ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1999 МАТЕМАТИКА № 6 (445)

УДК 517.926:531.01

В.Н. СКИМЕЛЬ

К ЗАДАЧАМ ПРИЕМЛЕМОСТИ ПРИБЛИЖЕННЫХ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

В работе [1] для дифференциальных уравнений, зависящих от постоянных существенных параметров, дана постановка задачи приемлемости приближенных решений по части переменных и предложено ее решение методом функций Ляпунова. Сформулированы и доказаны теоремы о приемлемости с использованием в качестве функций Ляпунова квадратичных форм.

В данной работе задача приемлемости решена с помощью функций Ляпунова достаточно общего вида. Доказана теорема о приемлемости. В качестве приложения обосновывается допустимость понижения порядка уравнений движения одной механической системы.

1. *Постановка задачи* [1]. Дана динамическая система

$$\dot{\xi} = F(t, \xi, a), \quad \xi \in R^n, \quad \dot{\xi} = d\xi/dt, \tag{1}$$

где $t \geq 0$ — независимая переменная (время), $a = \mathrm{const} > 0$ — существенный параметр. За приближенное решение системы (1) примем вектор-функцию

$$u(t, a) = \mathrm{col}(u_1(t, a), \dots, u_n(t, a)), \tag{2}$$

компоненты которой и их производные по времени определены и непрерывны при $t \geq 0$.

Сравним приближенное решение (2) с решением системы (1). С этой целью в уравнении (1) положим $\xi = u + x$. Для переменной x получим уравнение

$$\dot{x} = F(t, u(t, a) + x, a) - \dot{u}(t, a) = X(t, x, a). \tag{3}$$

Выделим, следуя условиям задачи, часть переменных $\xi_1, \dots, \xi_m$ $(m < n)$ и соответствующих им отклонений $x_1, \dots, x_m$. Обозначим

$$x_\alpha = y_\alpha, \quad x_{m+\beta} = z_\beta \quad (\alpha = 1, \dots, m; \ \beta = 1, \dots, n - m = p).$$

Тогда $x = \mathrm{col}(y, z)$. Пусть

$$\|y\| = \Big(\sum_{i=1}^m y_i^2\Big)^{1/2}, \quad \|z\| = \Big(\sum_{i=1}^p z_i^2\Big)^{1/2}, \quad \|x\| = \Big(\sum_{i=1}^n x_i^2\Big)^{1/2} = (\|y\|^2 + \|z\|^2)^{1/2}.$$

Полагаем, что для системы (3) в области

$$G_h = \{x : \|y\| < h \ (h = \mathrm{const} > 0), \ \|z\| < \infty\}, \quad t \geq 0, \tag{4}$$

при $a > 0$ выполнены условия существования и единственности решений $x(t, t_0, x_0, a)$. В пространстве переменных $\{x\}$ рассмотрим также области

$$\overline{G}_\varepsilon = \{x : \|y\| \leq \varepsilon_1 < h, \ \|z\| \leq \varepsilon_2\} \tag{5}$$

и множества

$$M = \{x : y = 0\}, \quad \overline{M}_\delta = \{x : y = 0, \ \|z\| \leq \delta < \varepsilon_2\}. \tag{6}$$

Определение. Приближенное решение (2) приемлемо по переменным ξ_α ($\alpha = 1, \dots, m$), если для любых положительных чисел ε_1, δ (первое может быть сколь угодно мало, а второе — велико) существуют значение параметра a^* и число $\varepsilon_2 > 0$, определяющее область (5), такие, что решения системы (3) $x(t, t_0, x_0, a^*) \in G_\varepsilon$ ($t \geq t_0$), если только $x_0 \in \overline{M}_\delta$ из (6).

2. *Исследование приемлемости.* Следуя прямому методу Ляпунова, будем рассматривать определенные в области (4) при $a > 0$ вещественные однозначные функции $V(t, x, a)$, непрерывные вместе с производными $\partial V/\partial t$, $\partial V/\partial x_i$ ($i = 1, \dots, n$), и их полные производные по времени в силу системы (3)

$$\dot{V}(t, x, a) = \frac{\partial V(t, x, a)}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V(t, x, a)}{\partial x_i} X_i(t, x, a). \tag{7}$$

Теорема. *Пусть функция $V(t, x, a)$ и ее производная (7) удовлетворяют следующим условиям:*

