ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2000 МАТЕМАТИКА № 7 (458)

УДК 514.76 : 517.93

В.А. ИГОШИН

ПУЛЬВЕРИЗАЦИОННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И ТОЧЕЧНО-ТРАЕКТОРНЫЕ МОРФИЗМЫ КВАЗИГЕОДЕЗИЧЕСКИХ ПОТОКОВ

В работе продолжается изучение квазигеодезических потоков (КП) с помощью пульверизационного моделирования [1] (см. также [2]–[5]). В частности, введено понятие точечно-траекторного морфизма КП; найдены критерии точечно-траекторных изоморфизмов полиномиальных КП 2-й степени по "скорости"; установлены некоторые связи точечно-траекторных инфинитезимальных симметрий с траекторными. Получена классификация некоторых двумерных КП по их точечно-траекторной подвижности. Терминология и обозначения предыдущих работ сохраняются.

1. Точечно-траекторные морфизмы квазигеодезических потоков

Пусть $f \equiv (M,f)$ — КП на дифференцируемом многообразии M, $h \equiv (N,h)$ — КП на многообразии N,

$$\frac{d^2x^i}{dt^2} = f^i\Big(x^j, t, \frac{dx^j}{dt}\Big), \quad \frac{d^2y^a}{d\overline{t}^2} = h^a\Big(y^b, \overline{t}, \frac{dy^b}{d\overline{t}}\Big)$$

— соответствующие им координатные уравнения ($1 \le i,j \le m-1 = \dim M$; $1 \le a,b \le n-1 = \dim N$). Как и прежде (см. [1]–[5]), все объекты достаточное число раз дифференцируемые.

Определение 1. Отображение $\overline{\Phi} : \overline{M} = M \times R \to \overline{N} = N \times R$ назовем точечным квазиморфизмом КП f в КП h, если оно переводит интегральные кривые первого КП в интегральные кривые второго. Если, кроме того, $\overline{\Phi}$ переводит распределение $dt = 0$ в распределение $d\overline{t} = 0$, то $\overline{\Phi}$ будет называться собственным точечным квазиморфизмом, или просто точечным морфизмом.

Обычным образом (см.[3]) вводятся понятия точечного квазиизоморфизма и точечного изоморфизма КП. Классическое понятие точечного морфизма (см., напр., [6]–[8]) совпадает с понятием точечного квазиморфизма.

Определение 2. Точечный (квази)морфизм $\overline{\Phi} : \overline{M} \to \overline{N}$ КП f в КП h будем называть точечным (квази)гомоморфизмом, если $\overline{\Phi}$ — субмерсия.

Определение 3. Квазиморфизм $\overline{\Phi} : \overline{M} \to \overline{N}$ КП f в КП h назовем точечно-траекторным, если он переводит слои тривиального расслоения $(\overline{M}, \mathrm{Pr}, M)$ в слои $(\overline{N}, \mathrm{Pr}, N)$, т. е. если $\overline{\Phi}(x,t) = (\Phi(x), \overline{t}(x,t))$, где $\Phi : M \to N : x \to y = \Phi(x)$ — некоторое отображение базовых многообразий, а $\overline{t} = \overline{t}(x,t)$ — функция на $\overline{M}$.

Из свойств пульверизационного моделирования (см. [1]–[5]) вытекают

Предложение 1. *Для всякого точечно-траекторного квазиморфизма* $\overline{\Phi} : \overline{M} = M \times R \to \overline{N} = N \times R$ *КП* (M,f) *в КП* (N,h) *его проекция* $\Phi : M \to N$ *является траекторным морфизмом КП* f *в КП* h.

Предложение 2. *Проекция любого точечно-траекторного квазиизоморфизма* $\overline{\Phi} : \overline{M} \to \overline{N}$ *КП* (M, f) *в КП* (N, h) — *диффеоморфизм* $\Phi : M \to N$ — *является траекторным изоморфизмом КП* f *и* h.

2. Критерий точечно-траекторного квазиизоморфизма автономных квазигеодезических потоков 2-й степени

Как известно [3], диффеоморфизм $\overline{\Phi} : \overline{M} = M \times R \to \overline{N} = N \times R : (x, t) \to (y, \overline{t}) = (\Phi(x), \overline{t}(x, t))$ в том и только том случае является точечным квазиизоморфизмом КП (M, f) в КП (N, h), если он же является проективным изоморфизмом стандартных связностей $\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}(x, \dot{x})$ и $H^\alpha_{\beta\gamma}(y, \dot{y})$ КП f и h, т. е. если выполнены условия

$$\overline{\Gamma}^\alpha_{\beta\gamma}(x, \dot{x}) - \Gamma^\alpha_{\beta\gamma}(x, \dot{x}) = \psi_\beta \delta^\alpha_\gamma + \psi_\gamma \delta^\alpha_\beta + \dot{x}^\alpha \psi_{\beta\gamma}, \tag{1}$$

в которых $\overline{\Gamma}^\alpha_{\beta\gamma}$ — $\overline{\Phi}$-поднятие связности $H^\alpha_{\beta\gamma}$, $1 \le \alpha, \beta, \gamma \le n$.

Справедлива

Лемма 1. $\varphi_i = \frac{1}{2}\partial\overline{t}/\partial x^i$ *и* $\sigma = \partial\overline{t}/\partial t$ *являются соответственно ковекторным полем и функцией (зависящими от параметра* t*) на многообразии* M.

Пусть f и h — автономные КП 2-й степени по “скорости”

$$\begin{aligned} f^i &= -\Gamma^i_{jk}(x)\frac{dx^j}{dt}\frac{dx^k}{dt} + B^i_j(x)\frac{dx^j}{dt} + A^i(x); \\ h^i &= -H^i_{jk}(y)\frac{dy^j}{d\overline{t}}\frac{dy^k}{d\overline{t}} + \widetilde{B}^i_j(y)\frac{dy^j}{d\overline{t}} + \widetilde{A}^i(y), \end{aligned} \tag{2}$$

$$1 \le i, j, k \le n - 1 = \dim M = \dim N.$$

Вычисляя коэффициенты поднятой связности $\overline{\Gamma}^\alpha_{\beta\gamma}$, находим, в частности (см. также [3], (6)),

$$\overline{\Gamma}^i_{jk} = H^{\#i}_{jk} - \varphi_j B^{\#i}_k - \varphi_k B^{\#i}_j - 4\varphi_j\varphi_k A^{\#i}, \tag{3}$$

$$\overline{\Gamma}^i_{jn} = -\frac{1}{2}\sigma B^{\#i}_j - 2\sigma\varphi_j A^{\#i}, \tag{4}$$

$$\overline{\Gamma}^i_{nn} = -\sigma^2 A^{\#i}, \tag{5}$$

$$\overline{\Gamma}^n_{jk} = 2\sigma^{-1}[\varphi_{j,k} + \varphi_i(B^{\#i}_j\varphi_k + B^{\#i}_k\varphi_j + 4\varphi_j\varphi_k A^{\#i})], \tag{6}$$

$$\overline{\Gamma}^n_{jn} = \varphi_i B^{\#i}_j + 4\varphi_i\varphi_j A^{\#i} + \sigma^{-1}\sigma_{,j}, \tag{7}$$

$$\overline{\Gamma}^n_{nn} = 2\sigma\varphi_i A^{\#i} + \sigma^{-1}(\partial_t\sigma), \tag{8}$$

