ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2001 МАТЕМАТИКА № 2 (465)

УДК 517.518

С.С. ПЛАТОНОВ

ОБ ОДНОМ ОПРЕДЕЛЕНИИ ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОГО ТИПА НА ОДНОРОДНЫХ МНОГООБРАЗИЯХ

Риманово многообразие M называется двухточечным однородным (д. о.) если для любых пар точек $p_1, p_2 \in M$ и $q_1, q_2 \in M$, удовлетворяющих условию $\rho(p_1,p_2) = \rho(q_1,q_2)$ ($\rho(p,q)$ — расстояние между точками p и q), существует такая изометрия g многообразия M, что $g(p_1) = q_1$ и $g(p_2) = q_2$. Хорошо известно [1], что все д. о. многообразия — это евклидовы пространства, окружность S^1 и симметрические пространства ранга 1 компактного и некомпактного типов. В последние годы активно изучаются различные задачи теории приближений функций на д. о. многообразиях (напр., [2]–[5]). В качестве аппарата приближения на компактных д. о. многообразиях используются сферические полиномы, на некомпактных д. о. многообразиях в качестве приближающих функций должны выступать какие-нибудь аналоги целых функций экспоненциального типа. Так в [5], [6] в качестве аппарата приближения используются целые векторы экспоненциального типа в некоторых банаховых пространствах, но эти векторы не являются функциями на пространстве M. В данной работе в пространствах $L_p(M)$ определяются целые L_p-функции экспоненциального типа для произвольного д. о. многообразия M. Установлено, что для евклидова пространства введенные функции совпадают с обычными целыми функциями экспоненциального типа, принадлежащими пространству L_p, а для компактных д. о. многообразий введенные функции совпадают со сферическими полиномами.

Фиксируем некоторые постоянные обозначения. Через M будет обозначаться д. о. риманово многообразие, G — группа всех изометрий риманова многообразия M, o — некоторая фиксированная точка в M, K — стационарная подгруппа точки o в группе G. Группа G естественным образом транзитивно действует на M и соответственно пространство M можно отождествить с фактор-пространством левых смежных классов $M = G/K$, при этом точка o отождествляется с смежным классом eK (e — единица в группе G).

Для любого множества X с мерой $d\sigma$ через $L_p(X, d\sigma)$ будем обозначать, как обычно, банахово пространство (БП), состоящее из измеримых комплекснозначных функций $f(x)$ на X с конечной нормой

$$\|f\|_p = \|f\|_{L_p(X)} = \left(\int_X |f(x)|^p \, d\sigma\right)^{1/p}, \quad 1 \le p < \infty.$$

Если X — метрическое пространство, то через $L_\infty(X)$ будем обозначать БП равномерно непрерывных ограниченных функций на X с нормой

$$\|f\|_\infty = \|f\|_{L_\infty(X)} = \sup_{x\in X} |f(x)|.$$

Через $C(X)$ будем обозначать множество всех непрерывных функций на X, а через $C_c(X)$ — множество непрерывных функций с компактным носителем (все функции предполагаются комплекснозначными). В частности, на римановом многообразии M возникают БП $L_p(M) = L_p(M, dx)$ и $L_\infty(M)$, где dx — элемент римановой меры на M.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 99-01-00782).

Пусть T_xM – множество касательных векторов к многообразию M, а $S(x)$ — множество единичных касательных векторов (единичная сфера) в точке $x \in M$. Пусть B — многообразие всех единичных касательных векторов к многообразию M. Точки многообразия B имеют вид (x,ξ), где $x \in M$, $\xi \in S(x)$. Группа G естественным образом действует на B, если положить $g(x,\xi) = (gx, g_*\xi)$, где $g \in G$, g_* — индуцированное отображение касательных векторов. Так как M — двухточечное однородное многообразие, то это действие транзитивно (см. [7], гл. IX, § 5; [8], гл. 1, § 4), поэтому на B существует единственная, с точностью до умножения на положительное число, G-инвариантная мера $dv(x,\xi)$ ([8], гл. 1, теорема 1.9). Пусть $L_p(B) = L_p(B, dv)$ при $1 \le p < \infty$, $L_\infty(B)$ определено выше.

