$, $a \neq 0, 1, 2$;
(22) $\pm(x_1^2 + x_2^2) + x_3^2 = (1 + x_4^2)e^{a \operatorname{arctg} x_4}$, $a \sim -a$, $a \neq 0$;
(23) $\pm(x_1^2 + x_2^2) + x_3^2 = e^{x_4}$;
(24) $x_3x_4 = \pm(x_1^2 + x_2^2) + x_4^a$, $a \neq 0, 1, 2$;
(25) $x_3x_4 = \pm(x_1^2 + x_2^2) + x_4^2 \ln x_4$;
(26) $x_3 = \pm(x_1^2 + x_2^2) + e^{x_4}$;
(27) $x_3 = \pm(x_1^2 + x_2^2) + x_4 \ln x_4$.

Замечание 1. В случае (6) поверхность имеет две связные компоненты, определяемые условиями $x_1 > 0$ и $x_1 < 0$, которые, как следует из доказательства, не являются проективно эквивалентными. В дальнейшем будем обозначать эти связные компоненты через $(6, +)$ и $(6, -)$ соответственно.

Доказательство. Зафиксируем подпространство $W \subset \mathbb{R}^5$ вида

$$W = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ x \end{smallmatrix} \right) \middle| \; x \in \mathbb{R} \right\},$$

которое будем также рассматривать и как точку $o \in \mathbb{R}\mathrm{P}^4$, записываемую в проективных координатах, $o = [0 : 0 : 0 : 0 : 1]$. Тогда $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_W$ — алгебра стабилизатора подпространства W. Данная подалгебра находится из формулы $\mathfrak{g} = \{X \in \bar{\mathfrak{g}} \,|\, X.W \subset W\}$ и имеет вид

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} A & 0 \\ {}^tB & c \end{smallmatrix} \right) \middle| \; A \in \mathfrak{gl}(4, \mathbb{R}), \; B \in \mathbb{R}^4, \; c \in \mathbb{R}, \; \operatorname{tr} A + c = 0 \right\}.$$

Нас интересуют только алгебры симметрий с размерностью ≥ 4, поэтому мы не будем рассматривать случай, когда $\mathfrak{g}_n$ становится тривиальной.

Опишем группу $\mathrm{Aut}(\overline{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$. Для этого рассмотрим группу

$$\mathrm{Aut}(\overline{\mathfrak{g}}, W) = \{a_g,\ g \in GL(5, \mathbb{R}) \mid g.W = W\},$$

где, как обычно, $a_g \in \mathrm{Aut}(\overline{\mathfrak{g}})$ — сопряжение элементом g, т. е. $a_g : A \mapsto gAg^{-1}$. Докажем, что

$$\mathrm{Aut}(\overline{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g}) = \mathrm{Aut}(\overline{\mathfrak{g}}, W).$$

Как известно, $\mathrm{Aut}(\overline{\mathfrak{g}})$ имеет две связные компоненты. Связная компонента единицы группы $\mathrm{Aut}(\overline{\mathfrak{g}})$ имеет вид

$$\mathrm{Aut}^\circ(\overline{\mathfrak{g}}) = \{a_g \mid g \in GL(5, \mathbb{R})\},$$

а вторая компонента состоит из автоморфизмов вида $a_g \circ \phi$, где $\phi : X \mapsto -{}^tX$. Легко видеть, что $a_g \in \mathrm{Aut}(\overline{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ тогда и только тогда, когда g сохраняет подпространство W.

С другой стороны, пусть некоторый элемент $a_g \circ \phi$ сохраняет подалгебру $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_W$. Тогда $\phi(\mathfrak{g}_W) = \mathfrak{g}_{g^{-1}.W}$, т. е. $\phi(\mathfrak{g})$ есть стабилизатор некоторого одномерного подпространства в $\mathbb{R}^5$. С другой стороны, заметим, что множество

$$\phi(\mathfrak{g}) = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} A & B \\ 0 & c \end{smallmatrix}\right) \mid A \in \mathfrak{gl}(4, \mathbb{R}),\ B \in \mathbb{R}^4,\ c \in \mathbb{R},\ \mathrm{tr}\, A + c = 0 \right\}$$

не сохраняет никакое одномерное подпространство. Следовательно, ни один элемент из второй компоненты не принадлежит $\mathrm{Aut}(\overline{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$.

Фактически доказан более общий факт. Как известно, любые два одномерных подпространства в $\mathbb{R}^5$ эквивалентны с точностью до $GL(5, \mathbb{R})$ и, следовательно, их стабилизаторы сопряжены. Следовательно, $\mathrm{Aut}(\overline{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g}_W) = \mathrm{Aut}(\overline{\mathfrak{g}}, W)$ для любого одномерного подпространства W.

