ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2004 МАТЕМАТИКА № 6 (505)

УДК 517.929

*Е.И. БРАВЫЙ*

# О РАЗРЕШИМОСТИ ДВУХТОЧЕЧНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ЛИНЕЙНОГО СИНГУЛЯРНОГО ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

## 1. Предварительные сведения

В работе получены условия, при которых решение $x$ задачи

$$(t-a)^{\mu_1}(b-t)^{\mu_2}\ddot{x}(t) = (Tx)(t) + f(t), \quad t \in [a,b],$$
$$x(a) = 0, \quad x(b) = 0,$$

существует, единственно и удовлетворяет неравенству

$$x(t) < 0 \ \text{ при всех } \ t \in (a,b) \tag{1}$$

при каждой почти всюду (п. в.) неотрицательной $f \in L[a,b]$, $f \not\equiv 0$.

Работа [1] была посвящена необходимым условиям для выполнения неравенства (1). Здесь результаты [1] дополняются общим достаточным условием и эффективными коэффициентными признаками. Используется терминология и обозначения из [1].

Рассмотрим краевую задачу

$$\begin{gathered}(\mathcal{L}x)(t) \stackrel{\text{def}}{=} \pi(t)\ddot{x}(t) - (Tx)(t) = f(t), \quad t \in [a,b],\\ x(a) = \alpha, \quad x(b) = \beta,\end{gathered} \tag{2}$$

где $\pi(t) = (t-a)^{\mu_1}(b-t)^{\mu_2}$, $\mu_1, \mu_2 \in [0,1]$; $f$ принадлежит банахову пространству $L[a,b]$ суммируемых на $[a,b]$ вещественных функций; $T$ — линейный ограниченный оператор из банахова пространства непрерывных вещественных функций $C[a,b]$ в $L[a,b]$. Если хотя бы одно из чисел $\mu_1$, $\mu_2$ отлично от нуля, то уравнение $\mathcal{L}x = f$ называется сингулярным [2], [3].

Будем искать решение задачи (2) в банаховом пространстве $D$ функций, определенном в [1]. Отметим, что в пространстве $D$ задача

$$(\mathcal{L}_0 x)(t) \stackrel{\text{def}}{=} \pi(t)\ddot{x}(t) = f(t), \quad t \in [a,b],$$
$$x(a) = \alpha, \quad x(b) = \beta,$$

при любых $f \in L[a,b]$, $\alpha, \beta \in R^1$ имеет единственное решение

$$x(t) = (G_0 f)(t) + \alpha\frac{t-a}{b-a} + \beta\frac{b-t}{b-a}, \quad t \in [a,b],$$

где $G_0 : L[a,b] \to C[a,b]$ — линейный интегральный оператор

$$(G_0 f)(t) = \int_a^b G_0(t,s) f(s)\, ds, \quad t \in [a,b],$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 01-01-00511) и программы "Университеты России" (УР.04.01.001).

явный вид которого приведен в [1].

Если при всех $f \in L[a,b]$, $\alpha, \beta \in R^1$ задача (2) имеет единственное решение $x \in D$, то оператор $G$, ставящий в соответствие каждой функции $f \in L[a,b]$ решение задачи (2) при $\alpha = 0$ и $\beta = 0$, называется оператором Грина этой задачи. Как всякий линейный ограниченный оператор из $L[a,b]$ в $C[a,b]$, оператор Грина $G$ имеет интегральное представление [4]

$$(Gf)(t) = \int_a^b G(t,s) f(s)\, ds, \quad t \in [a,b].$$

Ядро этого представления — функция $G(t,s)$ — называется функцией Грина задачи (2). В случае однозначной разрешимости при всех правых частях решение задачи (2) имеет представление

$$x = Gf + \alpha x_a + \beta x_b,$$

где $G$ — оператор Грина, $x_a$ и $x_b$ — решения задач

$$\mathcal{L}x_a = 0, \quad x_a(a) = 1, \quad x_a(b) = 0, \tag{3}$$

$$\mathcal{L}x_b = 0, \quad x_b(a) = 0, \quad x_b(b) = 1. \tag{4}$$

Будем называть оператор Грина $G : L[a,b] \to C[a,b]$ *строго антитонным*, если выполнено неравенство $(Gf)(t) < 0$ при всех $t \in (a,b)$ для каждой функции $f \in L[a,b]$, $f(t) \geqslant 0$ при п. в. $t \in [a,b]$, $f \not\equiv 0$. Отметим, что оператор Грина $G_0$ строго антитонен.