Обозначим через $d\sigma_x(\xi)$ элемент объема сферы $S(x)$ и пусть σ — полный объем этой сферы. Из свойств инвариантных мер на однородных пространствах ([8], гл. I, § 1, предложение 1.13) следует, что для некоторой положительной постоянной $A > 0$ и для любой функции $F(x,\xi) \in C_c(B)$ справедлива формула

$$\int_M \left(\int_{S(x)} F(x,\xi)\, d\sigma_x(\xi) \right) dx = A \int_B F(x,\xi)\, dv(x,\xi).$$

Так как мера dv определена с точностью до умножения на положительное число, то нормируем эту меру так, чтобы $A = \sigma$. Тогда

$$\int_M \left(\int_{S(x)} F(x,\xi)\, d\sigma_x(\xi) \right) dx = \sigma \int_B F(x,\xi)\, dv(x,\xi). \tag{1}$$

Так как $C_c(B)$ плотно в $L_1(B)$, то (1) справедливо и для любой функции $F(x,\xi) \in L_1(B)$.

Из единственности, с точностью до множителя, инвариантного интеграла на однородном многообразии следует также, что

$$\int_B F(x,\xi)\, dv(x,\xi) = A \int_G F(gx_0, g_*\xi_0)\, dg, \tag{2}$$

где dg — элемент меры Хаара на группе G, (x_0, ξ_0) — любая фиксированная точка из B, $A > 0$ — не зависящая от F константа. Из (2) следует, что при $F \in L_p(B)$, $1 \le p < \infty$,

$$\|F\|^p_{L_p(B)} = A \int_G |F(gx_0, g_*\xi_0)|^p\, dg.$$

Естественным образом пространство $L_p(M)$ вкладывается в $L_p(B)$, если для $f(x) \in L_p(M)$ положить $f(x,\xi) = f(x)$. Из (1) следует, что для $f(x) \in L_1(M)$

$$\int_B f(x)\, dv(x,\xi) = \int_M f(x)\, dx,$$

и при $f \in L_p(M)$, $1 \le p < \infty$,

$$\|f\|_{L_p(M)} = \|f\|_{L_p(B)}, \tag{3}$$

т. е. вложение $L_p(M) \subset L_p(B)$ изометрично (очевидно, равенство (3) справедливо и при $p = \infty$). В дальнейшем будем постоянно пользоваться этим вложением и считать, что $L_p(M)$ — подпространство в $L_p(B)$. Для краткости будем часто писать $\|F\|_p$ вместо $\|F\|_{L_p(B)}$.

Пусть $\gamma(x,\xi;t)$ для $(x,\xi) \in B$ — геодезическая линия на M, удовлетворяющая условиям $\gamma(x,\xi;0) = x$, $\frac{d}{dt}\gamma(x,\xi;t)\big|_{t=0} = \xi$ и для любой функции $F(x,\xi) \in L_p(B)$ и $t \in \mathbb{R}$

$$F^t(x,\xi) = F(\gamma(x,\xi;t), \tfrac{d}{dt}\gamma(x,\xi;t)).$$

Из свойств геодезических легко получить

$$(F^t)^s = F^{t+s} \quad \forall t, s \in \mathbb{R}. \tag{4}$$

Лемма 1. *Если* $F(x,\xi) \in C_c(B)$, *то*

$$\int_B F(x,\xi)\,dv = \int_B F^t(x,\xi)\,dv \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Доказательство. Фиксируем точку $o \in M$ и единичный касательный вектор $\xi_0 \in T_oM$. Пусть $\gamma(o,\xi_0;t)$ — соответствующая геодезическая. Известно ([7], гл. IV, теорема 3.3), что на д. о. многообразии геодезическую можно представить в виде

$$\gamma(o,\xi_0;t) = R(t)o, \tag{5}$$

где $R(t)$ — некоторая однопараметрическая подгруппа в группе Ли G (точнее говоря, в [7] рассматривается случай, когда M — симметрическое пространство, но для остальных д. о. многообразий соотношение (5) очевидно).