1) $[V(t, x, a) : x \in M] = \widetilde{V}(z)$, *т. е. функция V на множестве M от t и a не зависит;*
2) $V(t, x, a) \to \infty$ *при* $\|z\| \to \infty$ *равномерно по* $t \geq 0$, y *в области* $\|y\| \leq \varepsilon < h$;
3) *существуют непрерывные функции* $W_1(y, a)$, $W_2(x, a)$ *такие, что*

$$W_1(y, a) \leq V(t, x, a) \leq W_2(x, a), \tag{8}$$

где $W_2(0, a) \equiv 0$, $W_1(y, a)$ — *определенно-положительная и такая, что для всяких положительных чисел* ε, N ($\varepsilon < h$ *сколь угодно мало,* N *велико) возможно указать* a_1 — *значение параметра, для которого*

$$\inf[W_1(y, a) : \|y\| = \varepsilon,\ a > a_1] > N, \tag{9}$$

неравенство

$$\inf[W_1(y, a) : \|y\| = \varepsilon] > \sup[W_2(x, a) : \|x\| \leq R(\varepsilon, a)] \tag{10}$$

определяет $R(\varepsilon, a) \to \varkappa\varepsilon$ *при* $a \to \infty$, $\varkappa = \mathrm{const} < 1$;

4) *производная* (7)

$$[\dot{V}(t, x, a) : x \in G_h \setminus \overline{J}_{r(a)}] < 0, \tag{11}$$

где $\overline{J}_{r(a)} = \{x : \|x\| \leq r(a)\}$, $r(a) \to 0$, $a \to \infty$.
Тогда приближенное решение (2) приемлемо по переменным ξ_α ($\alpha = 1, \dots, m$).

Доказательство. Пусть произвольно заданы ε_1, δ ($\varepsilon_1 < h$, $\delta > \varepsilon_1$). Тогда из условий 1, 2 следует, что

$$\sup[V(t, x, a) : x \in \overline{M}_\delta] = \sup[\widetilde{V}(z) : \|z\| \leq \delta] = N > 0.$$

Определим в (9) значение a_1 параметра из условия

$$\inf[W_1(y, a) : \|y\| = \varepsilon_1,\ a > a_1] = l(a) > N. \tag{12}$$

Выберем и зафиксируем достаточно большое $a^* > a_1$, для которого $R(\varepsilon_1, a^*)$ в (10), $r(a^*)$ в (11) удовлетворяют неравенствам $\varepsilon_1 > R(\varepsilon_1, a^*) > r(a^*)$. В таком случае имеем

$$[W_2(x, a^*) : \|x\| \leq R(\varepsilon_1, a^*)] < l(a^*), \tag{13}$$

$$[\dot{V}(t, x, a^*) : x \in G_h \setminus \overline{J}_{r(a^*)}] < 0. \tag{14}$$

Найдем теперь достаточно большое ε_2, чтобы выполнялось неравенство (условие 2)

$$[V(t, x, a^*) : \|y\| \leq \varepsilon_1,\ \|z\| = \varepsilon_2] > l(a^*). \tag{15}$$

Таким образом, согласно (8), (12), (15) имеем

$$[V(t, x, a^*) : x \in \overline{G}_\varepsilon \setminus G_\varepsilon] \geq l(a^*) > N. \tag{16}$$

Обозначим сферу

$$S_R = \{x : \|x\| = R(\varepsilon_1, a^*)\}. \tag{17}$$

Рассмотрим теперь решения системы (3) при $x_0 \in \overline{M}_\delta$ в (6), $a = a^*$. Покажем, что решения $x(t, t_0, x_0, a^*) \in G_\varepsilon$ $(t \geq t_0)$, т. е. приемлемость имеет место.

Пусть $\|z_0\| \leq R(\varepsilon_1, a^*)$. Рассуждая от противного, положим, что в момент времени $\tau > t_0$ имеет место $x(\tau) \in \overline{G}_\varepsilon \setminus G_\varepsilon$. Но тогда существует момент t_1 $(t_0 \leq t_1 < \tau)$, при котором $x(t_1) \in S_R$ в (17), и траектория, соответствующая рассматриваемому решению, при $t \in [t_1, \tau]$ целиком принадлежит области отрицательности производной $\dot{V}$ в (14). Последнее означает, что функция $V(t)$ вдоль этого отрезка траектории убывает и, следовательно, $V(\tau) < V(t_1)$, что противоречит (16) и (13). Следовательно, решение остается в области G_ε. Видно, что то же заключение остается справедливым и для решений при $\delta \geq \|z_0\| > R$. Заметим, что функция $V(t, x, a)$ у-определенно-положительна ([2], с. 23).