Достаточные условия строгой антитонности оператора Грина получены, например, в работах [5]–[7]. В данной статье, используя в основном идеи работы [8], уточняем и обобщаем результаты работ [8], [9] об условиях строгой антитонности оператора Грина несингулярной краевой задачи. Здесь будут получены эффективные условия, гарантирующие однозначную разрешимость сингулярной задачи (2) и строгую антитонность ее оператора Грина.

Будем предполагать, что линейный ограниченный оператор $T : C[a,b] \to L[a,b]$ изотонен. Такой оператор имеет представление в виде интеграла Стильтьеса

$$(Tx)(t) = \int_a^b x(s)\, d_s r(t,s),$$

где функция $r(t,s)$ измерима в квадрате $[a,b] \times [a,b]$; $\int\limits_a^b |r(t,s)|\, dt < \infty$ при п. в. $s \in [a,b]$; функции $r(t,\cdot)$ имеют ограниченное изменение на $[a,b]$ при каждом $t \in [a,b]$; $\int\limits_a^b \operatorname*{Var}\limits_{s\in[a,b]} r(t,s)\, dt < \infty$, причем при всех $t \in [a,b]$ функции $r(t,\cdot)$ не убывают на $[a,b]$ ([10], с. 317).

## 2. Основные результаты

**Теорема 1.** *Если оператор* $B \stackrel{\text{def}}{=} G_0 + G_0 T G_0$ *антитонен, то задача* (2) *однозначно разрешима и ее оператор Грина* $G$ *строго антитонен, причем* $G_0 \leqslant G \leqslant B$.

**Теорема 2.** *Оператор* $B$ *антитонен тогда и только тогда, когда выполнены неравенства*

$$\int_a^b \frac{s-a}{\pi(s)} F(s)\, ds \leqslant b - a, \quad \int_a^b \frac{b-s}{\pi(s)} G(s)\, ds \leqslant b - a,$$

*где*

$$F(s) \stackrel{\text{def}}{=} \int_a^b r(s,\theta)\, d\theta - (b-a) r(s, a+0), \quad G(s) \stackrel{\text{def}}{=} (b-a) r(s, b-0) - \int_a^b r(s,\theta)\, d\theta.$$

**Замечание 1.** Если линейный оператор $T$ определен равенством

$$(Tx)(t) = \sum_{i=1}^{k} p_i(t) x_{h_i}(t), \quad t \in [a,b], \tag{5}$$

где $p_i \in L[a,b]$, $p_i(t) \geqslant 0$ при $t \in [a,b]$, $i = 1, \dots, k$,

$$x_{h_i}(t) \overset{\text{def}}{=} \begin{cases} x(h_i(t)), & \text{если } h_i(t) \in [a,b]; \\ 0, & \text{если } h_i(t) \notin [a,b], \end{cases}$$

$h_i : [a,b] \to R^1$, $i = 1, \dots, k$, — измеримые функции, то

$$F(s) = \sum_{i=1}^{k} \widetilde{p}_i(s)(b - h_i(s)), \quad G(s) = \sum_{i=1}^{k} \widetilde{p}_i(s)(h_i(s) - a),$$

где

$$\widetilde{p}_i(s) \overset{\text{def}}{=} \begin{cases} p_i(s), & \text{если } h_i(s) \in (a,b); \\ 0, & \text{если } h_i(s) \notin (a,b), \end{cases} \quad s \in [a,b], \quad i = 1, \dots, k.$$

**Следствие 1.** Если оператор $T : C[a,b] \to L[a,b]$ имеет вид (5), где $p_i \in L[a,b]$, $p_i(t) \geqslant 0$ при $t \in [a,b]$, $i = 1, \dots, k$, и

$$h_i(t) - a \leqslant M(t-a), \quad b - h_i(t) \leqslant M(b-t), \quad t \in [a,b], \quad i = 1, \dots, k,$$

при такой постоянной $M > 1$, что

$$\int_a^b (s-a)^{1-\mu_1}(b-s)^{1-\mu_2} \sum_{i=1}^{k} p_i(s)\, ds \leqslant \frac{b-a}{M},$$

то задача (2) однозначно разрешима, ее оператор Грина $G$ строго антитонен и $G_0 \leqslant G \leqslant B$.