Для изометрии $g \in G$ справедливы равенства

$$g\gamma(x,\xi;t) = \gamma(gx, g_*\xi;t); \tag{6}$$

$$g_*\frac{d}{dt}\gamma(x,\xi;t) = \frac{d}{dt}\gamma(gx, g_*\xi;t). \tag{7}$$

Пользуясь соотношениями (2), (5)–(7) и инвариантностью меры Хаара на G относительно правых сдвигов (все группы Ли G, соответствующие д. о. многообразиям, унимодулярны), получим

$$\begin{aligned}\int_B F^t(x,\xi)\,dv &= \int_B F\Big(\gamma(x,\xi;t), \frac{d}{dt}\gamma(x,\xi;t)\Big)\,dv = \\ &= A\int_G F(\gamma(go, g_*\xi_0;t))\,dg = A\int_G F(gR(t)o, g_*R(t)_*\xi_0)\,dg = \\ &= A\int_G F(gR(t)o, \big(gR(t)\big)_*\xi_0)\,dg = A\int_G F(go, g_*\xi_0)\,dg = \int_B F(x,\xi)\,dv. \quad \square\end{aligned}$$

Так как $C_c(B)$ плотно в пространстве $L_p(B)$ при $1 \le p < \infty$, то из леммы 1 следует, что отображение $F \to F^t$ переводит пространство $L_p(B)$ в себя и при этом

$$\|F^t\|_p = \|F\|_p. \tag{8}$$

При $p = \infty$ соотношение (8), очевидно, также выполняется.

Объединяя соотношения (4) и (8), получаем

Предложение 1. *Семейство операторов*

$$U(t) : F \mapsto F^t, \quad t \in \mathbb{R},$$

образует сильно непрерывную изометрическую группу операторов в БП $L_p(B)$, $1 \le p \le \infty$.

Производящим оператором для группы $U(t)$ служит оператор дифференцирования

$$D : F(x,\xi) \mapsto F'(x,\xi) = \frac{d}{dt}F^t(x,\xi)\Big|_{t=0}.$$

В [9] приведено определение целого вектора степени ν (экспоненциального типа) для произвольной ограниченной сильно непрерывной группы операторов в БП. Следуя [9], дадим

Определение 1. Функция $F(x,\xi) \in L_p(B)$ называется целым вектором экспоненциального типа степени ν, если функция $U(t)F = F^t$ продолжима на комплексную z-плоскость ($z = t + is$) как целая функция со значениями в $L_p(B)$, и для любого $\varepsilon > 0$ существует такая постоянная C_ε, что

$$\|U(z)F\|_p \le C_\varepsilon e^{(\nu+\varepsilon)|z|}. \tag{9}$$

Обозначим множество всех целых векторов степени ν в $L_p(B)$ через $\mathfrak{M}_{\nu p}(B)$.

Положим $\mathfrak{M}_{\nu p} = \mathfrak{M}_{\nu p}(M) := L_p(M) \cap \mathfrak{M}_{\nu p}(B)$ (при этом пользуемся вложением $L_p(M) \subset L_p(B)$). Функции из $\mathfrak{M}_{\nu p}$ будем называть целыми L_p-функциями степени ν на M.

Приведем по [9] некоторые свойства целых векторов степени ν в $L_p(B)$ (они справедливы для произвольной ограниченной сильно непрерывной группы операторов в БП).

Предложение 2. 1) *Условие* (9) *эквивалентно условию*[1]

$$\|U(z)F\|_p \leq Ce^{\nu|s|}, \quad z = t + is,$$

где $C = \|F\|_p$.

2) *Множество* $\mathfrak{M}_{\nu p}(B)$ *является замкнутым линейным подпространством в* $L_p(B)$.

3) *Для того чтобы функция* $F \in \mathfrak{M}_{\nu p}(B)$, *необходимо и достаточно, чтобы для всякого натурального* r *выполнялось неравенство* (*аналог неравенства Бернштейна*)

$$\|D^r F\|_p \leq \nu^r \|F\|_p. \tag{10}$$

В пространстве $L_p(B)$ возникает естественное квазирегулярное представление π группы G, если положить

$$(\pi(g)F)(x, \xi) = F(g^{-1}x, g_*^{-1}\xi).$$

Отметим, что это представление унитарно (т. е. $\|\pi(g)F\|_p = \|F\|_p \ \forall g \in G$) и подпространство $L_p(M)$ инвариантно относительно представления π.

Лемма 2. *Подпространство* $\mathfrak{M}_{\nu p}(B)$ *инвариантно относительно представления* π.