где значком # (диез) отмечены Φ-поднятия (с N на M) соответствующих объектов H^i_{jk}, $\widetilde{B}^i_j$ и $\widetilde{A}^i$, $\varphi_{j,k} = \partial\varphi_j/\partial x^k - H^{\#i}_{jk}\varphi_i$.

Условия (1) и (3)–(8) приводят к следующему критерию точечно-траекторного изоморфизма КП 2-й степени.

Теорема 1. *Пусть* $f \equiv (M, f)$ *и* $h \equiv (N, h)$ — *два КП 2-й степени с координатными уравнениями (2) такие, что* $A = A^i\partial_i \ne 0$ *в каждой точке* M *или* $A \equiv 0$ *аффиноры* B^i_j *и* δ^i_j *линейно независимы в каждой точке* M. *Изоморфизм* $\overline{\Phi} : \overline{M} = M \times R \to \overline{N} = N \times R$ *тривиальных расслоений* $(\overline{M}, \mathrm{Pr}, M)$ *и* $(\overline{N}, \mathrm{Pr}, N)$, *т. е. диффеоморфизм вида* $\overline{\Phi}(x, t) = (\Phi(x), \overline{t}(x, t))$, *где* $\Phi : M \to N$

— некоторый диффеоморфизм, тогда и только тогда является точечно-траекторным квазиизоморфизмом КП f и h, когда

$$\Gamma^i_{jk} = H^{\#i}_{jk} + \widetilde{\psi}_j\delta^i_k + \widetilde{\psi}_k\delta^i_j + \widetilde{\varphi}_j B^i_k + \widetilde{\varphi}_k B^i_j + 4\widetilde{\varphi}_j\widetilde{\varphi}_k A^i, \tag{9}$$

$$B^{\#i}_j = \widetilde{\sigma} B^i_j + 4\widetilde{\sigma}\widetilde{\varphi}_j A^i + 2\widetilde{\psi}_n\delta^i_j, \tag{10}$$

$$A^{\#i} = \widetilde{\sigma}^2 A^i, \tag{11}$$

$$\widetilde{\varphi}_{(j,k)} = 2\widetilde{\varphi}_{(j}\widetilde{\psi}_{k)}, \tag{12}$$

$$\widetilde{\psi}_i = \widetilde{\varphi}_s B^s_i + 4\widetilde{\varphi}_i(\widetilde{\psi}_n/\widetilde{\sigma}), \tag{13}$$

$$\widetilde{\varphi}_s A^s = \widetilde{\psi}_n/\widetilde{\sigma}, \tag{14}$$

где $\widetilde{\sigma}$ и $\widetilde{\psi}_n$ — функции, $\widetilde{\psi}_i$ и $\widetilde{\varphi}_i$ — ковекторные поля на M (не зависящие от “времени” t), запятая в (12) — символ ковариантной производной в связности $H^{\#i}_{jk}$, скобки в (12) — симметрирование. При этом $\widetilde{\sigma} = (\partial\overline{t}/\partial t)^{-1} = \mathrm{const} \neq 0$, $\widetilde{\varphi}_i = -\frac{1}{2}\widetilde{\sigma}(\partial\overline{t}/\partial x^i)$.

Доказательство. Условие (1) с учетом (3)–(8) и (6) из [3] распадается на следующие:

$$H^{\#i}_{jk} = \Gamma^i_{jk} + \psi_j\delta^i_k + \psi_k\delta^i_j + \varphi_j B^{\#i}_k + \varphi_k B^{\#i}_j + 4\varphi_j\varphi_k A^{\#i}, \tag{15}$$

$$B^i_j = \sigma B^{\#i}_j + 4\sigma\varphi_j A^{\#i} + 2\psi_n\delta^i_j, \tag{16}$$

$$A^i = \sigma^2 A^{\#i}, \tag{17}$$

$$\varphi_{j,k} = -\varphi_i(B^{\#i}_j\varphi_k + B^{\#i}_k\varphi_j + 4\varphi_j\varphi_k A^{\#i}), \tag{18}$$

$$\psi_i = \varphi_s B^{\#s}_i + 4\varphi_i\varphi_s A^{\#s} + \sigma^{-1}\sigma_{,i}, \tag{19}$$

$$2\sigma\varphi_s A^{\#s} + \sigma^{-1}(\partial_t\sigma) = 2\psi_n, \tag{20}$$

где, как и раньше, $\sigma = \partial\overline{t}/\partial t$, $\varphi_i = \frac{1}{2}\partial\overline{t}/\partial x^i$, а запятая в (18) — ковариантное дифференцирование в связности $H^{\#i}_{jk}$. Отметим, что $\sigma \neq 0$, т. к. $\overline{\Phi}(x,t) = (\Phi(x), \overline{t}(x,t))$ — диффеоморфизм. Пусть $A = A^i\partial_i \neq 0$. Тогда из (17) следует, что σ не зависит от t; из (16) и (19) видно, что φ_i, ψ_n и ψ_i также не зависят от t. Если же $A \equiv 0$, а B^i_j и δ^i_j линейно независимы в каждой точке $x \in M$, то независимость σ и ψ_n от t следует из (16); независимость же φ_i и ψ_i от t — из (15). Далее, т. к. $\varphi_i = \partial\overline{t}/\partial x^i$ и $\sigma = \partial\overline{t}/\partial t$ не зависят от t, то $\overline{t} = \sigma t + v(x^i)$ при $\sigma = \mathrm{const} \neq 0$. Легко проверить, что $\psi_n = \varphi_s A^{\#s} \equiv 0$, $\widetilde{\psi}_n = \widetilde{\varphi}_s A^s \equiv 0$. Равенства (15)–(20), наконец, оказываются равносильными (9)–(14) при $\widetilde{\sigma} = \sigma^{-1}$, $\widetilde{\varphi}_i = -\varphi_i/\sigma$, $\widetilde{\psi}_i = -\psi_i$. □