3. *Приложение.* Рассмотрим задачу понижения порядка уравнений движения системы

$$\frac{dq}{dt} = \dot{q}, \quad \frac{d\dot{q}}{dt} = -aB(q)\dot{q} - Cq. \tag{18}$$

Здесь $q = \operatorname{col}(q_1, \ldots, q_k)$; $a = \text{const} > 0$ — параметр; $C = \|c_{ij}\|$ $(i, j = 1, \ldots, k;$ $c_{ij} = c_{ji})$ — определенно-положительная постоянная матрица; $B(q) = \operatorname{diag}(b_1(q_1), \ldots, b_k(q_k))$; функции $b_i(q_i)$ определены, непрерывны со своими производными db_i/dq_i и удовлетворяют в области $\|q\| < H$ $(H = \text{const} > 0)$ условию

$$0 < m \leq b_i(q_i) \leq M \quad (i = 1, \ldots, k). \tag{19}$$

Уравнениями (18) описывается движение многих механических и электромеханических систем. При $k = 1$ имеем известное уравнение Ван-дер-Поля ([3], с. 79). Систему

$$aB(p)\dot{p} + Cp = 0 \quad (\|p\| \leq H), \tag{20}$$

или в нормальной форме

$$\dot{p} = -a^{-1}B^{-1}(p)Cp \equiv -a^{-1}g(p), \tag{21}$$

примем для (18) за приближенную.

Изолированное положение равновесия системы (21) асимптотически устойчиво. Чтобы убедиться в этом, достаточно принять за функцию Ляпунова квадратичную форму $\vartheta = p^T Cp$ (T — символ транспонирования), производная которой в силу системы (21) имеет вид

$$\dot{\vartheta} = -2a^{-1} \sum_{s=1}^{k} b_s^{-1}(p_s) \left(\sum_{j=1}^{k} c_{sj} p_j \right)^2.$$

Видно, что $\dot{\vartheta}$ при условиях (19) и определенной положительности матрицы C есть функция определенно-отрицательная в области $\|p\| \leq H$.

Воспользуемся в дальнейшем следующей оценкой области притяжения системы (21). Пусть выбрано H_1 $(0 < H_1 < H)$. Тогда с помощью квадратичной формы ϑ для решений системы (21) при $t \geq 0$ получим

$$\|p(t, p_0, a)\| < H_1, \quad \|p(t, p_0, a)\| \to 0, \quad t \to \infty, \tag{22}$$

если

$$\|p_0\| < H_0, \quad H_0 = H_1(\omega_1/\omega_k)^{1/2},$$

где $0 < \omega_1 \leq \cdots \leq \omega_k$ — собственные значения матрицы C. За приближенное решение системы (18) примем вектор-функцию

$$u(t, p_0, a) = \operatorname{col}(p(t, p_0, a), \dot{p}(t, p_0, a)), \tag{23}$$

где $p(t, p_0, a)$ — какое-либо решение системы (21), удовлетворяющее оценке (22). Полагая в системе (18)

$$q = p + y, \quad \dot{q} = \dot{p} + z, \tag{24}$$

для отклонений y, z в (24), использовав тождество (20), имеющее место для решений $p(t, p_0, a)$, получим систему уравнений

$$\dot{y} = z, \quad \dot{z} = -Cy - aB(p, y)z - f(y, p, a), \tag{25}$$

в которой обозначены

$$\begin{gathered} f(y, p, a) = a[B(p, y) - B(p)]\dot{p} + \ddot{p}, \\ B(p, y) = \operatorname{diag}(b_1(p_1 + y_1), \ldots, b_k(p_k + y_k)), \quad B(p) = \operatorname{diag}(b_1(p_1), \ldots, b_k(p_k)). \end{gathered} \tag{26}$$

Для производной $\dot{p}$ воспользуемся далее ее выражением (21). Дифференцируя затем (21) по времени, найдем

$$\ddot{p} = a^{-2}\frac{\partial g}{\partial p}g \equiv a^{-2}\rho(p) \quad \left(\frac{\partial g}{\partial p} = \left\|\frac{\partial g_i}{\partial p_j}\right\|, \ \ i, j = 1, \ldots, k\right). \tag{27}$$

Поставим задачу приемлемости приближенного решения (23) для системы (18) по переменным q в смысле принятого определения, принимая параметр a за существенный. Рассмотрим с этой целью функцию Ляпунова

$$V(x, p, a) = \frac{1}{2}a^2\|\psi(p, y)\|^2 + a(\psi(p, y), z) + \|z\|^2 + y^T Cy, \tag{28}$$

где компонентами вектора $\psi(p, y)$ являются

$$\psi_i(p_i, y_i) = \int_0^{y_i} b_i(p_i + s)ds \quad (i = 1, \ldots, k), \tag{29}$$