Доказательство. Из соотношений (6), (7) следует, что

$$\pi(g)F^t = \bigl(\pi(g)F\bigr)^t \quad \forall F \in L_p(B), \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Последнее соотношение можно также переписать в виде

$$U(t)\pi(g)F = \pi(g)U(t)F.$$

Пусть $F \in \mathfrak{M}_{\nu p}(B)$. Функцию $U(t)\bigl(\pi(g)F\bigr)$ продолжим на комплексные значения z, полагая

$$U(z)\bigl(\pi(g)F\bigr) = \pi(g)\bigl(U(z)F\bigr), \quad z = t + is.$$

Очевидно, получится целая аналитическая функция и, т. к. оператор $\pi(g)$ унитарный,

$$\|U(z)\bigl(\pi(g)F\bigr)\|_p = \|U(z)F\|_p \leq C_\varepsilon e^{(\nu+\varepsilon)|z|},$$

следовательно, $\pi(g)F \in \mathfrak{M}_{\nu p}(B)$. $\square$

Следствие. Линейное подпространство $\mathfrak{M}_{\nu p}(M)$ замкнуто и π-инвариантно.

Рассмотрим случай, когда M — окружность S^1. Окружность S^1 реализуем как фактор-пространство $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, т. е. точки S^1 — это действительные числа x с точностью до прибавления чисел вида $2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. В каждой точке $x \in S^1$ существуют ровно два единичных касательных вектора, которые будем обозначать $(+1)$ и (-1). Естественным образом функции на S^1 отождествляются с 2π-периодическими функциями $f(x)$, $x \in \mathbb{R}$, а функции на B имеют вид $F(x, \varepsilon)$, где $\varepsilon = \pm 1$, $x \in \mathbb{R}$ и по x функция F периодическая с периодом 2π. Действие оператора $U(t)$ в этом случае имеет вид

$$(U(t))(x, \varepsilon) = F(x + \varepsilon t, \varepsilon)$$

В частности, для $f(x) \in L_p(M)$

$$(U(t)f)(x, \varepsilon) = f(x + t\varepsilon).$$

Функция f является целой L_p-функцией порядка ν тогда и только тогда, когда f является целым вектором порядка ν в пространстве $L_p(S^1)$ относительно однопараметрической группы

[1] Ввиду ограниченности функции $U(t)F$ на $\mathbb{R}$.

операторов $V(t): f(x) \to f(x+t)$, но, как известно [9], такие функции совпадают с тригонометрическими полиномами степени не более ν. Следовательно, $\mathfrak{M}_{\nu p}(S^1)$ – пространство тригонометрических полиномов степени не более ν.

Теорема 1. *Пусть $M = \mathbb{R}^n$ – евклидово пространство. Тогда множество $\mathfrak{M}_{\nu p}(\mathbb{R}^n)$ совпадает с множеством целых функций на $\mathbb{R}^n$ сферического типа ν, принадлежащих пространству $L_p(\mathbb{R}^n)$.*

Доказательство. А) Временно обозначим через $\mathfrak{M}'_{\nu p}$ множество всех целых аналитических функций на $\mathbb{R}^n$ сферического типа ν, принадлежащих пространству $L_p(\mathbb{R}^n)$. Пусть $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $|x| = (x_1^2 + \cdots + x_n^2)^{1/2}$, $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ — единичный вектор из $\mathbb{R}^n$. Естественным образом касательное пространство в произвольной точке $x \in \mathbb{R}^n$ отождествляется с $\mathbb{R}^n$. Действие оператора $U(t)$ на функцию $f(x) \in L_p(\mathbb{R}^n)$ имеет вид

$$(U(t)f)(x, \xi) = f(x + t\xi).$$

Производящий оператор $Df(x, \xi) = D_\xi f(x)$ совпадает с производной функции f по направлению ξ.

Пусть $f \in \mathfrak{M}'_{\nu p}$. Тогда справедливо неравенство типа неравенства Бернштейна

$$\|D_\xi^k f(x)\|_{L_p(M)} \le \nu^k \|f\|_{L_p(M)}, \quad k = 1, 2, \ldots \tag{11}$$

([10], п. 3.2.6). Используя (1), из (11) получаем

$$\|D^k f\|_{L_p(B)} \le \nu^k \|f\|_{L_p(M)}, \quad k = 1, 2, \ldots$$

По предложению 2 из этого следует, что $f(x) \in \mathfrak{M}_{\nu p}(\mathbb{R}^n)$. Тем самым получено включение $\mathfrak{M}'_{\nu p} \subseteq \mathfrak{M}_{\nu p}$.