Для удобства будем отождествлять факторпространства $\overline{\mathfrak{g}}/\mathfrak{g}_n$ с некоторыми подпространствами $U_i \subset \overline{\mathfrak{g}}$, дополнительными к $\mathfrak{g}_n$, выбирая их так, чтобы $U_1 \subset U_2 \subset U_3 \subset \ldots$ Например, выберем

$$U_1 = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} 0 & A \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) \mid A \in \mathbb{R}^4 \right\}.$$

Чтобы исключить гомотетии, отождествим группу $\mathrm{Aut}(\overline{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ с подгруппой в $SL(5, \mathbb{R})$. Действие этой подгруппы на $\overline{\mathfrak{g}}/\mathfrak{g}$ задает следующее отношение эквивалентности: $A \sim XA$, $X \in GL(4, \mathbb{R})$. Отсюда следует, что любые два трехмерных подпространства в $\overline{\mathfrak{g}}/\mathfrak{g}$ эквивалентны, и

$$V_1 = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} 0&0&0&0&x \\ 0&0&0&0&y \\ 0&0&0&0&z \\ 0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0 \end{smallmatrix}\right) \;\middle|\; x, y, z \in \mathbb{R} \right\}.$$

Имеем

$$\mathfrak{g}_2 = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} A & B & 0 \\ 0 & c & 0 \\ {}^tD & f & g \end{smallmatrix}\right) \;\middle|\; A \in \mathfrak{gl}(3, \mathbb{R}),\ B, D \in \mathbb{R}^3,\ c, f, g \in \mathbb{R},\ \mathrm{tr}\, A + c + g = 0 \right\}.$$

Все возможные подпространства V_2 можно описать как

$$V_2 = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 & x \\ 0 & 0 & y \\ 0 & 0 & z \\ (x y z)P & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) \;\middle|\; x, y, z \in \mathbb{R} \right\},$$

где P — некоторая матрица 3×3. Тогда из условия **CS** следует, что матрица P симметричная, и группа G_2 порождает отношение эквивалентности $P \sim \lambda X P {}^tX$, $X \in GL(3, \mathbb{R})$, $\det X = \lambda$. Следовательно, с точностью до эквивалентности имеем следующие случаи: 0. $P = 0$; 1. $P = \left(\begin{smallmatrix} 1&0&0 \\ 0&0&0 \\ 0&0&0 \end{smallmatrix}\right)$; 2. $P = \left(\begin{smallmatrix} 1&0&0 \\ 0&1&0 \\ 0&0&0 \end{smallmatrix}\right)$; 3. $P = \left(\begin{smallmatrix} 0&1&0 \\ 1&0&0 \\ 0&0&0 \end{smallmatrix}\right)$; 4. $P = \left(\begin{smallmatrix} 1&0&0 \\ 0&1&0 \\ 0&0&1 \end{smallmatrix}\right)$; 5. $P = \left(\begin{smallmatrix} 0&0&1 \\ 0&1&0 \\ 1&0&0 \end{smallmatrix}\right)$.

3.1. Цилиндры, квадрики. В случае 0 получаем, что $\mathfrak{g}_3 = \mathfrak{g}_2$. Здесь согласно алгоритму соответствующим однородным подмногообразием является гиперплоскость. Это можно определить по алгебре симметрий, по которой можно также определить, является ли соответствующая поверхность цилиндром или квадрикой.

Пусть $\mathfrak{h}$ — алгебра симметрий поверхности, проходящей через точку o (в дальнейшем мы иногда будем записывать это как пару $(\mathfrak{h}, W)$, где W — соответствующее подпространство в $\mathbb{R}^5$). Пусть, далее, $U \subset \mathbb{R}^5$ — $\mathfrak{h}$-инвариантное подпространство. Тогда можно рассмотреть подпространство $\widetilde{V} = \mathbb{R}^5/U$ и подпространство $\widetilde{W}$, являющееся образом W при отображении $\mathbb{R}^5 \to \widetilde{V}$, а также подалгебру $\widetilde{\mathfrak{h}} \subset \mathfrak{gl}(\widetilde{V})$, получаемую при индуцировании действия $\mathfrak{h}$ на $\widetilde{V}$.

Поверхность, соответствующая паре $(\mathfrak{h}, W)$, является *цилиндром* тогда и только тогда, когда либо существует четырехмерное $\mathfrak{h}$-инвариантное подпространство, содержащее W, либо существует $\mathfrak{h}$-инвариантное подпространство $\{0\} \neq U \subset \mathbb{R}^5$ такое, что пара $(\widetilde{\mathfrak{h}}, \widetilde{W})$ определяет подмногообразие в $\mathbb{P}(\widetilde{V})$.

Действительно, предположим, что орбита L подалгебры $\mathfrak{h}$, проходящая через W, является цилиндром. Если L — гиперплоскость, то пара $(\mathfrak{h}, W)$ удовлетворяет первому условию. В противном случае соответствующая подгруппа H содержит переносы вдоль некоторого подпространства U, размерность которого в сумме с размерностью основания цилиндра даст размерность всей орбиты. Поскольку цилиндр не является гиперплоскостью, это подпространство однозначно определено и, следовательно, является $\mathfrak{h}$-инвариантным. Тогда, переходя к факторпространству, получаем пару $(\widetilde{\mathfrak{h}}, \widetilde{W})$, определяющую подмногообразие в проективном пространстве меньшей размерности — основание цилиндра. Для пары $(\mathfrak{h}, W)$, удовлетворяющей приведенным условиям, орбитой действительно является цилиндр.

Аналогично, поверхность, соответствующая паре $(\mathfrak{h}, W)$, является *квадрикой* тогда и только тогда, когда существует такая невырожденная симметрическая билинейная форма θ, изотропная на W (т. е. $\theta(w, w) = 0$ для всех $w \in W$), что подалгебра $\mathfrak{h}$ ее сохраняет.