определяя значения V в области

$$\|y\| \le h = H - H_1, \quad \|z\| < \infty. \tag{30}$$

В силу условий (19), (22) для функций (29) в области (30) выполняются неравенства

$$0 < m \le \psi_i(p_i, y_i)/y_i \le M. \tag{31}$$

Обозначая через

$$\varphi_i(p_i, y_i) = \psi_i(p_i, y_i)/y_i, \tag{32}$$

функцию (28) представим в виде

$$V(x, p, a) = \sum_{i=1}^{k}\left(\frac{1}{2}a^2\varphi_i^2 y_i^2 + a\varphi_i y_i z_i + z_i^2\right) + y^T Cy, \tag{33}$$

или

$$V(x, p, a) = \sum_{i=1}^{k}\left(\frac{1}{2}a\varphi_i y_i + z_i\right)^2 + \sum_{i=1}^{k}\frac{1}{4}a^2\varphi_i^2 y_i^2 + y^T Cy. \tag{34}$$

Функции вида (33) обычно называются псевдоквадратичными формами.

Покажем, что функция (28) и ее производная $\dot{V}$ удовлетворяют условиям теоремы. Действительно, согласно условию 1 $\widetilde{V}(z) = \|z\|^2$. Выражения (33), (34) таковы, что в неравенствах (8) (условие 3) можно положить, имея в виду (32), (31),

$$\begin{aligned} &W_1(y,a) = \frac{1}{4}a^2m^2\|y\|^2 \quad (V > W_1), \\ &W_2(x,a) = (1+\omega_k + a^2M^2/2)\|x\|^2 \quad (V < W_2). \end{aligned} \tag{35}$$

Тогда из неравенства (10) легко определяется

$$R(a,\varepsilon) = \nu am\varepsilon/2(1+\omega_k+a^2M^2/2)^{1/2},$$

где числа $0 < \nu < 1$, $\varkappa = \nu\sqrt{2}m/2M$.

Из выражения (28) для функции V непосредственно видно, что она удовлетворяет условию 2 теоремы: определяется число ε_2.

Замечание. Функция $W_2(x,a)$ находится после определения собственных значений псевдоквадратичной формы (33) переменных y_i, z_i и последующей их оценки.

Перейдем к условию 4 теоремы. При определении производной $\dot{V}$ в силу системы (25) следует принять во внимание производные $\partial\psi_i/\partial y_i = b_i(p_i+y_i)$, $\partial\psi_i/\partial p_i = b_i(p_i+y_i) - b_i(p_i)$, непосредственно следующие из (29), а также выражения (21), (27), (26) для $\dot{p}$, $\ddot{p}$, $f(y,p,a)$. Обозначив матрицы

$$\Phi(p,y) = \mathrm{diag}(\varphi_1(p_1,y_1),\ldots,\varphi_k(p_k,y_k)), \quad \Gamma(p,y) = B(p,y) - B(p), \tag{36}$$

после преобразований получим

$$\dot{V}(x,p,a) = -a[y^TC\Phi y + z^TB(p,y)z + a^{-2}\rho^T\Phi y + (-a^{-1}g^T\Gamma + 2a^{-3}\rho^T)z]. \tag{37}$$

Симметризуя матрицу $C\Phi$, обозначая матрицу

$$A(p,y) = \|a_{ij}\| = \frac{1}{2}\|c_{ij}(\varphi_i+\varphi_j)\| \quad (A = A^T;\ \ i,j = 1,\ldots,k) \tag{38}$$

и векторы

$$l_1(y,p,a) = a^{-2}\Phi\rho, \quad l_2(y,p,a) = -a^{-1}\Gamma g + 2a^{-3}\rho, \tag{39}$$

производную (37) представим окончательно в виде

$$\dot{V}(x,p,a) = -a(x^TD(p,y)x + l^T(y,p,a)x), \tag{40}$$

где $l = \mathrm{col}(l_1,l_2)$ и матрица $D = \mathrm{diag}(A,B)$ квазидиагональная.

В соответствии с условием 4 теоремы необходимо, следовательно, определить область (11) отрицательности производной (40).