Б) Для доказательства обратного включения рассмотрим сначала случай $p = \infty$. Будем использовать в рассуждениях некоторые понятия из теории групп Ли и теории представлений групп Ли в БП (напр., [11], [12]). Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли группы G, $\exp : \mathfrak{g} \to G$ — экспоненциальное отображение. По квазирегулярному представлению π обычным образом возникает индуцированное представление алгебры Ли, т. е. для $X \in \mathfrak{g}$ полагаем

$$(Xf)(x) = \frac{d}{dt}\pi(\exp(tX)f)\Big|_{t=0}.$$

Так как пространство $\mathfrak{M}_{\nu\infty}$ замкнуто и π-инвариантно, а представление π в пространстве $L_\infty(M)$ непрерывно (напомним, что $L_\infty(M)$ состоит из равномерно непрерывных функций), то из общей теории представлений групп Ли в БП ([12], гл. 4, § 4) следует, что в $\mathfrak{M}_{\nu\infty}$ существует плотное подмножество $\mathfrak{M}_{\nu\infty}^\infty$ бесконечно дифференцируемых векторов, т. е. таких функций $f(x) \in \mathfrak{M}_{\nu\infty}$, что $X_1 \ldots X_k f \in \mathfrak{M}_{\nu\infty}$ для любых $X_1, \ldots, X_k \in \mathfrak{g}$.

При подходящем выборе векторов $X_i \in \mathfrak{g}$ получим операторы $X_i f = \frac{\partial f}{\partial x_i}$ (будем обозначать $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ через $\partial_{x_i} f$), поэтому, если $f \in \mathfrak{M}_{\nu\infty}^\infty$, для любых неотрицательных целых чисел $r_1, \ldots, r_n$ функция $\partial_x^r f \in \mathfrak{M}_{\nu\infty}$, где $r = (r_1, \ldots, r_n) \in \mathbb{Z}_+^n$, $\partial_x^r = \partial_{x_1}^{r_1} \ldots \partial_{x_n}^{r_n}$.

Для любой функции $f \in \mathfrak{M}_{\nu\infty}$ и любого единичного вектора ξ из неравенства (10) следует, что

$$\|D_\xi^r f\|_{L_\infty(M)} = \sup_{x \in M} |D_\xi^r f(x)| \le \nu^r \|f\|_\infty. \tag{12}$$

Если $f \in \mathfrak{M}_{\nu\infty}^\infty$, то, последовательно применяя неравенство (12), получим

$$\|\partial_{x_1}^{r_1} \ldots \partial_{x_n}^{r_n} f\|_\infty \le \nu^{r_1} \|\partial_{x_2}^{r_2} \ldots \partial_{x_n}^{r_n} f\|_\infty \le \cdots \le \nu^{r_1 + \cdots + r_n} \|f\|_\infty,$$

или

$$\|\partial_x^r f\|_\infty \le \nu^{|r|} \|f\|_\infty, \tag{13}$$

где $|r| = r_1 + \dots + r_n$. Из неравенства (13) следует, что функция f целая сферического типа ν. Следовательно, $\mathfrak{M}_{\nu\infty}^{\infty} \subseteq \mathfrak{M}'_{\nu\infty}$, а т. к. $\mathfrak{M}'_{\nu\infty}$ замкнуто в $L_\infty(\mathbb{R}^n)$ ([10], п. 3.5), то и $\mathfrak{M}_{\nu\infty} \subseteq \mathfrak{M}'_{\nu\infty}$.

B) Рассмотрим теперь случай $p < \infty$. Пусть $\varphi(x)$ — произвольная непрерывная неотрицательная функция на $\mathbb{R}^n$, равная нулю при $|x| \geq 1$ и такая, что

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)\,dx = 1.$$

Для $f(x) \in L_p(M)$ ее ε-усреднение по Соболеву ($\varepsilon > 0$) определяется формулой

$$f_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^n}\int_{\mathbb{R}^n} \varphi\Big(\frac{x-u}{\varepsilon}\Big) f(u)\,du = \frac{1}{\varepsilon^n}\int_{\mathbb{R}^n} \varphi\Big(\frac{u}{\varepsilon}\Big) f(x-u)\,du.$$

Из хорошо известных свойств оператора усреднения ([10], п. 1.4) следует, что

1) $f_\varepsilon(x) \in L_\infty(\mathbb{R}^n) \cap L_p(\mathbb{R}^n)$;
2) отображение $f \to f_\varepsilon$ является линейным непрерывным оператором из $L_p(\mathbb{R}^n)$ в $L_\infty(\mathbb{R}^n)$;
3) $\|f - f_\varepsilon\|_p \to 0$ при $\varepsilon \to 0$.