**Теорема 3.** *Если выполнены неравенства*

$$\int_a^b \frac{s-a}{\pi(s)} \widetilde{F}(s)\, ds \leqslant b-a, \quad \int_a^b \frac{b-s}{\pi(s)} \widetilde{G}(s)\, ds \leqslant b-a,$$

*где*

$$\widetilde{F}(s) \overset{\text{def}}{=} \int_a^b r(s,\theta)\, d\theta - (b-a) r(s,a), \quad \widetilde{G}(s) \overset{\text{def}}{=} (b-a) r(s,b) - \int_a^b r(s,\theta)\, d\theta,$$

*то решения задач* (3) *и* (4) *положительны в интервале* $(a,b)$.

**Замечание 2.** Из теорем 2 и 3 следует, что в условиях теоремы 3 задача (2) имеет единственное решение при всех $f \in L[a,b]$, $\alpha, \beta \in R^1$, и справедлива теорема о дифференциальном неравенстве: *если* $x, y \in D$, $x \neq y$ *и*

$$(\mathcal{L}x)(t) \leqslant (\mathcal{L}y)(t) \;\; \textit{при п. в.} \;\; t \in [a,b],$$
$$x(a) \geqslant y(a), \quad x(b) \geqslant y(b),$$

*то*

$$x(t) > y(t) \;\; \textit{при} \;\; t \in (a,b).$$

**Следствие 2.** Если оператор $T : C[a,b] \to L[a,b]$ имеет вид (5), где $p_i \in L[a,b]$, $p_i(t) \geqslant 0$ при $t \in [a,b]$, $i = 1, \dots, k$, и выполнены неравенства

$$\int_a^b (s-a)^{1-\mu_1}(b-s)^{-\mu_2} \sum_{i=1}^{k} \widehat{p}_i(s)(b - h_i(s))\, ds \leqslant b-a,$$

$$\int_a^b (s-a)^{-\mu_1}(b-s)^{1-\mu_2} \sum_{i=1}^{k} \widehat{p}_i(s)(h_i(s) - a)\, ds \leqslant b-a,$$

где

$$\widehat{p}_i(s) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} p_i(s), & \text{если } h_i(s) \in [a,b]; \\ 0, & \text{если } h_i(s) \notin [a,b], \end{cases} \quad s \in [a,b], \quad i = 1, \dots, k,$$

то задача (2) однозначно разрешима, ее оператор Грина строго антитонен и решения задач (3), (4) положительны в $(a,b)$.

## 3. Доказательства основных результатов

**Доказательство теоремы 2.** Линейный ограниченный оператор $B : L[a,b] \to C[a,b]$ имеет представление $(Bf)(t) = \int\limits_a^b B(t,s) f(s)\, ds$, $t \in [a,b]$, где

$$B(t,s) = G_0(t,s) + \frac{1}{\pi(s)(b-a)} \left[ \frac{b-t}{b-a} \int_a^t \frac{\tau - a}{\pi(\tau)} K(s,\tau)\, d\tau + \right.$$
$$\left. + \frac{t-a}{b-a} \int_t^b \frac{b-\tau}{\pi(\tau)} K(s,\tau)\, d\tau \right], \quad t,s \in (a,b), \tag{6}$$
$$K(s,\tau) = \int_s^b r(\tau,\theta)\, d\theta (s-a) + \int_a^s r(\tau,\theta)\, d\theta (s-b), \quad s,\tau \in (a,b).$$