Действительно, предположим, что орбита подалгебры $\mathfrak{h}$, проходящая через W, является квадрикой. Тогда $\mathfrak{h}$ может быть вложена в алгебры симметрий, соответствующие квадрикам (подалгебры $\mathfrak{so}(4,1)$ и $\mathfrak{so}(3,2)$). Однако для каждой из этих подалгебр существует невырожденная симметрическая билинейная форма θ', удовлетворяющая приведенным условиям. Зная θ', можем легко построить форму θ для пары $(\mathfrak{h}, W)$. Предположим, что пара $(\mathfrak{h}, W)$ такая, что существует невырожденная симметрическая билинейная форма θ, удовлетворяющая приведенным условиям. Тогда подгруппа $H \subset GL(5, \mathbb{R})$, соответствующая подалгебре $\mathfrak{h}$, также сохраняет форму θ, другими словами ${}^tX\theta X = \theta$ для всех $X \in H$. Выберем подпространство $U = X.W$ в орбите W, с учетом условия изотропности получаем ${}^tU\theta U = {}^tW\,{}^tX\theta XW = {}^tW\theta W = 0$. Следовательно, $H.W$ — квадрика.

3.2. Первый случай. Все возможные подпространства V_3 имеют вид

$$V_3 = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & x \\ 0 & 0 & 0 & 0 & y \\ *_1 & *_2 & *_3 & 0 & z \\ 0 & 0 & z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -*_3 \end{smallmatrix} \right) \middle| \; x, y, z \in \mathbb{R} \right\},$$

где $*_i = a_i x + b_i y + c_i z$, a_i, b_i, c_i — некоторые действительные числа. Из условия **CS** получаем $*_1 = \alpha z$, $*_2 = \beta z$, $*_3 = \alpha/3x + \beta/3y + \gamma z$. С точностью до группы G_3 можем полагать, что $\alpha = \beta = \gamma = 0$.

Дальнейшие вычисления показывают, что соответствующие однородные подмногообразия являются цилиндрами.

3.3. Второй случай. Все возможные подпространства V_3 имеют вид

$$V_3 = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & x \\ *_2 & *_3 & *_5 & 0 & y \\ *_4 & *_5 & *_1 & 0 & z \\ 0 & y & z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -*_1-*_3 \end{smallmatrix} \right) \middle| \; x, y, z \in \mathbb{R} \right\}.$$

Из условия **CS** получаем $*_1 = (\varkappa_2 - 3\pi_3)x + \varkappa_1 y + (-3\sigma_3 + 2\varkappa_5)z$, $*_2 = \varkappa_2 y + \sigma_2 z$, $*_3 = \pi_3 x + (2\sigma_5 - 3\varkappa_1)y + \sigma_3 z$, $*_4 = \sigma_2 y + (3\varkappa_2 - 8\pi_3)z$, $*_5 = \sigma_2/2x + \varkappa_5 y + \sigma_5 z$. С точностью до группы G_3 можем рассмотреть случаи, соответствующие неэквивалентным подпространствам V_3,

2.1 $\varkappa_1 = \varkappa_2 = \sigma_2 = \pi_3 = \sigma_3 = \varkappa_5 = \sigma_5 = 0$;
2.2 $\varkappa_1 = 1$, $\varkappa_2 = \sigma_2 = \pi_3 = \sigma_3 = \varkappa_5 = \sigma_5 = 0$;
2.3 $\varkappa_1 = \varkappa_2 = 0$, $\sigma_2 = 1$, $\pi_3 = \sigma_3 = \varkappa_5 = \sigma_5 = 0$.

В случаях 2.1 и 2.2 соответствующими однородными подмногообразиями являются цилиндры. Рассмотрим случай 2.3. Все возможные подпространства V_4 имеют вид

$$V_4 = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} 0 & *_2 & *_5 & 0 & x \\ z & 0 & x/2+*_3 & 0 & y \\ y & x/2-*_3 & 0 & 0 & z \\ 0 & y & z & *_7 & 0 \\ *_1 & *_4 & *_6 & 0 & -*_7 \end{smallmatrix} \right) \middle| \; x, y, z \in \mathbb{R} \right\}.$$

Из условия **CS** и условия $\mathfrak{g}_5 \neq \{0\}$ следует $*_1 = 0$, $*_2 = 0$, $*_3 = 0$ (с точностью до группы G_4). Таким образом,

$$V_5 = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 & 0 & *_3 & x \\ z & 0 & x/2 & *_1 & y \\ y & x/2 & 0 & *_2 & z \\ 0 & y & z & 0 & 0 \\ x & *_1 & *_2 & *_4 & 0 \end{smallmatrix} \right) \middle| \; x, y, z \in \mathbb{R} \right\}.$$

Из условия **CS** и условия $\mathfrak{g}_6 \neq \{0\}$ следует $*_1 = *_2 = *_3 = *_4 = 0$.

Тогда $\mathfrak{g}_6 = \mathfrak{g}_5$. Здесь алгоритм прерывается, и соответствующей алгеброй симметрий является

$$\mathfrak{h} = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} -4t & 0 & 0 & 0 & x \\ z & t & x/2 & 0 & y \\ y & x/2 & t & 0 & z \\ 0 & y & z & 6t & 0 \\ x & 0 & 0 & 0 & -4t \end{smallmatrix} \right) \middle| \; x, y, z, t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Это алгебра симметрий подмногообразия $(6, +)$.