Очевидно, $\big(U(t)f\big)_\varepsilon = U(t)(f_\varepsilon)$, откуда следует, что оператор усреднения переводит пространство $\mathfrak{M}_{\nu p}$ в $\mathfrak{M}_{\nu\infty}$. Пусть $f \in \mathfrak{M}_{\nu p}$, тогда $f_\varepsilon \in \mathfrak{M}_{\nu\infty} \cap L_p(M)$ и из включения $\mathfrak{M}_{\nu\infty} \subseteq \mathfrak{M}'_{\nu\infty}$ следует, что $f_\varepsilon \in \mathfrak{M}'_{\nu\infty} \cap L_p(M) = \mathfrak{M}'_{\nu p}$. Так как $\mathfrak{M}'_{\nu p}$ замкнуто в $L_p(M)$ и $f_\varepsilon \to f$ в $L_p(M)$, то и $f \in \mathfrak{M}'_{\nu p}$. Окончательно получаем $\mathfrak{M}_{\nu p} \subseteq \mathfrak{M}'_{\nu p}$. □

Рассмотрим случай, когда M — компактное риманово однородное симметрическое пространство ранга 1 (КРОСП по терминологии книги [13]). Все необходимые сведения из теории симметрических пространств и из гармонического анализа на компактных симметрических пространствах приведены, например, в [7], [8], [13]. В частности, там приведена полная классификация всех КРОСП. Одним из важнейших КРОСП является n-мерная сфера S^n, т. е. единичная сфера в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^{n+1}$. Известно, что на КРОСП все геодезические замкнуты и имеют одинаковую длину $2L$. Риманова метрика на симметрическом пространстве определена с точностью до умножения на положительное число. Для удобства нормируем риманову метрику на M так, чтобы $L = \pi$. Пусть Δ — оператор Лапласа–Бельтрами на M. Спектр оператора Δ является дискретным, действительным и неположительным ([13], гл. 8). Упорядочим его по убыванию ($0 = \lambda_0 > \lambda_1 > \lambda_2 > \cdots$) и обозначим через $\mathcal{H}_k$ собственное подпространство (всегда конечномерное) оператора Δ, отвечающее собственному значению λ_k. Пусть $\mathcal{P}_m(M) = \mathcal{H}_0 + \mathcal{H}_1 + \dots + \mathcal{H}_m$. Функции из $\mathcal{P}_m(M)$ будем называть сферическими полиномами на M степени m (в случае $M = S^n$ они совпадают с обычными сферическими полиномами). Далее будет показано, что на КРОСП множество целых L_p-функций порядка ν совпадает с множеством сферических полиномов степени не более ν.

Приведем необходимые сведения из гармонического анализа на КРОСП [8]. Группа G в этом случае компактная. Пусть dg — элемент нормированной меры Хаара на G (мера всей группы G равна единице). Каждое из собственных подпространств $\mathcal{H}_k$ инвариантно относительно квазирегулярного представления π и возникающее в $\mathcal{H}_k$ представление $\pi^k = \pi\big|_{\mathcal{H}_k}$ группы G неприводимо. Пусть $\chi^k(g) = \operatorname{tr}\pi^k(g)$ — характер представления π^k.

Для любых функций $\varphi(g)$ на группе G и $f(x)$ на M определяется свертка

$$\varphi * f(x) = \int_G \varphi(g) f(g^{-1}x)\,dg, \quad x \in M.$$

Если $f(x) \in \mathcal{H}_k$, то

$$\overline{\chi}^l * f = \begin{cases} \frac{1}{d_k} f & \text{при } l = k; \\ 0 & \text{при } l \neq k, \end{cases}$$

где d_k — размерность пространства $\mathcal{H}_k$, черта означает комплексное сопряжение.

Для любой функции $f(x) \in L_p(M)$ функция $\overline{\chi}^k * f(x)$ принадлежит пространству $\mathcal{H}_k$, и можно ввести ряд Фурье для $f(x)$:

$$f(x) \sim \sum_{k=0}^{\infty} d_k \, \overline{\chi}^k * f(x). \tag{14}$$

Если $f \in L_2(M)$, то ряд (14) сходится в $L_2(M)$, а в общем случае при $f \in L_p(M)$ ряд Фурье однозначно определяет функцию $f(x)$ (напр., [8], гл. V).