Функция $B(t,s)$ непрерывна при $t,s \in (a,b)$. Оператор $B$ антитонен тогда и только тогда, когда $B(t,s) \leqslant 0$ при всех $t,s \in (a,b)$. Рассмотрим случай $a < s \leqslant t < b$. Тогда $B(t,s) \leqslant 0$ в том и только том случае, когда

$$\int_a^t \frac{\tau - a}{\pi(\tau)} \frac{K(s,\tau)}{s-a}\, d\tau + \frac{t-a}{b-t} \int_t^b \frac{b-\tau}{\pi(\tau)} \frac{K(s,\tau)}{s-a}\, d\tau \leqslant b - a, \quad t,s \in (a,b).$$

Функция $K(s,\tau)/(s-a)$ не возрастает по $s$ при каждом $\tau \in [a,b]$, причем $\lim\limits_{s \to a+0} \frac{K(s,\tau)}{s-a} = F(\tau)$. Таким образом, $B(t,s) \leqslant 0$ при $a < s \leqslant t < b$ тогда и только тогда, когда

$$H(t) \stackrel{\text{def}}{=} \int_a^t \frac{\tau - a}{\pi(\tau)} F(\tau)\, d\tau + \frac{t-a}{b-t} \int_t^b \frac{b-\tau}{\pi(\tau)} F(\tau)\, d\tau \leqslant b - a, \quad t \in (a,b).$$

Кроме того, из предыдущего следует, что в условиях теоремы $B(t,s) = 0$ при некотором $s \in (a,t)$ в том и только том случае, когда

$$r(\tau,\theta) \equiv r_1(\tau) \ \text{ при } \ \theta \in (a,s) \ \text{ и при п. в. } \ \tau \in [a,b]. \tag{7}$$

Следовательно, в этом случае $B(t,\theta) = 0$ при всех $\theta \in (a,s]$.

Функция $H(t)$ не убывает, причем $H(t) \leqslant b - a$ при всех $t \in (a,b)$ тогда и только тогда, когда $\int\limits_a^b \frac{\tau - a}{\pi(\tau)} F(\tau)\, d\tau \leqslant b - a$.

Аналогично заключаем, что $B(t,s) \leqslant 0$ при всех $a < t \leqslant s < b$ тогда и только тогда, когда $\int\limits_a^b \frac{b-\tau}{\pi(\tau)} G(\tau)\, d\tau \leqslant b - a$. Кроме того, в условиях теоремы $B(t,s) = 0$ при некотором $s \in (t,b)$ в том и только том случае, когда

$$r(\tau,\theta) \equiv r_2(\tau) \ \text{ при } \ \theta \in (s,b) \ \text{ при п. в. } \ \tau \in [a,b]. \tag{8}$$

Следовательно, в этом случае $B(t,\theta) = 0$ при всех $\theta \in [s,b)$. $\square$

Всюду ниже через $\rho(A)$ обозначаем спектральный радиус комплексного расширения линейного оператора $A$, $I$ — тождественный оператор.

**Лемма 1.** $\rho(TG_0) = \rho(G_0 T)$.

**Доказательство.** Здесь рассматриваем комплексные расширения операторов в комплексификациях пространств ([11], с. 477). Пусть $\lambda$ — комплексное число, $\lambda \neq 0$. Задача

$$\lambda\pi\ddot{x} = Tx + f, \quad x(a) = 0, \quad x(b) = 0, \tag{9}$$

эквивалентна уравнению

$$\lambda x = G_0Tx + G_0f \tag{10}$$

в пространстве $C[a,b]$ и уравнению

$$\lambda z = TG_0z + f, \tag{11}$$

где $z \in L[a,b]$ связан с $x$ равенством $x = G_0z$.

Если оператор $\lambda I - G_0T : C[a,b] \to C[a,b]$ обратим, то уравнение (10), следовательно, и задача (9) имеют единственное решение при всех $f \in L[a,b]$. Поэтому и уравнение (11) имеет единственное решение при всех $f \in L[a,b]$. Таким образом, оператор $\lambda I - TG_0 : L[a,b] \to L[a,b]$ обратим.