3. Точечно-траекторные квазиизоморфизмы аффинной связности

Пусть $f \equiv (M, f)$ и $h \equiv (N, h)$ — два квазигеодезических потока автономных аффинных связностей $\Gamma^i_{jk}(x)$ и $H^i_{jk}(y)$ (на многообразиях M и N соответственно). В этом случае $A^i \equiv 0$, $B^i_j \equiv 0$, $A^{\#i} \equiv 0$, $B^{\#i}_j \equiv 0$ и условия (15)–(20) точечно-траекторного квазиизоморфизма $\overline{\Phi} : \overline{M} \to \overline{N}$ потоков f и h принимают вид

$$H^{\#i}_{jk} = \Gamma^i_{jk} + \psi_j\delta^i_k + \psi_k\delta^i_j, \tag{21}$$

$$\varphi_{j,k} = 0, \tag{22}$$

$$\psi_i = \sigma^{-1}\sigma_{,i}, \tag{23}$$

где $\varphi_j = \partial\overline{t}/\partial x^j$, $\sigma = \partial\overline{t}/\partial t$ — (не зависящая от t) функция на M, запятая в (22) — ковариантная производная в связности $H^{\#i}_{jk}$. Поэтому $\overline{t} = \sigma(x^i)t + v(x^i)$.

Таким образом, доказана

Теорема 2. *Диффеоморфизм* $\overline{\Phi} : \overline{M} = M \times R \to \overline{N} = N \times R : (x,t) \to (y = \Phi(x),\ \overline{t} = \overline{t}(x,t))$ *тогда и только тогда является точечно-траекторным квазиизоморфизмом аффинных связностей* $(M, \Gamma^i_{jk}(x))$ *и* $(N, H^i_{jk}(y))$, *когда*

I. $\overline{t} = \sigma t + v$,
II. $H^{\#i}_{jk} = \Gamma^i_{jk} + \psi_j \delta^i_k + \psi_k \delta^i_j$,
III. $\psi_i = \sigma^{-1}\sigma_{,i}$,
IV. $\sigma_{,ij} = 0$, $v_{,ij} = 0$,

где σ *и* v — *функции на* M, *а запятые в* III *и* IV — *ковариантные производные в связности* $H^{\#i}_{jk}$, *являющейся* Φ*-поднятием связности* H^i_{jk}.

Из теоремы 2 непосредственно получается

Теорема 3. *Диффеоморфизм* $\overline{\Phi} : \overline{M} = M \times R \to \overline{N} = N \times R : (x,t) \to (y = \Phi(x),\ \overline{t} = \overline{t}(x,t))$ *в том и только том случае является аффинным точечно-траекторным квазиизоморфизмом аффинных связностей* (M, Γ^i_{jk}) *и* (N, H^i_{jk}), *когда*

I. $\overline{t} = \sigma t + v$,
II. $H^{\#i}_{jk} = \Gamma^i_{jk}$,
III. $v_{,ij} = 0$,

где $\sigma = \mathrm{const} \neq 0$, v — *функция на* M, *а запятая в* III — *ковариантная производная в связности* Γ^i_{jk}.

4. Траекторные симметрии

Пусть $f \equiv (M, f)$ — произвольный КП на многообразии M. Траекторный автоморфизм КП f — это диффеоморфизм M на себя, переводящий траектории в траектории, без сохранения, вообще говоря, канонического параметра (см., напр., [9]–[12]).

Определение 4. Векторное поле X на многообразии M назовем (инфинитезимальной) траекторной симметрией КП f, если порождаемая им локальная однопараметрическая группа диффеоморфизмов состоит из (локальных) траекторных автоморфизмов КП f.

Из результатов работ [9]–[12] естественным образом получаются критерии инфинитезимальных симметрий полиномиальных КП 2-й степени, т. е. КП с координатным выражением (см. также (2))
$$\frac{d^2x^i}{dt^2} = -\Gamma^i_{jk}(x)\frac{dx^j}{dt}\frac{dx^k}{dt} + B^i_j(x)\frac{dx^j}{dt} + A^i(x),$$
где Γ^i_{jk} — симметричная аффинная связность, $f_1 = [B^i_j(dx^j/dt)]\partial/\partial x^i$ — аффинорное и $f_0 = A^i\partial/\partial x^i$ — векторное поля на M ($1 \leq i,j,k \leq n-1 = \dim M$).

Сформулируем эти критерии для КП трех типов: A, B$_1$ и B$_2$ (см. также [9]–[12]), характеризующихся соответственно условиями A) тривектор $\lambda \wedge f_1 \wedge f_0 \neq 0$ как квадратичная функция от $\lambda = dx/dt$ всюду на M (при этом $\dim M \geq 3$); B$_1$) бивектор $\lambda \wedge f_0 \neq 0$ всюду на M, $f_1 \equiv 0$ ($\dim M \geq 2$); B$_2$) бивектор $\lambda \wedge f_1 \neq 0$ всюду на M, $f_0 \equiv 0$ ($\dim M \geq 2$).

Ниже символ $\underset{X}{L}$ обозначает производную Ли вдоль X, а ∇ — ковариантную производную в связности Γ^i_{jk}.

Теорема 4. *Векторное поле* X *на многообразии* M *в том и только том случае является траекторной симметрией КП* (M, f) *типа* A ($\dim M \geq 3$), *если*
$$-\underset{X}{L}\Gamma^i_{jk} = \psi_j\delta^i_k + \psi_k\delta^i_j + \varphi_j B^i_k + \varphi_k B^i_j;$$
$$\underset{X}{L}B^i_j = \alpha_0\delta^i_j + \sigma B^i_j + 4\varphi_j A^i;$$
$$\underset{X}{L}A^i = 2\sigma A^i, \quad \nabla_{(j}\varphi_{i)} = 0;$$
$$\psi_i = \varphi_s B^s_i + \tfrac{1}{2}\nabla_i\sigma, \quad \varphi_s A^s = \alpha_0/2,$$

где α_0, σ — функции, а φ_i и ψ_i — ковекторные поля на M.