Теорема 2. *Функция $f(x) \in \mathfrak{M}_{\nu p}$ тогда и только тогда, когда $f(x)$ является сферическим полиномом степени не выше ν.*

Доказательство. Пусть $f(x) \in \mathfrak{M}_{\nu p}$, $f \not\equiv 0$. Так как подпространство $\mathfrak{M}_{\nu p}$ замкнуто и π-инвариантно (по следствию), то в $\mathfrak{M}_{\nu p}$ будут содержаться все функции $\varphi * f(x)$ для любой непрерывной функции $\varphi(g)$ и, в частности, сферические полиномы $\overline{\chi}^k * f$.

Пусть $\Phi(x) \in \mathcal{H}_k \cap \mathfrak{M}_{\nu p}$, $\Phi(x) \not\equiv 0$. Так как пространство $\mathcal{H}_k$ неприводимо, то отсюда следует, что $\mathcal{H}_k \subseteq \mathfrak{M}_{\nu p}$.

Воспользуемся обозначениями из доказательства леммы 1. Пусть ξ_0 — фиксированный единичный вектор из T_oM, геодезическая $\gamma(o, \xi_0; t) = R(t)o$, где $R(t)$ — некоторая однопараметрическая подгруппа в группе G (точнее говоря, $R(t) = \exp tX$, где X — некоторый вектор из алгебры Ли группы G, который выбирается, как в теореме 3.3 из ([7], гл. IV)). Известно (напр., [14], лемма 3.1), что для любой функции $\Phi(x) \in \mathcal{H}_k$ функция $p(t) = \Phi(R(t)o)$, $t \in \mathbb{R}$, является обычным тригонометрическим полиномом степени не более k, причем существуют функции $\Phi(x) \in \mathcal{H}_k$, для которых полином $p(t)$ имеет степень, строго равную k (так, если $\Phi(x)$ — зональная сферическая функция представления π^k, то $p(t) = P_k^{(\alpha,\beta)}(\cos t)$, где $P_k^{(\alpha,\beta)}(z)$ — полином Якоби степени k; α, β — некоторые числа ([8], гл. V, § 4)).

Пусть $e_1(x), \ldots, e_{d_k}(x)$ — базис в пространстве $\mathcal{H}_k$, функции $\tau^k_{jr}(g)$, $1 \le j, r \le d_k = d$, — матричные элементы представления π^k в этом базисе, т. е.

$$e_r(g^{-1}x) = \sum_{j=1}^{d} \tau^k_{jr}(g) e_j(x). \tag{15}$$

Пусть $\Phi(x) \in \mathcal{H}_k$, причем

$$\Phi(R(t)o) = \sum_{l=-k}^{k} c_l \, e^{ilt}$$

и $c_k \neq 0$. Как в лемме 1, заметим, что если $x = go$, $\xi = g_* \xi_0$, то

$$\Phi^t(x, \xi) = \Phi(gR(t)o).$$

Так как $\Phi(x)$ — линейная комбинация функций $e_j(x)$, то из соотношения (15) следует, что $\Phi^t(x, \xi)$ можно представить в виде

$$\Phi^t(x, \xi) = \Phi(gR(t)o) = \sum_{l=-k}^{k} \psi_l(g) \, e^{ilt},$$

где $\psi_l(g)$ — некоторые линейные комбинации матричных элементов $\tau^k_{jr}(g^{-1})$. Отметим, что функция $\psi_k(g) \not\equiv 0$, т. к. $\psi_k(e) = c_k \neq 0$ (e — единичный элемент в группе G).

Аналитическим продолжением функции $\Phi^t(x)$ будет функция

$$\Phi^z(x, \xi) = \sum_{l=-k}^{k} \psi_l(g) \, e^{ilz}, \quad z = t + is.$$

Рассмотрим функцию

$$\Phi^z(x,\xi)\,e^{ks}=\sum_{l=-k}^{k}\psi_l(g)\,e^{ilt}e^{(k-l)s}.$$

Из формулы (2) следует, что

$$\|\Phi^z(x,\xi)e^{ks}\|^p_{L_p(B)}=A\int_G\Big|\sum\psi_l(g)e^{ilt}e^{(k-l)s}\Big|^p\,dg. \tag{16}$$