Если оператор $\lambda I - TG_0 : L[a,b] \to L[a,b]$ обратим, то (11), а следовательно, (9) и (10) имеют единственное решение при любых $f \in L[a,b]$. Обратимость оператора $\lambda I - G_0T : C[a,b] \to C[a,b]$ в этом случае следует из леммы 2 работы [12]. Для удобства приведем доказательство. Положим в (10) $f \equiv Tg$, где $g \in C[a,b]$, и определим $y \overset{\text{def}}{=} x + g$. Тогда $y$ — единственное решение уравнения $\lambda y = G_0Ty + \lambda g$ при любой $g \in C[a,b]$. Таким образом, оператор $\lambda I - G_0T$ обратим, ненулевые точки спектров операторов $TG_0$ и $G_0T$ совпадают, поэтому совпадают и спектральные радиусы этих операторов. □

**Лемма 2.** *Если* $B \overset{\text{def}}{=} G_0 + G_0TG_0 \leqslant 0$, *то* $\rho(TG_0) = \rho(G_0T) < 1$.

Отметим, что в работах [8], [9] условия $B \leqslant 0$ и $\rho(G_0T) < 1$ рассматривались как независимые.

**Доказательство.** Обозначим $\lambda \overset{\text{def}}{=} \rho(G_0T) = \rho(TG_0)$. Изотонный оператор

$$K \overset{\text{def}}{=} -TG_0 : L[a,b] \to L[a,b]$$

слабо вполне непрерывен ([13], с. 135). Таким образом, $K^2$ — вполне непрерывный оператор ([14], с. 549). Из утверждений книг ([14], VII.4.6) и ([15], с. 401) следует, что $\lambda = \rho(K)$ — позитивное собственное число оператора $K$, т. е. существует такая функция $v \in L[a,b]$, $v(t) \geqslant 0$ при п. в. $t \in [a,b]$, $v \not\equiv 0$, что $\lambda v = Kv$. Тогда $Bv = G_0(v + TG_0v) = G_0(v - Kv) = (1-\lambda)G_0v$. Отсюда следует, что если $\lambda > 1$, то $(Bv)(t) > 0$, $t \in (a,b)$, что противоречит антитонности оператора $B$.

Предположим, что $\lambda = 1$. Тогда $B$ — антитонный интегральный оператор, непрерывное в $(a,b)\times(a,b)$ ядро которого определено равенством (6), и существует такая п. в. неотрицательная функция $v \in L[a,b]$, $v \not\equiv 0$, что $(Bv)(t) = 0$ при всех $t \in [a,b]$. Пусть $E \subset [a,b]$ — множество ненулевой меры, на котором $v(t) > 0$. Пусть $t_1 \in (a,b)$ — такая точка, что для любой ее окрестности $\omega$ мера Лебега пересечения $\omega \cap E$ положительна. Очевидно, что по крайней мере две такие точки существуют. Тогда $B(t,t_1) = 0$ при всех $t \in [a,b]$, в противном случае $(Bv)(t) < 0$ в некоторой точке $t \in [a,b]$. Отсюда и из (7), (8) следует, что при некоторых функциях $C_1(t)$, $C_2(t)$ выполнены равенства $r(t,s) = C_1(t)$ при $s \in (a,t_1)$ и $r(t,s) = C_2(t)$ при $s \in (t_1,b)$. Так как есть другие точки, обладающие тем же свойством, что и $t_1$, то $r(t,s) = C(t)$ при всех $t \in (a,b)$ и при некоторой функции $C(t)$. Тогда оператор $TG_0$ нулевой и число $\lambda = 1$ не является его спектральным радиусом. Таким образом, $\lambda < 1$. □