Теорема 5. *Векторное поле X на многообразии M тогда и только тогда является траекторной симметрией КП (M,f) типа* B_1 $(\dim M \geq 2)$, *когда*

$$\underset{X}{L}\Gamma^i_{jk} = \psi_j\delta^i_k + \psi_k\delta^i_j + 2\varphi_{jk}A^i, \quad \underset{X}{L}A^i = \sigma A^i;$$
$$\nabla_{(k}\varphi_{ij)} = 0, \quad \psi_i = \varphi_{is}A^s - \tfrac{1}{4}\nabla_i\sigma,$$

где σ, ψ_i, φ_{ij} — поля тензоров на M.

Теорема 6. *Для того чтобы векторное поле X на многообразии M было траекторной симметрией КП (M,f) типа* B_2 *при* $\dim M \geq 3$, *необходимо и достаточно, чтобы*

$$\underset{X}{L}\Gamma^i_{jk} = \psi_j\delta^i_k + \psi_k\delta^i_j + \varphi_j B^i_k + \varphi_k B^i_j, \quad \underset{X}{L}B^i_j = \sigma B^i_j;$$
$$\nabla_{(j}\varphi_{i)} = 0, \quad \psi_i = \varphi_s B^s_i - \tfrac{1}{2}\nabla_i\sigma,$$

где σ — функция, φ_i и ψ_i — ковекторы на M.

Теорема 7. *Необходимые и достаточные условия инфинитезимальной симметрии X КП (M,f) типа* B_2 *в предположении кососимметричности и невырожденности аффинора f_1 и при* $\dim M = 2$ *имеют вид, указанный в теореме* 6.

Не приводя здесь подробных доказательств “инфинитезимальных теорем”, отметим два основных момента. 1) Аналоги теорем 4–7 для конечных симметрий содержатся в результатах [9]–[12]: для КП типа B_1 — в [9], для КП типа A и B_2 (при $\dim M \geq 3$) — в [10], для КП типа B_2 (при $\dim M = 2$) — в [12]. 2) “Конечные” аналоги приводят к “инфинитезимальным” критериям в результате предельного перехода, участвующего в общеизвестном определении производной Ли.

5. Точечно-траекторные симметрии

Пусть, как и прежде (см. [1]–[5]), $\overline{\Gamma}^\alpha_{\beta\gamma}(\overline{x},\dot{\overline{x}})$ — (стандартная) связность КП (M,f), заданная в пространстве событий $\overline{M} = M \times R$ КП (M,f) $(1 \leq \alpha,\beta,\gamma \leq n$; $\overline{x}^i = x^i$, $\overline{x}^n = t$, $\dot{\overline{x}} = d\overline{x}/dt)$. Условие

$$\underset{X}{L}\overline{\Gamma}^\alpha_{\beta\gamma} = \overline{\psi}_\beta\delta^\alpha_\gamma + \overline{\psi}_\gamma\delta^\alpha_\beta + \dot{x}^\alpha\overline{\psi}_{\beta\gamma} \tag{24}$$

означает, как известно [4], что $\overline{X}$ — (проективная, точечная) квазисимметрия потока (M,f). Согласно формулам (6) из [3]

$$\begin{gathered}\overline{\Gamma}^i_{jk}(\overline{x},\dot{\overline{x}}) = \Gamma^i_{jk}(x), \quad \overline{\Gamma}^i_{jn}(\overline{x},\dot{\overline{x}}) = -\tfrac{1}{2}B^i_j(x),\\ \overline{\Gamma}^i_{nn}(\overline{x},\dot{\overline{x}}) = -A^i(x), \quad \overline{\Gamma}^n_{\alpha\beta}(\overline{x},\dot{\overline{x}}) = 0.\end{gathered} \tag{25}$$

Пусть $\overline{X} = X^i(x,t)\partial/\partial x^i + X^n(x,t)\partial/\partial t$ — разложение вектора $\overline{X}$ по координатному базису. Первое слагаемое $X = X(x,t) = X^i\partial/\partial x^i$ является векторным полем, а второе — $X^n(x,t)$-функцией на многообразии M (зависящими от параметра — “времени” t). С учетом (25) условие (24) распадается на следующие:

$$\begin{aligned}&\partial_{jk}X^i + X^s\partial_s\Gamma^i_{jk} + (\partial_j X^s)\Gamma^i_{sk} + (\partial_k X^s)\Gamma^i_{js} - (\partial_s X^i)\Gamma^s_{jk} =\\ &\qquad = \tfrac{1}{2}(\partial_k X^n)B^i_j + \tfrac{1}{2}(\partial_j X^n)B^i_k + \overline{\psi}_j\delta^i_k + \overline{\psi}_k\delta^i_j,\end{aligned} \tag{26}$$

$$\begin{aligned}&\partial_{jn}X^i - \tfrac{1}{2}X^s\partial_s B^i_j - \tfrac{1}{2}(\partial_j X^s)B^i_s - (\partial_j X^n)A^i +\\ &\qquad + (\partial_n X^s)\Gamma^i_{js} - \tfrac{1}{2}(\partial_n X^n)B^i_j + \frac{1}{2}(\partial_s X^i)B^s_j = \overline{\psi}_n\delta^i_j,\end{aligned} \tag{27}$$

$$\partial_{nn}X^i - X^s\partial_s A^i - 2\partial_n X^n A^i - \partial_n X^s B^i_s + (\partial_s X^i)A^s = 0, \tag{28}$$
$$\partial_{jk}X^n + \partial_s X^n \Gamma^s_{jk} = 0, \tag{29}$$
$$\partial_{jn}X^n + \tfrac{1}{2}(\partial_s X^n)B^s_j = \overline{\psi}_j, \tag{30}$$
$$\partial_{nn}X^n + (\partial_s X^n)A^s = 2\overline{\psi}_n. \tag{31}$$

Определение 5. Точечную квазисимметрию $\overline{X} = X^i(x^j,t)\partial_i + X^n(x,t)\partial_t$ КП (M,f) назовем точечно-траекторной, если она проектируема на базу тривиального расслоения $(\overline{M}, \mathrm{Pr}, M)$, т. е. если X^i не зависят от t: $X^i = X^i(x^j)$. Точечно-траекторной квазисимметрией будем называть при этом и векторное поле $X = X^i\partial_i$ — проекцию поля $\overline{X}$.

Это определение "оправдывается" следующим очевидным предложением.