Пусть $s\to-\infty$, тогда в (16) все слагаемые, кроме одного (с $l=k$), равномерно стремятся к нулю, следовательно,

$$\|\Phi^z(x,\xi)e^{ks}\|^p_{L_p(B)}\to A\int_G|\psi_k(g)|^p\,dg>0.$$

Тогда при больших $(-s)>0$

$$\|\Phi^z(x,\xi)\|_{L_p(B)}>C\,e^{-ks}=C\,e^{k|s|},$$

где C — некоторая константа. Из определения пространства $\mathfrak{M}_{\nu p}$ получаем, что $\Phi(x)\notin\mathfrak{M}_{\nu p}$ при $k>\nu$. Следовательно, в ряде Фурье для функции $f(x)\in\mathfrak{M}_{\nu p}$ могут быть только слагаемые степени не выше ν, и из единственности ряда Фурье получаем, что $f(x)$ является сферическим полиномом степени не выше ν.

Обратно, если $f(x)$ — сферический полином степени не выше ν, то, рассуждая, как выше, получаем, что функция $f^t(x,\xi)$ может быть представлена в виде

$$f^t(x,\xi)=\sum_{|l|\le\nu}\psi_l(g)\,e^{itl},$$

где $(x,\xi)=(go,g_*\xi_0)$, $\psi_l(g)$ — некоторые функции на группе G. Коэффициенты

$$\psi_l(g)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f^t(x,\xi)\,e^{-ilt}\,dt$$

являются функциями на однородном пространстве $B=G/K_1$, где K_1 — стационарная подгруппа точки $(o,\xi_0)\in B$. Функция $f^t(x,\xi)$ допускает аналитическое продолжение

$$f^z(x,\xi)=\sum_{|l|\le\nu}\psi_l(g)\,e^{ilz},\quad z=t+is. \tag{17}$$

Из (17) сразу видно, что $f^z(x,\xi)$ — целая функция со значениями в $L_p(B)$ и

$$\|f^z\|_{L_p(B)}\le C\,e^{\nu|s|},$$

следовательно, $f(x)\in\mathfrak{M}_{\nu p}$. $\square$

Литература

1. Вольф Дж. *Пространства постоянной кривизны.* – М.: Наука, 1982. – 480 с.
2. Тихомиров В.М. *Теория приближений* // Итоги науки и техн. Современ. пробл. матем. – М.: ВИНИТИ, 1987 – Т. 14. – С. 103–260.
3. Ragozin D.L. *Polinomial approximation on compact manifolds and homogeneous spaces* // Trans. Amer. Math. Soc. – 1971. – V. 150. – P. 41–53.
4. Никольский С.М., Лизоркин П.И. *Аппроксимация функций на сфере* // Изв. АН СССР. Сер. матем. – 1987. – Т. 51. – № 3. – С. 635–651.
5. Лизоркин П.И. *Прямые и обратные теоремы теории приближений для функций на пространстве Лобачевского* // Тр. матем. ин-та РАН. – 1992. – Т. 194. – С. 120–147.
6. Лизоркин П.И. *Аппроксимация на римановом многообразии* // Тр. матем. ин-та АН СССР. – 1991. – Т. 200. – С. 222–235.

7. Хелгасон С. *Дифференциальная геометрия и симметрические пространства* – М.: Мир, 1964. – 532 с.
8. Хелгасон С. *Группы и геометрический анализ* – М.: Мир, 1987. – 736 с.
9. Терехин А.П. *Ограниченная группа операторов и наилучшее приближение* // Дифференц. уравнения и вычисл. матем. – Саратов: Изд-во Саратовск. ун-та, 1975. – Вып. 2. – С. 3–28.
10. Никольский С.М. *Приближение функций многих переменных и теоремы вложения.* – М.: Наука, 1977. – 455 с.
11. Уорнер Ф. *Основы теории гладких многообразий и групп Ли.* – М.: Мир, 1987. – 302 с.
12. Желобенко Д.П., Штерн А.И. *Представления групп Ли.* – М.: Наука, 1983. – 360 с.
13. Бессе А. *Многообразия с замкнутыми геодезическими.* – М.: Мир, 1981. – 326 с.
14. Платонов С.С. *Приближения функций на компактных симметрических пространствах ранга* 1 // Матем. сб. – 1997. – Т. 188. – № 5. – С. 113–130.

Петрозаводский государственный университет

Поступили
первый вариант 21.07.1997
окончательный вариант 13.08.2000