**Доказательство теоремы 1.** Задача $\mathcal{L}x = f$, $x(a) = 0$, $x(b) = 0$ эквивалентна уравнению

$$x = G_0Tx + G_0f \tag{12}$$

в пространстве $C[a,b]$. Так как $\rho(G_0T) < 1$ по лемме 2, то это уравнение имеет единственное решение, удовлетворяющее равенству $G_0Tx = (G_0T)^2x + G_0TG_0f$, и, следовательно, равенству $x = (G_0T)^2x + Bf$. Учитывая, что $\rho((G_0T)^2) = (\rho(G_0T))^2 < 1$, получаем

$$x = (I - (G_0T)^2)^{-1}Bx = (I + (G_0T)^2 + (G_0T)^4 + \cdots)Bf. \tag{13}$$

Отсюда $G = (I + (G_0T)^2 + (G_0T)^4 + \cdots)B$. Из этого равенства и из того, что операторы $I$ и $G_0T$ изотонны, а $B$ антитонен, следует, что $G$ — антитонный оператор и $G \leqslant B$. Из равенства (12) при $x = Gf$ теперь следует, что $G - G_0 = G_0TG$ — изотонный оператор. Таким образом, $G_0 \leqslant G$.

Предположим, что оператор $G$ не является строго антитонным. Пусть $f \not\equiv 0$, $f(t) \geqslant 0$ при п. в. $t \in [a,b]$ и $x(t_0) = 0$ в некоторой точке $t_0 \in (a,b)$. Рассмотрим второе слагаемое в разложении (13): $((G_0T)^2Bf)(t_0) = (G_0\psi)(t_0) = 0$, где $\psi \stackrel{\text{def}}{=} TG_0TG_0f + TG_0TG_0TG_0f$. Так как оператор $G_0$ строго антитонен, то $\psi \equiv 0$. Таким образом,

$$TG_0TG_0f \equiv 0, \tag{14}$$

т. к. в противном случае эта функция была бы собственной функцией оператора $-TG_0$, спектральный радиус которого, как следует из леммы 2, меньше единицы.

Если $Tx \equiv p_ax(a)+p_bx(b)$, $p_a, p_b \in L[a,b]$, то $G = G_0$. Если $Tx \not\equiv p_ax(a)+p_bx(b)$, то $(TG_0f)(t) \leqslant 0$ при п. в. $t \in [a,b]$ и $TG_0f \not\equiv 0$, т. к. $(G_0f)(t) < 0$ при $t \in (a,b)$. Таким же образом получаем $(TG_0)^2f \not\equiv 0$, что противоречит (14). $\square$

**Доказательство теоремы 3.** В условиях теоремы выполнены условия теоремы 2 и, следовательно, условия леммы 2. Поэтому $\rho(G_0T) < 1$. Покажем, что решение задачи (4) положительно при $t \in (a,b]$. Решение этой задачи удовлетворяет уравнению $x = G_0Tx + y$ в пространстве $C[a,b]$, где $y \stackrel{\text{def}}{=} \frac{t-a}{b-a}$, $t \in [a,b]$. Учитывая, что $\rho(G_0T) < 1$, получаем

$$x = (I - G_0T)^{-1}y = (I + G_0T + (G_0T)^2 + \cdots)y = (I + (G_0T)^2 + (G_0T)^4 + \cdots)(I + G_0T)y.$$

Имеем

$$(Ty)(t) = \int_a^b \frac{t-a}{b-a}\, d_sr(t,s) = r(t,b) - \frac{1}{b-a}\int_a^b r(t,s)\,ds, \quad t \in [a,b],$$

$$z(t) \stackrel{\text{def}}{=} y(t) + (G_0Ty)(t) = \frac{t-a}{b-a} + \frac{t-b}{b-a}\int_a^t \frac{s-a}{\pi(s)}(Ty)(s)\,ds + \frac{t-a}{b-a}\int_t^b \frac{s-b}{\pi(s)}(Ty)(s)\,ds, \quad t \in [a,b].$$

Таким образом, $z(t) \geqslant 0$, $t \in [a,b]$, тогда и только тогда, когда выполнено неравенство

$$\widetilde{H}(t) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{b-t}{t-a}\int_a^t \frac{s-a}{\pi(s)}\widetilde{G}(s)\,ds + \int_t^b \frac{b-s}{\pi(s)}\widetilde{G}(s)\,ds \leqslant b-a, \quad t \in (a,b).$$

Функция $\widetilde{H}(t)$ не возрастает на $(a,b)$, поэтому последнее неравенство выполнено тогда и только тогда, когда

$$\int_a^b \frac{b-s}{\pi(s)}\widetilde{G}(s)\,ds \leqslant b-a.$$

Итак, в условиях теоремы

$$z(t) \geqslant 0, \quad t \in [a,b], \quad \text{причем} \quad Tz \not\equiv 0, \tag{15}$$