Предложение 3. *Проекция точечно-траекторной квазисимметрии $\overline{X} = X + X^n\partial_t$ КП (M,f), т. е. векторное поле X на M, является траекторной симметрией этого потока.*

Условия (26)–(31) для точечно-траекторной квазисимметрии КП (M,f) приводятся соответственно к виду

$$\underset{X}{L}\Gamma^i_{jk} = \overline{\psi}_j\delta^i_k + \overline{\psi}_k\delta^i_j + \tfrac{1}{2}(\partial_k X^n)B^i_j + \tfrac{1}{2}(\partial_j X^n)B^i_k, \tag{32}$$
$$\underset{X}{L}B^i_j = -2\overline{\psi}_n\delta^i_j - (\partial_n X^n)B^i_j - 2(\partial_j X^n)A^i, \tag{33}$$
$$\underset{X}{L}A^i = -2(\partial_n X^n)A^i, \tag{34}$$
$$\nabla_k(\partial_j X^n) = 0, \tag{35}$$
$$\partial_{jn}X^n + \tfrac{1}{2}(\partial_s X^n)B^s_j = \overline{\psi}_j, \tag{36}$$
$$\partial_{nn}X^n + (\partial_s X^n)A^s = 2\overline{\psi}_n. \tag{37}$$

Лемма 2. *Для КП (M,f) каждого из типов* А, B_1 *и* B_2 *величины $\overline{\psi}_n$, $\partial_n X^n$, $\overline{\psi}_i$ и $\partial_i X^n$ не зависят от параметра t и, следовательно, $\overline{\psi}_n$ и $\partial_n X^n$ — функции, а $\overline{\psi}_i$ и $\partial_i X^n$ — ковекторные поля на M.*

Доказательство. В случае КП типа А из (33) очевидным образом получаем

$$\begin{aligned} &\underset{X}{L}B \wedge f_1 \wedge f_0 = -2\overline{\psi}_n \lambda \wedge f_1 \wedge f_0;\\ &\underset{X}{L}B \wedge \lambda \wedge f_0 = (-\partial_n X^n) f_1 \wedge \lambda \wedge f_0;\\ &\underset{X}{L}B \wedge \lambda \wedge f_1 = -2(\partial_j X^n \lambda^j) f_0 \wedge \lambda \wedge f_1, \end{aligned} \tag{38}$$

где $\underset{X}{L}B = (\underset{X}{L}B^i_j\lambda^j)\partial_i$, $f_1 = B^i_j\lambda^j\partial_i$, $f_0 = A^i\partial_i$ $(\lambda = dx/dt)$.

Из (38) следует независимость от t величин $\overline{\psi}_n$, $\partial_n X^n$ и $\partial_j X^n$. С учетом этого равенство (36) завершает доказательство. $\square$

Если f — КП типа B_1, т. е. $\lambda \wedge f_0 \neq 0$, а $f_1 \equiv 0$, то требуемая независимость следует из (34) (для $\partial_n X^n$), (32) (для $\overline{\psi}_i$) и (33) (для $\overline{\psi}_n$ и $\partial_j X^n$). В случае КП типа B_2 искомая независимость для $\overline{\psi}_j$ и $\partial_j X^n$ обеспечивается уравнением (32), а для $\overline{\psi}_n$ и $\partial_n X^n$ — уравнением (33).

После введения обозначений $\widetilde{\psi}_i = -\overline{\psi}_i$, $\widetilde{\alpha}_0 = -2\overline{\psi}_n$, $\widetilde{\sigma} = -\partial_n X^n$, $\widetilde{\varphi}_i = -\frac{1}{2}\partial_i X^n$ уравнения

(32)–(37) перепишутся следующим образом:

$$-\underset{X}{L}\Gamma^i_{jk} = \widetilde{\psi}_j\delta^i_k + \widetilde{\psi}_k\delta^i_j + \widetilde{\varphi}_j B^i_k + \widetilde{\varphi}_k B^i_j, \tag{39}$$

$$\underset{X}{L}B^i_j = \widetilde{\alpha}_0\delta^i_j + \widetilde{\sigma}B^i_j + 4\widetilde{\varphi}_j A^i, \tag{40}$$

$$\underset{X}{L}A^i = 2\widetilde{\sigma}A^i, \tag{41}$$

$$\nabla_k\widetilde{\varphi}_j \equiv \nabla_{(k}\widetilde{\varphi}_{j)} = 0, \tag{42}$$

$$\widetilde{\psi}_i = \widetilde{\varphi}_s B^s_i, \tag{43}$$

$$\widetilde{\varphi}_s A^s = \widetilde{\alpha}_0/2. \tag{44}$$

Отсюда уже относительно легко получаются следующие теоремы.

Теорема 8. *Векторное поле* $\overline{X} = X^i(x^j)\partial_i + X^n(x^j,t)\partial_t$ *на многообразии* $\overline{M} = M \times R$ *тогда и только тогда является точечно-траекторной квазисимметрией КП* (M,f) *типа* A *при* $\dim M \geq 3$, *когда* $X^n = -\widetilde{\sigma}t - 2\widetilde{\varphi}(x^j)$, *где* $\widetilde{\sigma} = -\partial_n X^n = \mathrm{const}$, *и выполнены условия* (39)–(44), *в которых* $\widetilde{\alpha}_0$ *— некоторая функция,* $\widetilde{\psi}_i$ *— ковекторное поле на* M, *а* $\widetilde{\varphi}_i = -\frac{1}{2}\partial_i X^n = \partial\widetilde{\varphi}/\partial x^i$.

Теорема 9. *Для того чтобы векторное поле* $\overline{X} = X^i(x^j)\partial_i + X^n(x^j,t)\partial_t$ *на* $\overline{M} = M \times R$ *было точечно-траекторной квазисимметрией КП* (M,f) *типа* B_1 *при* $\dim M \geq 2$, *необходимо и достаточно, чтобы* $X^n = -\widetilde{\sigma}t - 2\widetilde{\varphi}$ *при* $\widetilde{\sigma} = \mathrm{const}$ *и* $\widetilde{\varphi} = \mathrm{const}$, $\underset{X}{L}\Gamma^i_{jk} = 0$, $\underset{X}{L}A^i = 2\widetilde{\sigma}A^i$.

Следствие. Всякая точечно-траекторная квазисимметрия КП типа B_1 является 1) собственной, т. е. сохраняет Пфаффово уравнение $dt = 0$ (см. [3]); 2) аффинной симметрией связности Γ^i_{jk}.

Теорема 10. *Векторное поле* $\overline{X} = X + X^n(x,t)\partial_t$ *на* $\overline{M} = M \times R$ *в том и только том случае является точечно-траекторной квазисимметрией КП* (M,f) *типа* B_2 *при* $\dim M \geq 2$, *если* $X^n = -\widetilde{\sigma}t - 2\widetilde{\varphi}(x^j)$ *при* $\widetilde{\sigma} = \mathrm{const}$ *и выполнены условия* (39), (40), (42) *и* (43), *в которых* $\widetilde{\alpha}_0 \equiv 0$, $\widetilde{\psi}_i$ *— некоторое ковекторное поле на* M, *а* $\widetilde{\varphi}_i = \partial\widetilde{\varphi}/\partial x^i$.