3.4. Третий случай. В этом случае все возможные подпространства V_3 имеют вид

$$V_3 = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} *_1 & 0 & 0 & 0 & x \\ *_2 & 0 & *_4 & 0 & y \\ *_3 & *_5 & 0 & 0 & z \\ 0 & z & y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -*_1 \end{smallmatrix} \right) \middle| \; x, y, z \in \mathbb{R} \right\}.$$

Из условия **CS** получаем $*_1 = \alpha x + 2\varkappa y + 2\sigma z$, $*_2 = \alpha y + \beta z$, $*_3 = \gamma y + \alpha z$, $*_4 = \beta/2x + \sigma y + dz$, $*_5 = \gamma/2x + gy + \varkappa z$. С точностью до группы G_3 можем полагать $\varkappa = \sigma = \alpha = 0$. Приведем случаи, соответствующие неэквивалентным пространствам V_3,

3.1 $\beta = \gamma = g = d = 0$;
3.2 $\beta = \gamma = g = 0$, $d = 1$;
3.3 $\beta = 1$, $\gamma = g = d = 0$;
3.4 $\beta = 1$, $\gamma = \pm 1$, $g = d = 0$;
3.5 $\beta = \gamma = 0$, $g = d = 1$;
3.6 $\beta = 1$, $\gamma = d = 0$, $g = 1$.

В случаях 3.1, 3.2 и 3.5 однородными подмногообразиями с найденными по алгоритму алгебрами симметрий являются цилиндры.

В случае 3.6 нет подалгебр требуемого типа.

Рассмотрим случай 3.4. Имеем

$$V_4 = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} 0 & *_4 & *_5 & 0 & x \\ z & *_6 & x/2 & 0 & y \\ \pm y & \pm x/2 & -*_6 & 0 & z \\ 0 & z & y & *_7 & 0 \\ *_1 & *_2 & *_3 & 0 & -*_7 \end{smallmatrix} \right) \middle| \; x, y, z \in \mathbb{R} \right\}.$$

Из условия **CS** и $\mathfrak{g}_5 \neq \{0\}$ следует (с точностью до группы G_4), что $*_1 = \pm x$, $*_6 = *_7 = *_2 = *_3 = *_4 = *_5 = 0$. Таким образом,

$$V_5 = \left\{ \left. \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & *_3 & x \\ z & 0 & x/2 & *_2 & y \\ \pm y & \pm x/2 & 0 & *_1 & z \\ 0 & z & y & 0 & 0 \\ \pm x & *_1 & *_2 & *_4 & 0 \end{pmatrix} \right| x, y, z \in \mathbb{R} \right\}.$$

Тогда из условия **CS** и $\mathfrak{g}_6 \neq \{0\}$ следует, что $*_1 = *_2 = *_3 = *_4 = 0$ и $\mathfrak{g}_6 = \mathfrak{g}_5$. Здесь алгоритм прерывается, и соответствующими алгебрами симметрий являются алгебры симметрий подмногообразий $(6, -)$ и (7).

Рассмотрим случай 3.3. При этом

$$V_4 = \left\{ \left. \begin{pmatrix} 0 & *_2 & *_3 & 0 & x \\ z & 0 & 1/2x & 0 & y \\ 0 & 0 & 0 & 0 & z \\ 0 & z & y & *_5 & 0 \\ *_1 & *_4 & 0 & 0 & -*_5 \end{pmatrix} \right| x, y, z \in \mathbb{R} \right\}.$$

Из условия **CS** следует, что $*_1 = \alpha z$, $*_2 = \alpha x + \beta y + \gamma z$, $*_3 = \pi/3x + \gamma/3y + \delta z$, $*_4 = \beta/2z$, $*_5 = \alpha y + \pi z$. С точностью до группы G_4 можем полагать, что $\alpha = \beta = \gamma = \pi = 0$, $\delta = 0$ или $\delta = 1$.

При $\delta = 0$ получаем алгебру симметрий подмногообразия (1).

При $\delta = 1$ получаем алгебру симметрий подмногообразия (2).

3.5. Четвертый случай. Все возможные подпространства V_3 имеют вид

$$V_3 = \left\{ \left. \begin{pmatrix} *_6 & *_4 & *_1 & 0 & x \\ *_5 & *_2 & *_4 & 0 & y \\ *_3 & *_5 & *_6 & 0 & z \\ z & y & x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -*_2-2*_6 \end{pmatrix} \right| x, y, z \in \mathbb{R} \right\}.$$

Из условия **CS** получаем $*_1 = (2\varkappa_4 - 5/2\sigma_2)x + \varkappa_1 y + \sigma_1 z$, $*_2 = (2\sigma_3 - 4\pi_6)x + (2\sigma_5 - 4\varkappa_6)y + \sigma_2 z$, $*_3 = \pi_3 x + \varkappa_3 y + \sigma_3 z$, $*_4 = \sigma_5 x + \varkappa_4 y + \varkappa_1 z$, $*_5 = \varkappa_3 x + (3\sigma_3 - 5\pi_6)y + \sigma_5 z$, $*_6 = \pi_6 x + \varkappa_6 y + (\varkappa_4 - 3/2\sigma_2)z$. С точностью до действия G_3 получаем следующие неэквивалентные случаи:

4.1 $\varkappa_1 = \sigma_1 = \sigma_2 = \pi_3 = \sigma_3 = \varkappa_3 = \varkappa_4 = \sigma_5 = \pi_6 = \varkappa_6 = 0$;

4.2 $\varkappa_1 = 1$, $\sigma_1 = \sigma_2 = \pi_3 = \sigma_3 = \varkappa_3 = \varkappa_4 = \sigma_5 = \pi_6 = \varkappa_6 = 0$;

4.3 $\varkappa_1 = 0$, $\sigma_1 = 1$, $\sigma_2 = \pi_3 = \sigma_3 = \varkappa_3 = \varkappa_4 = \sigma_5 = \pi_6 = \varkappa_6 = 0$;

4.4 $\varkappa_1 = \sigma_1 = 0$, $\sigma_2 = 1$, $\pi_3 = \sigma_3 = \varkappa_3 = \varkappa_4 = \sigma_5 = \pi_6 = \varkappa_6 = 0$;

4.5 $\varkappa_1 = \sigma_1 = \sigma_2 = \pi_3 = \sigma_3 = \varkappa_3 = \varkappa_4 = \sigma_5 = \pi_6 = 0$, $\varkappa_6 = 1$;

4.6 $\varkappa_1 = 0$, $\sigma_1 = 5$, $\sigma_2 = 2$, $\pi_3 = -5$, $\sigma_3 = -1$, $\varkappa_3 = 0$, $\varkappa_4 = 3$, $\sigma_5 = \pi_6 = \varkappa_6 = 0$.

В остальных случаях $\mathfrak{g}_5 = \{0\}$ и, следовательно, нет подалгебр требуемого типа.

В случае 4.1 соответствующим подмногообразием является квадрика $x_4 = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2$.

В случае 4.5 вычисления показывают, что $\mathfrak{g}_6 = \mathfrak{g}_5$. Здесь алгоритм прерывается, и соответствующей алгеброй симметрий является

$$\mathfrak{h} = \left\{ \left. \begin{pmatrix} t+y & 0 & 0 & \alpha x & x \\ 0 & -4y & 0 & -\alpha y & y \\ 0 & 0 & y-t & \alpha z & z \\ z & y & x & \beta y & 0 \\ \alpha z & -\alpha y & \alpha x & 0 & (2-\beta)y \end{pmatrix} \right| x, y, z, t \in \mathbb{R} \right\}$$

(она является подалгеброй только при $\beta = 1$ или $\alpha = 0$).

При различных значениях параметров $\mathfrak{h}$ является алгеброй симметрий различных однородных подмногообразий

$\beta = 1$, $\alpha \neq 0$, $\alpha < 25/8$: поверхность (14);

$\beta = 1$, $\alpha > 25/8$: поверхность (15);

$\beta = 1$, $\alpha = 25/8$: поверхность (16);

$\beta = 1$, $\alpha = 0$: поверхность (17);

$\beta = 6$, $\alpha = 0$: поверхность (18);

$\beta = -4$, $\alpha = 0$: поверхность (19);

$\beta \neq 1, -4, 6$, $\alpha = 0$: поверхность (20).

В случае 4.6 вычисления показывают, что $\mathfrak{g}_6 = \mathfrak{g}_5$. Полученная алгебра в зависимости от значений параметров является алгеброй симметрий подмногообразий $(21, +, a > 2)$, $(21, -, 1 < a < 2)$, $(22, +)$, $(23, +)$, $(24, -, a > 2)$, $(24, -, a < 1)$, $(24, +, 1 < a < 2)$, $(25, -)$, $(26, -)$, $(27, -)$ (см. также аналогичный случай 5.2).

В случае 4.4 получаем подмногообразие (3).

Рассмотрим случай 4.3. Тогда

$$V_4 = \left\{ \left. \begin{pmatrix} 0 & 0 & z & 0 & x \\ *_{11} & 0 & 0 & 0 & y \\ 0 & -*_{11} & 0 & 0 & z \\ z & y & x & *_{10} & 0 \\ *_7 & *_8 & *_9 & 0 & -*_{10} \end{pmatrix} \right| x, y, z \in \mathbb{R} \right\}.$$

Из условия **CS** следует, что $*_{11} = -\beta/2y + \gamma z$, $*_{10} = \beta x - \gamma y + \delta z$, $*_9 = \alpha x + \beta z$, $*_8 = \alpha y$, $*_7 = \alpha z$. С точностью до группы G_4 можем полагать, что $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 0$.

Таким образом, получаем

$$V_5 = \left\{ \left. \begin{pmatrix} 0 & 0 & z & *_4 & x \\ 0 & 0 & 0 & *_3 & y \\ 0 & 0 & 0 & *_2 & z \\ z & y & x & 0 & 0 \\ *_2 & *_3 & *_4 & *_1 & 0 \end{pmatrix} \right| x, y, z \in \mathbb{R} \right\}.$$

Тогда из условия **CS** и $\mathfrak{g}_6 \neq \{0\}$ следует $*_1 = *_2 = *_3 = 0$, $*_4 = \beta z$.

Если $\beta = 0$, то $\mathfrak{g}_6 = \mathfrak{g}_5$, и получаем подмногообразие (4).