т. к. в противном случае $T(I + G_0T)y \equiv 0$ и $Ty$ — собственная функция оператора $-G_0T$, спектральный радиус которого меньше единицы (если же $Ty \equiv 0$, то $y$ — решение задачи (4)). Так как оператор $G_0$ строго антитонен, то из (15) и равенства

$$x = (I + (G_0T)^2 + (G_0T)^4 + \cdots)z$$

следует, что $x(t) > 0$, $t \in (a,b]$, при $Tx \not\equiv p_a x(a) + p_b x(b)$, $p_a, p_b \in L[a,b]$. Если же $Tx \equiv p_a x(a) + p_b x(b)$, то

$$x(t) = (G_0 T + (G_0 T)^2 + \cdots)y(t) + z(t) > 0, \quad t \in (a,b].$$

Доказательство положительности решения задачи (3) аналогично. □

**Доказательство следствий 1, 2.** В условиях следствия 1 выполнены условия теорем 1, 2. В условиях следствия 2 выполнены условия теорем 1, 2, 3. □

## Литература


1. Бравый Е.И. *О необходимых условиях отрицательности функции Грина двухточечной задачи* // Изв. вузов. Математика. – 2001. – № 6. – С. 12–22.
2. Кигурадзе И.Т., Шехтер Б.Л. *Сингулярные краевые задачи для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка* // Итоги науки и техн. ВИНИТИ. Современ. пробл. матем. – 1987. – Т. 30. – С. 105–201.
3. Лабовский С.М. *О положительных решениях двухточечной краевой задачи для линейного сингулярного функционально-дифференциального уравнения* // Дифференц. уравнения. – 1988. – Т. 24. – № 10. – С. 1695–1704.
4. Азбелев Н.В., Максимов В.П., Рахматуллина Л.Ф. *Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений.* – М.: Наука, 1991. – 280 с.
5. Азбелев Н.В., Домошницкий А.И. *К вопросу о линейных дифференциальных неравенствах.* I // Дифференц. уравнения. – 1991. – Т. 27. – № 3. – С. 376–384.
6. Азбелев Н.В., Домошницкий А.И. *К вопросу о линейных дифференциальных неравенствах.* II // Дифференц. уравнения. – 1991. - Т. 27. – № 6. - С. 923–931.
7. Азбелев Н.В., Алвеш М., Бравый Е.И. *О сингулярных краевых задачах для линейного функционально-дифференциального уравнения второго порядка* // Изв. вузов. Математика. – 1999. – № 2. – С. 3–11.
8. Кобяков И.И. *Условия отрицательности функции Грина двухточечной краевой задачи с отклоняющимся аргументом* // Дифференц. уравнения. – 1972. – Т. 8. – № 3. – С. 443–452.
9. Лихачева Н.Н. *Теорема Валле-Пуссена для одного класса функционально-дифференциальных уравнений* // Изв. вузов. Математика. – 1997. – № 5. – С. 30–37.
10. Канторович Л.В., Вулих Б.З., Пинскер А.Г. *Функциональный анализ в полуупорядоченных пространствах.* – М.–Л.: Гостехиздат, 1950. – 548 с.
11. Канторович Л.В., Акилов Г.П. *Функциональный анализ.* – М.: Наука, 1977. – 548 с.
12. Максимов В.П., Рахматуллина Л.Ф. *Линейное функционально-дифференциальное уравнение, разрешенное относительно производной* // Дифференц. уравнения. – 1973. – Т. 9. – № 12. – С. 2231–2240.
13. *Интегральные уравнения* / Забрейко П.П. и др. – М.: Наука, 1968. – 448 с.
14. Данфорд Н., Шварц Дж. *Линейные операторы. Общая теория.* – М.: Ин. лит., 1962. – 895 с.
15. *Функциональный анализ* / Под ред. С.Г. Крейна. – М.: Наука, 1972. – 544 с.



*Пермский государственный технический университет*



*Поступила* 11.05.2000