Прямое сопоставление теорем 8–10 с теоремами 3–7 соответственно приводит к следующим результатам.

Теорема 11. *Траекторная симметрия* $X = X^i(x^j)\partial_i$ *КП* (M,f) *типа* A *при* $\dim M \geq 3$ *тогда и только тогда дополняется до точечно-траекторной квазисимметрии* $\overline{X} = X + X^n(x^j,t)\partial_t$ *этого потока, когда входящие в теорему* 4 *величины* σ *и* φ_i *удовлетворяют условиям* $\sigma = \mathrm{const}$, *а форма* $\omega = \varphi_i dx^i$ *точная, т. е. является дифференциалом некоторой функции* φ *на* M $(\omega = d\varphi)$. *При этом* $X^n = -\sigma t - 2\varphi$.

Теорема 12. *Траекторная симметрия* $X = X^i(x^j)\partial_i$ *КП* (M,f) *типа* B_1 *при* $\dim M \geq 2$ *дополняется до точечно-траекторной квазисимметрии* $\overline{X} = X + X^n(x,t)\partial_t$ *этого потока, если и только если величины из теоремы* 5 *удовлетворяют условиям* $\psi_i \equiv 0$, $\varphi_{ij} \equiv 0$, $\sigma = \mathrm{const}$. *При этом* $X^n = -\frac{\sigma}{2}t - 2\varphi$, *где* $\varphi = \mathrm{const}$.

Теорема 13. *Траекторная симметрия* $X = X^i(x^j)\partial_i$ *КП* (M,f) *типа* B_2 *при* $\dim M \geq 3$, *а в случае кососимметричности и невырожденности аффинорного поля* B^i_j *и при* $\dim M = 2$, *в том и только том случае сводится к точечно-траекторной квазисимметрии* $\overline{X} = X + X^n(x,t)\partial_t$ *этого потока, когда величины из теоремы* 6 *удовлетворяют условиям* $\sigma = \mathrm{const}$, $\omega = \varphi_i dx^i = d\varphi$, *где* φ *— некоторая функция на* M. *При этом* $X^n = -\frac{\sigma}{2}t - 2\varphi$.

6. Классификация двумерных КП типа B_1 по их точечно-траекторной подвижности

Базируясь на классификации С. Ли алгебр векторных полей на плоскости, Дж. Ливайн [13] классифицировал двумерные аффинные связности Γ^i_{jk} по их аффинной подвижности, т. е. по допускаемым ими полным (максимальной размерности) алгебрам аффинных коллинеаций.

Доказанная выше теорема 9 позволяет с помощью результатов [13] классифицировать двумерные КП типа B_1 по их точечно-траекторной подвижности.

Теорема 14. *Двумерные КП (M,f) типа B_1 могут допускать следующие шесть полных алгебр точечно-траекторных симметрий:*

1. $\overline{X}_0=(0,0,1)$, $\overline{X}_1=(1,0,-\frac{\sigma_1}{2}t)$;
2. $\overline{X}_0=(0,0,1)$, $\overline{X}_1=(1,0,-\frac{\sigma_1}{2}t)$, $\overline{X}_2=(0,1,-\frac{\sigma_2}{2}t)$;
3. $\overline{X}_0=(0,0,1)$, $\overline{X}_1=(1,0,0)$, $\overline{X}_2=(x,y,-\frac{\sigma_2}{2}t)$;
4. $\begin{cases}\overline{X}_0=(0,0,1), \quad \overline{X}_1=(1,0,-\frac{\sigma_1}{2}t), \quad \overline{X}_2=(0,1,0),\\ \overline{X}_3=(0,y,t/2), \quad \overline{X}_4=(0,e^x,0);\end{cases}$
5. $\overline{X}_0=(0,0,1)$, $\overline{X}_1=(1,0,0)$, $\overline{X}_2=(2x,y,0)$, $\overline{X}_3=(x^2,xy,0)$,
6. $\begin{cases}\overline{X}_0=(0,0,1), \quad \overline{X}_1=(1,0,-\frac{\sigma_1}{2}t), \quad \overline{X}_2=(0,y,-\frac{t}{2}),\\ \overline{X}_3=(0,e^{ax}\cos x,0), \quad \overline{X}_4=(0,e^{ax}\sin x,0).\end{cases}$

При этом КП (M,f) тогда и только тогда допускает одну из алгебр, заданных выше под некоторым номером набором своих генераторов, когда коэффициенты $\Gamma^i_{jk}(x,y)$ связности КП (M,f) и компоненты $A^i(x,y)$ векторного поля f_0 имеют указанный ниже под тем же номером вид

1. а) $\Gamma^i_{jk}=\Gamma^i_{jk}(y)$ (*произвольные функции*);
   б) $A^i=\pm e^{\sigma_1 x+v^i(y)}$ *или* $A^1\equiv 0$, $A^2=\pm e^{\sigma_1 x+v(y)}$, *или* $A^1=\pm e^{\sigma_1 x+v(y)}$, $A^2\equiv 0$,
2. а) $\Gamma^i_{jk}=a^i_{jk}$ (*произвольные постоянные*);
   б) *при* $\sigma_1^2+\sigma_2^2\neq 0: A^i=\pm e^{\sigma_1 x+\sigma_2 y+k_i}$ *или* $A^1\equiv 0$, $A^2=\pm e^{\sigma_1 x+\sigma_2 y+k}$, *или* $A^1=\pm e^{\sigma_1 x+\sigma_2 y+k}$, $A^2\equiv 0$; *при* $\sigma_1=\sigma_2=0$ $A^i=\mathrm{const}$,
3. а) $\Gamma^i_{jk}=\frac{1}{y}a^i_{jk}$ ($a^i_{jk}=\mathrm{const}$);
   б) $A^i=K_i|y|^{1+\sigma_2}$ *или* $A^1\equiv 0$, $A^2=K|y|^{1+\sigma_2}$, *или* $A^1=K|y|^{1+\sigma_2}$, $A^2\equiv 0$,
4. а) $\Gamma^1_{11}=\frac{1}{3}+2a$, $\Gamma^1_{12}=\Gamma^1_{22}=\Gamma^2_{11}\equiv 0$, $\Gamma^2_{12}=-\frac{1}{3}+a$, $\Gamma^2_{22}\equiv 0$ ($a\neq-\frac{2}{3}$, $\frac{1}{3}$);
   б) $A^1\equiv 0$, $A^2=\pm e^{\sigma_1 x+k}$,
5. а) $\Gamma^1_{11}=\frac{2b}{y^2}$, $\Gamma^1_{12}=-\frac{1}{y}$, $\Gamma^1_{22}\equiv 0$, $\Gamma^2_{11}=\frac{a}{y^3}$, $\Gamma^2_{12}=\frac{b}{y^2}$, $\Gamma^2_{22}=-2/y$;
   б) $A^1=K_1y^2$, $A^2=K_2y$ *или* $A^1\equiv 0$, $A^2=Ky$;
6. а) $\Gamma^1_{11}=\frac{2}{3}a+2b$, $\Gamma^1_{12}=\Gamma^1_{22}=\Gamma^2_{22}\equiv 0$, $\Gamma^2_{11}=(1+a^2)y$, $\Gamma^2_{12}=-\frac{2}{3}a+b$;
   б) $A^1\equiv 0$, $A^2=\pm e^{\sigma_1 x+k}$.