Если $\beta \neq 0$, то, не ограничивая общности, можно считать $\beta = \pm 1$, и соответствующей алгеброй симметрий является

$$\mathfrak{h} = \left\{ \left. \begin{pmatrix} \alpha z & t & z & \pm z & x \\ 0 & 0 & -t & 0 & y \\ 0 & 0 & -\alpha z & 0 & z \\ z & y & x & 3\alpha z & 0 \\ 0 & 0 & \pm z & 0 & -3\alpha z \end{pmatrix} \right| x, y, z, t \in \mathbb{R} \right\}.$$

При различных значениях параметра подалгебра $\mathfrak{h}$ является алгеброй симметрий следующих однородных подмногообразий.

В случае $\beta = 1$

$\alpha \neq 0$, $\alpha \neq \pm 1/\sqrt{3}$: поверхность $(8, +)$;

$\alpha = \pm 1/\sqrt{3}$: поверхность (12);

$\alpha = 0$: поверхность (10).

В случае $\beta = -1$

$0 < |\alpha| < 1$: поверхность (9);

$|\alpha| > 1$: поверхность $(8, -)$;

$\alpha = \pm 1$: поверхность (13);

$\alpha = 0$: поверхность (11).

В случае 4.2 получаем подмногообразие (5).

3.6. Пятый случай. Все возможные подпространства V_3 имеют вид

$$V_3 = \left\{ \left. \begin{pmatrix} *_1 & *_4 & *_6 & 0 & x \\ *_4 & *_2 & *_5 & 0 & y \\ *_6 & *_5 & *_3 & 0 & z \\ x & y & z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -*_2 - *_1 - *_3 \end{pmatrix} \right| x, y, z \in \mathbb{R} \right\}.$$

Из условия **CS** следует $*_1 = \pi_1 x + \varkappa_1 y + \sigma_1 z$, $*_2 = \pi_2 x + \varkappa_2 y + \sigma_2 z$, $*_3 = \pi_3 x + \varkappa_3 y + \sigma_3 z$, $*_4 = \frac{3\varkappa_1 + \varkappa_2 + \varkappa_3}{2} x + \frac{3\pi_2 + \pi_1 + \pi_3}{2} y + \sigma_4 z$, $*_5 = \sigma_4 x + \frac{3\sigma_2 + \sigma_1 + \sigma_3}{2} y + \frac{3\varkappa_3 + \varkappa_1 + \varkappa_2}{2} z$, $*_6 = \frac{3\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{2} x + \sigma_4 y + \frac{3\pi_3 + \pi_1 + \pi_2}{2} z$.

С точностью до действия G_3 получаем неэквивалентные случаи

5.1 $\varkappa_1 = \pi_1 = \varkappa_2 = \pi_2 = \varkappa_3 = \pi_3 = \sigma_4 = \sigma_3 = \sigma_1 = \sigma_2 = 0$;

5.2 $\varkappa_1 = \pi_1 = \varkappa_2 = \pi_2 = \varkappa_3 = \pi_3 = \sigma_4 = \sigma_3 = 0$, $\sigma_1 = \sigma_2 = 1$.

В остальных случаях $\mathfrak{g}_5 = \{0\}$ и, следовательно, нет подалгебр требуемого типа.

В случае 5.1 искомым подмногообразием является квадрика $x_4 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$.

В случае 5.2 $\mathfrak{g}_6 = \mathfrak{g}_5$, и соответствующей алгеброй симметрий является

$$\mathfrak{h} = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} z & t & 2x & \alpha x & x \\ -t & z & 2y & \alpha y & y \\ 2x & 2y & 0 & (4+2\psi-\alpha)z & z \\ x & y & z & \psi z & 0 \\ \alpha x & \alpha y & (-\alpha-2\psi)z & (4\alpha-4)z & -2z-\psi z \end{smallmatrix} \right) \middle| \; x, y, z, t \in \mathbb{R} \right\}$$

(она является подалгеброй только при $\psi = -1$ или $\alpha = -2$). При различных значениях параметров подалгебра $\mathfrak{h}$ является алгеброй симметрий следующих однородных подмногообразий:

$\psi = -1$, $\alpha \neq -2$, $\alpha < 9/8$: поверхность $(21, -, a > 2)$, $(21, +, 1 < a < 2)$;
$\psi = -1$, $\alpha > 9/8$: поверхность $(22, -)$;
$\psi = -1$, $\alpha = 9/8$: поверхность $(23, -)$;
$\psi \neq -1, 4, -6$, $\alpha = -2$: — подмногообразий $(24, +, a > 2)$, $(24, +, a < 1)$, $(24, -, 1 < a < 2)$;
$\psi = -1$, $\alpha = -2$: поверхность $(25, +)$;
$\psi = 4$, $\alpha = -2$: поверхность $(26, +)$;
$\psi = -6$, $\alpha = -2$: поверхность $(27, +)$. $\square$

4. Поверхности в аффинной геометрии

Классифицируем теперь трехмерные однородные подмногообразия в четырехмерном аффинном пространстве, применяя классификационный алгоритм к случаю $\overline{\mathfrak{g}} = \mathfrak{aff}(4, \mathbb{R})$, $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(4)$, $M = \mathbb{R}^4$ и $\dim V_n = 3$ $(n \geq 0)$. Здесь под $\overline{\mathfrak{g}} = \mathfrak{aff}(4, \mathbb{R})$ будем понимать полупрямое произведение $\mathfrak{gl}(4, \mathbb{R}) \leftthreetimes \mathbb{R}^4$ и записывать элементы $\overline{\mathfrak{g}}$ в виде $A + B$, $A \in \mathfrak{gl}(4, \mathbb{R})$, $B \in \mathbb{R}^4$, исключая нулевые матрицы.

Классификация проводится аналогично приведенной выше классификации подмногообразий в проективной геометрии. Действительно, каждый элемент $X \in GL(4, \mathbb{R})$ порождает следующий автоморфизм $\phi_X \in \mathrm{Aut}(4, \mathbb{R})$:

$$\phi_X : A + B \mapsto XAX^{-1} + XB, \quad A \in \mathfrak{gl}(4, \mathbb{R}),\; B \in \mathbb{R}^4.$$

Более того, легко показать, что отображение $\phi : X \to \phi_X$ устанавливает изоморфизм между $GL(4, \mathbb{R})$ и $\mathrm{Aut}(\overline{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ и, следовательно, можно отождествлять подгруппы группы $\mathrm{Aut}(\overline{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ с соответствующими подгруппами в $GL(4, \mathbb{R})$.

Для удобства будем отождествлять факторпространства $\overline{\mathfrak{g}}/\mathfrak{g}_n$, $n \geq 0$, с некоторыми подпространствами $U_i \subset \overline{\mathfrak{g}}$, дополнительными к $\mathfrak{g}_n$, выбирая их так, чтобы $U_1 \subset U_2 \subset U_3 \subset \cdots$ Например, выберем U_1 равным $\mathbb{R}^4$. Тогда $\mathrm{Aut}(\overline{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ порождает группу линейных преобразований $\mathbb{R}^4$. Так как все трехмерные подпространства в $\overline{\mathfrak{g}}/\mathfrak{g} = \mathbb{R}^4$ эквивалентны, можем считать, что

$$V_1 = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \\ 0 \end{smallmatrix} \right) \middle| \; x, y, z \in \mathbb{R} \right\}.$$

Имеем

$$\mathfrak{g}_2 = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} A & B \\ 0 & c \end{smallmatrix} \right) \mid A \in \mathfrak{gl}(3, \mathbb{R}), B \in \mathbb{R}^3, c \in \mathbb{R} \right\}.$$

Все возможные подпространства V_2 можно описать следующим образом:

$$V_2 = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ {}^t(PA) & 0 \end{smallmatrix} \right) + \left(\begin{smallmatrix} A \\ 0 \end{smallmatrix} \right) \middle| \; A \in \mathbb{R}^3 \right\},$$

где P — некоторая матрица 3×3. Тогда из условия **CS** следует, что матрица P симметрическая, и группа G_1 порождает следующее отношение эквивалентности: $P \sim XP{}^tX$, $X \in GL(3, \mathbb{R})$. Следовательно, с точностью до эквивалентности имеем случаи 0. $P = 0$; 1. $P = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{smallmatrix} \right)$; 2. $P = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{smallmatrix} \right)$; 3. $P = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{smallmatrix} \right)$; 4. $P = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{smallmatrix} \right)$; 5. $P = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{smallmatrix} \right)$.

Точно такое же разбиение нами было получено в проективном случае. Продолжая классификацию по аналогии с проективным случаем, получаем следующий результат.

Теорема 2. *Всякое трехмерное локально-однородное подмногообразие в $\mathbb{R}^4$, алгебра симметрий которого имеет размерность ≥ 4 либо является открытым подмножеством цилиндра или квадрики, либо эквивалентно открытому подмножеству одного из следующих подмногообразий:*