Доказательство. Соответствие $\mathrm{Pr}_*:\overline{X}=X+X^n\partial_n\to X=X^i(x^j)\partial_i$ является гомоморфизмом алгебр Ли точечно-траекторных симметрий КП (M,f) (действующей на $\overline{M}=M\times R$ алгебры $\overline{L}$ в действующую на M алгебру L). Согласно теореме 9

1) ядро $\ker\mathrm{Pr}_*$ этого гомоморфизма — одномерная алгебра с образующей $\overline{X}_0=(0,0,1)$;

2) алгебра $\overline{L}$ и, равным образом, L являются полными тогда и только тогда, когда L — полная алгебра аффинных движений (коллинеаций) пространства аффинной связности (M,Γ^i_{jk}). Классификация же последних, как уже говорилось, дана в [13]. Оставшаяся часть доказательства заключается в том, чтобы каждую из 12 алгебр классификации Дж. Ливайна [13] "пропустить через решето" условий теоремы 9. Для примера рассмотрим сразу две алгебры из [13], которые "отсеиваются" (и поэтому отсутствуют в приведенном выше списке). Это алгебры L_ε ($\varepsilon=\pm1$) с образующими $X_1^\varepsilon=(1+\varepsilon x^2,\ \varepsilon xy)$, $X_2^\varepsilon=(\varepsilon xy,\ 1+\varepsilon y^2)$, $X_3^\varepsilon=(y,-x)$, которые по теореме 9 должны удовлетворять условию

$$\underset{X}{L}A^i=\sigma A^i$$

при $\sigma = \mathrm{const}$ и не обращающемся в нуль векторном поле $f_0 = A = A^i\partial_i$. Тогда получаем

$$
\begin{aligned}
(1+\varepsilon x^2)\partial_1 A^1 + \varepsilon xy\partial_2 A^1 - 2\varepsilon x A^1 &= \sigma_1 A^1,\\
(1+\varepsilon x^2)\partial_1 A^2 + \varepsilon xy\partial_2 A^2 - \varepsilon y A^1 - \varepsilon x A^2 &= \sigma_1 A^2,\\
\varepsilon xy\partial_1 A^1 + (1+\varepsilon y^2)\partial_2 A^1 - \varepsilon y A^1 - \varepsilon x A^2 &= \sigma_2 A^1,\\
\varepsilon xy\partial_1 A^2 + (1+\varepsilon y^2)\partial_2 A^2 - 2\varepsilon y A^2 &= \sigma_2 A^2,\\
y\partial_1 A^1 - x\partial_2 A^1 - A^2 &= \sigma_3 A^1,\\
y\partial_1 A^2 - x\partial_2 A^2 + A^1 &= \sigma_3 A^2.
\end{aligned}
\tag{45}
$$

Равенства (45) составляют однородную систему линейных алгебраических уравнений относительно шести неизвестных: $\partial_1 A^1$, $\partial_2 A^1$, A^1, $\partial_1 A^2$, $\partial_2 A^2$ и A^2 (в каждой фиксированной точке (x, y)), допускающую ненулевое решение. Следовательно, строки матрицы

$$
\left(\begin{array}{ccc|ccc}
1+\varepsilon x^2 & \varepsilon xy & -\sigma_1 - 2\varepsilon x & 0 & 0 & 0\\
\varepsilon xy & 1+\varepsilon y^2 & -\sigma_2 - \varepsilon y & 0 & 0 & -\varepsilon x\\
y & -x & -\sigma_3 & 0 & 0 & -1\\
\hline
0 & 0 & -\varepsilon y & 1+\varepsilon x^2 & \varepsilon xy & -\sigma_1 - \varepsilon x\\
0 & 0 & 0 & \varepsilon xy & 1+\varepsilon y^2 & -\sigma_2 - 2\varepsilon y\\
0 & 0 & 1 & y & -x & -\sigma_3
\end{array}\right)
$$

линейно зависимы (с коэффициентами u, v, w, ξ, ν и η — функциями от x и y):

$$
\begin{aligned}
uy + v\varepsilon xy + w(1+\varepsilon x^2) &= 0,\\
-ux + v(1+\varepsilon y^2) + w\varepsilon xy &= 0,\\
-u\sigma_3 - v(\sigma_2 + \varepsilon y) - w(\sigma_1 + 2\varepsilon x) + \xi\cdot 1 - \eta\varepsilon y &= 0,\\
\xi y + \nu\varepsilon xy + \eta(1+\varepsilon x^2) &= 0,\\
-\xi x + \nu(1+\varepsilon y^2) + \eta\varepsilon xy &= 0,\\
-\xi\sigma_3 - \nu(\sigma_2 + 2\varepsilon y) - \eta(\sigma_1 + \varepsilon x) - u\cdot 1 - v\varepsilon x &= 0.
\end{aligned}
\tag{46}
$$

Возможны два случая: а) $u = v = w = 0$ и б) $u \neq 0$, $v \neq 0$, $w \neq 0$.