(1) $x_2^2 + x_1x_2x_3 + x_4x_1^2 = 0$;
(2) $x_4 = x_1x_3^2 + x_2x_3$;
(3) $x_4 = x_1x_3^2 + x_2x_3 + x_3^4$;
(4) $x_4 = x_1^2x_3 + x_2x_3$;
(5) $x_4x_3 + x_1x_3^2 + x_2^2 = 0$;
(6) $x_4 = x_1^2 + x_2x_3 + x_3^3$;
(7) $x_4 = x_1^2 + x_1x_3^2 + x_2x_3 + ax_3^4$;
(8) $x_2^2 + x_1x_3^2 + x_1x_4 = 0,\ x_1 > 0 \vee x_1 < 0$;
(9) $x_1 + x_3x_4 \pm x_2^2 + x_4^a = 0,\ a \neq 0, 1, 2, 3$;
(10) $x_1 + x_3x_4 + x_2^2 \pm x_4 \ln x_4 = 0$;
(11) $x_1 + x_3x_4 + x_2^2 \pm \ln x_4 = 0$;
(12) $x_1 + x_3x_4 + x_2^2 \pm x_4^2 \ln x_4 = 0$;
(13) $x_1 + x_3x_4 + x_2^2 \pm e^{x_4} = 0$;
(14) $x_2^2 + x_1x_3 = x_4^a,\ a \neq 0, 1, 2$;
(15) $x_2^2 + x_1x_3 = e^{x_4}$;
(16) $x_2x_4 + x_1x_3 + x_4^2 \ln x_4 = 0$;
(17) $x_2 + x_1x_3 + \ln x_4 = 0$;
(18) $x_2 + x_1x_3 + e^{x_4} = 0$;
(19) $x_2x_4 + x_1x_3 + x_4 \ln x_4 = 0$;
(20) $x_2 + x_1x_3 + x_4 \ln x_4 = 0$;
(21) $x_2 + x_1x_3 + x_4^a = 0,\ a \neq 0, 1, 2$;
(22) $x_2x_4 + x_1x_3 + x_4^a = 0,\ a \neq 0, 1, 2$;
(23) $\pm(x_1^2 + x_2^2) + x_3^2 = x_4^a,\ a \neq 0, 1, 2$;
(24) $\pm(x_1^2 + x_2^2) + x_3^2 = e^{x_4}$;
(25) $x_3x_4 = \pm(x_1^2 + x_2^2) + x_4^a,\ a \neq 0, 1, 2$;
(26) $x_3 = \pm(x_1^2 + x_2^2) + x_4^a,\ a \neq 0, 1, 2$;
(27) $x_3x_4 = \pm(x_1^2 + x_2^2) + x_4^2 \ln x_4$;
(28) $x_3 = \pm(x_1^2 + x_2^2) - \ln x_4$;
(29) $x_3 = \pm(x_1^2 + x_2^2) + e^{x_4}$;
(30) $x_3x_4 = \pm(x_1^2 + x_2^2) - x_4 \ln x_4$;
(31) $x_3 = \pm(x_1^2 + x_2^2) + x_4 \ln x_4$;
(32) $(x_1x_3^2 - x_4x_2x_3 + x_4^3/3)^2 = -8/9(x_3x_2 - x_4^2/2)^3$;
(33) $x_1x_2x_3 + x_1^2x_4 + x_2^3 = 0$.

Замечание 2. В случае (8) поверхность имеет две связные компоненты, определяемые условиями $x_1 > 0$ и $x_1 < 0$, которые не являются проективно эквивалентными.

5. Анализ результатов

5.1. Сопоставление результатов классификаций. Сравним полученные классификации для аффинной и проективной геометрий. Группа аффинных преобразований конечномерного пространства естественным образом вкладывается в группу преобразований проективизации данного пространства. Следовательно, всякое аффинно-однородное подмногообразие является проективно однородным, но некоторые аффинно-неэквивалентные подмногообразия являются проективно эквивалентными. В теореме 2 проективно эквивалентными являются следующие пары подмногообразий: (1) и (2), (4) и (5), (6) и $(9, a = -1)$, $(9, a)$ и $(9, 2 - a)$, $(10, +)$ и $(10, -)$, (11) и (12), $(14, a)$ и $(14, 2 - a)$, (16) и (17), (19) и (20), (21) и (22), $(23, a)$ и $(23, 2 - a)$, (25) и (26), (27) и (28), (30) и (31). Подмногообразиям (32) и (33) соответствуют проективные цилиндры.

С другой стороны, поверхности (7), (9), (11), (15) и (22) из теоремы 1, которые отсутствуют в теореме 2, не являются аффинно-однородными.

5.2. Действия с открытой орбитой. Выделим из найденных аффинных и проективных действий те, которые имеют открытую орбиту и, в частности, имеют конечное число орбит.

У приведенных выше подмногообразий в случаях (1)–(7) теоремы 1 и случаях (1)–(8) теоремы 2 алгебры симметрий действуют с конечным числом орбит. Кроме этого, алгебры симметрий квадрик имеют конечное число орбит. Далее, алгебра симметрий цилиндра имеет конечное число орбит тогда и только тогда, когда алгебра симметрий основания этого цилиндра имеет конечное число орбит. Заметим, что основание является поверхностью в пространстве меньшей размерности, а все такие подмногообразия классифицированы в [5], [8].

Литература

1. Lie S. *Bestimmung aller Flächen, die eine kontinuierliche Schar von projektiven Transformationen gestutten* // Gesamelte Abhandlungen. – Leipzig, 1926. – V. 6. – P. 494–538.
2. Favard J. *Cours de géométrie différentielle locale.* – Paris: Gauthier-Villars, 1957. – 553 p.
3. Nomizu K., Sasaki T. *A new model of unimodular-affinely homogeneous surfaces* // Manuscr. Math. – 1991. – V. 73. – P. 39–44.
4. Nomizu K., Sasaki T. *Affine differentail geometry.* – Cambridge Univ. Press, 1994.
5. Doubrov B., Komrakov B., Rabinovich M. *Homogeneous surfaces in the three-dimensional affine geometry* // Geometry of submanifolds. – 1996. – V. 8. – P. 168–178.
6. Abdalla B. E., Dillen F., Vranken L. *Affine homogeneous surfaces in* $\mathbb{R}$ *with vanishing Pick invariant* // Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg. – 1997. – V. 67. – P. 105–115.
7. Nomizu K., Sasaki T. *On the classification of projectively homogeneous surfaces* // Results Math. – 1991. – V. 20. – P. 698–724.
8. Dillen F., Sasaki T., Vranken L. *The classification of projectively homogeneous surfaces.* II // Osaka J. Math. – 1998. – V. 35. – P. 117–146.
9. Goto M., Grosshans F. *Semisimple Lie algebras.* – New York: Marcel Decker, 1978.

Белорусский государственный университет

Поступила
01.07.1998