В случае а) необходимо $\xi = \nu = \eta = 0$, что невозможно. В случае б) $\xi = \alpha u$, $\nu = \alpha v$, $\eta = \alpha w$ при некоторой функции $\alpha = \alpha(x, y)$. Поэтому из 1-го и 2-го, 4-го и 5-го уравнений (46) получаем

$$
\begin{aligned}
\frac{\xi}{\eta} = \frac{u}{w} &= \frac{-(1+\varepsilon x^2 + \varepsilon y^2)}{y(1+\varepsilon x^2+\varepsilon y^2)} = -\frac{1}{y},\\
\frac{\nu}{\eta} = \frac{v}{w} &= \frac{-x(1+\varepsilon x^2 + \varepsilon y^2)}{y(1+\varepsilon x^2+\varepsilon y^2)} = -\frac{x}{y}.
\end{aligned}
$$

Далее, из 3-го и 6-го уравнений (46) следует

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\alpha}\frac{1}{y}\sigma_3 + \frac{1}{\alpha}\frac{x}{y}(\sigma_2 + \varepsilon y) - \frac{1}{\alpha}(\sigma_1 + 2\varepsilon x) - \frac{1}{y} - \varepsilon y &= 0,\\
\frac{1}{y}\sigma_3 + \frac{x}{y}(\sigma_2 + 2\varepsilon y) - (\sigma_1 + \varepsilon x) + \frac{1}{\alpha}\frac{1}{y} + \frac{1}{\alpha}\frac{x}{y}\varepsilon x &= 0.
\end{aligned}
$$

Откуда получаем

$$
\frac{1}{\alpha} = \frac{1+\varepsilon y^2}{\sigma_2 + \sigma_3 + (\varepsilon + \sigma_1)y + 2\varepsilon xy} = \frac{\sigma_1 y - \sigma_2 x - \sigma_3 - \varepsilon xy}{1+\varepsilon x^2}.
$$

Последнее влечет

$$\sigma_1 = \sigma_2 = 0, \quad 1 + \varepsilon x^2 + \varepsilon y^2 + x^2 y^2 = (\sigma_3 + \varepsilon y + 2\varepsilon xy)(-\sigma_3 - \varepsilon xy),$$

что невозможно. Таким образом, рассмотренные алгебры не могут служить алгебрами точечно-траекторных симметрий какого-либо 2-мерного КП типа B_1. Аналогично "отсеиваются" еще четыре алгебры упомянутой классификации Дж. Ливайна из [13].

Остается заметить, что координатные функции $A^i = A^i(x, y)$ векторного поля $f_0 = A^i\partial_i$ для каждой из шести алгебр теоремы 14 находятся из уравнения $\underset{X}{L} A^i = 2\widetilde{\sigma} A^i$. Например, для алгебры с номером 1 $X = (1, 0)$ $(2\widetilde{\sigma} = \sigma_1)$, и уравнение принимает вид $\partial_1 A^i = \sigma_1 A^i$; его общее решение приведено в теореме 14, 1.б).

В заключение необходимо еще раз остановиться на роли геодезического (пульверизационного) моделирования и на связи полученных с его помощью результатов с результатами других авторов.

В [14] Э. Картан ввел понятие пространства проективной связности и показал, что его геодезические линии локально можно рассматривать как интегральные кривые специального КП, полиномиального 3-й степени, относительно первых производных. Картан поставил задачу так обобщить теорию, чтобы интегральные кривые любого КП можно было рассматривать как геодезические.

Позднее Я.Л. Шапиро распространил результаты Э. Картана по моделированию интегральных кривых КП геодезическими линиями на случай пространств с аффинной связностью [15]. В результате им была создана теория проективных, или включаемых (иначе говоря, моделируемых геодезическими линиями аффинной связности) систем траекторий и путей, а также тесно с ней связанная теория римановых и аффинносвязных пространств с геодезическим и торсообразующим полем многомерных направлений. В дальнейшем в ряде работ Я.Л. Шапиро и его учеников эта теория траекторных морфизмов Картана–Шапиро была расширена до теории конечных траекторных (гомо)морфизмов полиномиальных по "скорости" КП (см., в частности, [9]–[12]). Наконец, пульверизационное моделирование [1]–[5] позволило [16] дать полное решение проблемы геодезического моделирования Картана–Шапиро.

Литература

1. Игошин В.А. *Пульверизационное моделирование квазигеодезических потоков* // ДАН СССР. – 1991. – Т. 320. – № 3. – С. 531–535.
2. Игошин В.А. *Пульверизационное моделирование.* I // Изв. вузов. Математика. – 1992. – № 6. – С. 63–70.
3. Игошин В.А. *Пульверизационное моделирование.* II // Изв. вузов. Математика. – 1994. – № 10. – С. 26–32.
4. Игошин В.А. *Пульверизационное моделирование.* III // Изв. вузов. Математика. – 1995. – № 5. – С. 39–50.
5. Игошин В.А. *Пульверизационное моделирование и точечные симметрии пульверизации* // Изв. вузов. Математика. – 2000. – № 5. – С. 31–36.
6. Lie S., Engel F. *Theorie der Transformationsgruppen.* – Leipzig: Teubner, 1893. – Bd. 3. – 830 s.
7. Овсянников Л.В. *Групповой анализ дифференциальных уравнений.* – М.: Наука, 1978. – 400 с.
8. Ибрагимов Н.Х. *Группы преобразований в математической физике.* – М.: Наука, 1983. – 280 с.
9. Шапиро Я.Л., Игошин В.А. *Гомоморфизмы квазигеодезических потоков* // ДАН СССР. – 1980. – Т.252.–№ 2. – С.303–306.
10. Шапиро Я.Л., Игошин В.А., Яковлев Е.И. *Морфизмы дифференциальных уравнений 2-го порядка и 2-й степени* // Изв. вузов. Математика. – 1984. – № 4. – С. 80–82.
11. Игошин В.А. *О квазигеодезических потоках.* – Горьковск. ун-т. – Горький, 1989. – 67 с. – Деп. в ВИНИТИ 18.01.90, № 392–В90.

12. Игошин В.А. *Гомоморфизмы квазигеодезических потоков 2-й степени* // Изв. вузов. Математика. – 1990. – № 9. – С. 14–21.
13. Levine J. *Classification of collineations in projectively and affinely connected spaces of two dimensions* // Ann. Math. – 1950. – V. 52. – № 2. – P. 456–477.
14. Cartan E. *Sur les varietes a connexion projective* // Bull. Soc. math. France. – 1924. – V. 52. – P. 205–241.
15. Шапиро Я.Л. *Пространства, включающие проективные системы кривых* // Тр. семин. по векторн. и тензорн. анализу. – М.: Изд-во Московск. ун-та, 1948. – № 6. – С. 494–505.
16. Игошин В.А. *Проективная связность Картана и геодезическое моделирование* // "Лобачевский и современная геометрия". Международн. науч. конф. Тез. докл. Ч. 1. – Казань, 1992. – С. 35–36.

Нижегородский государственный университет

Поступила
06.03.1996