Покажем прежде, что при некотором ограничении на колебание $M-m$ функций φ_i в (32) имеет место неравенство

$$x^TD(p,y)x > \alpha\|x\|^2, \tag{41}$$

где α — некоторая положительная постоянная. Рассмотрим с этой целью условия знакоопределенности псевдоквадратичной формы

$$W = y^TA(p,y)y. \tag{42}$$

Представим функции (32) в виде

$$\varphi_i(p_i,y_i) = m + \delta_i(p_i,y_i) \quad (i = 1,\ldots,k), \tag{43}$$

полагая

$$0 < \delta_i(p_i,y_i) < \mu \quad (\mu = \mathrm{const}). \tag{44}$$

Тогда матрица A в (38) примет вид

$$A(p,y) = mC + A_\delta(p,y), \quad A_\delta(p,y) = \frac{1}{2}\|c_{ij}(\delta_i + \delta_j)\|. \tag{45}$$

Для функции (42) теперь имеет место выражение

$$W = my^T Cy + y^T A_\delta(p,y)y, \tag{46}$$

в котором $my^T Cy \geq m\omega_1\|y\|^2$.

С другой стороны, $|y^T A_\delta y| \leq \|A_\delta\| \, \|y\|^2$ ($\|A_\delta\|$ — евклидова норма). Если обозначить $\overline{c} = \max|c_{ij}|$, то получим, имея в виду (44), (45),

$$|y^T A_\delta(p,y)y| \leq \mu\overline{c}k\|y\|^2.$$

Пусть имеет место неравенство

$$m\omega_1 - \mu\overline{c}k = m\lambda > 0 \quad (\lambda \text{ — некоторое число}), \tag{47}$$

тогда для функции (46) условие ее определенной положительности будет

$$W(p,y) \geq m\lambda\|y\|^2. \tag{48}$$

Из (47) следует

$$\mu = m(\omega_1 - \lambda)/k\overline{c}. \tag{49}$$

Обращаясь к (44), (43), (32), приходим, полагая $\mu > M - m$ и учитывая (49), к условию

$$1 < \frac{M}{m} < 1 + \frac{\omega_1 - \lambda}{k\overline{c}} \quad (0 < \lambda < \omega_1), \tag{50}$$

накладывающему дополнительное ограничение на систему (18).

Так как в выражении производной (37)

$$z^T B(p,y)z = \sum_{i=1}^{k} b_i(p_i + y_i)z_i^2 \geq m\|z\|^2,$$

то, принимая во внимание (48), положив $\alpha = \min(m, m\lambda)$, приходим к неравенству (41).

Нетрудно убедиться, что для величины скалярного произведения в выражении для производной (40) имеет место оценка

$$|l^T(y,p,a)x| \leq a^{-1}\gamma(a)\|x\|, \tag{51}$$

где $\gamma(a) \to \overline{\gamma} = \text{const}$ при $a \to \infty$. Действительно, из (39) находятся оценки для норм векторов, имеющие место в области (30) при условии (22),

$$\|l_1\| \leq a^{-2}\|\Phi\| \, \|\rho\| \leq a^{-2}\alpha_1, \quad \|l_2\| \leq a^{-1}\|\Gamma\| \, \|g\| + 2a^{-3}\|\rho\| \leq a^{-1}\beta_1 + 2a^{-3}\beta_2 = a^{-1}\beta(a), \tag{52}$$

где $\beta(a) = \beta_1 + 2a^{-2}\beta_2$, $\beta(a) \to \beta_1$ $(a \to \infty)$; α_1, β_1, β_2 — соответствующие постоянные.

Поскольку $|l^T x| \leq \|l\| \, \|x\|$, то согласно (52) получим

$$\|l(y,p,a)\| \leq a^{-1}(a^{-2}\alpha_1^2 + \beta^2(a))^{1/2}.$$

Обозначив $\gamma(a) = (a^{-2}\alpha_1^2 + \beta^2(a))^{1/2}$, приходим к оценке (51), в которой $\gamma(a) \to \beta_1$ $(a \to \infty)$, $\overline{\gamma} = \beta_1$.

Используя оценки (41), (51), определим область отрицательности производной (40). Для этого достаточно положить $\alpha\|x\|^2 > a^{-1}\gamma(a)\|x\|$, или $\|x\| > a^{-1}\gamma(a)/\alpha$ $(r(a) = a^{-1}\gamma(a)/\alpha)$.

Условие 4 теоремы тем самым выполняется. Таким образом, выполнены все условия теоремы. Приемлемость решений системы (21) для системы (18) по координатам имеет место в смысле принятого определения. Заключение о приемлемости целесообразно сформулировать следующим образом.

Решения системы (21) $p(t, p_0, a)$ со свойством (22) и $t_0 = 0$ приемлемы по координатам для системы (18): для любых положительных чисел ε_1, δ (первое может быть сколь угодно мало, а второе велико) находятся значение параметра a^* и число $\varepsilon_2 > 0$ такие, что при $t > 0$ имеют место неравенства

$$\|q - p\| < \varepsilon_1, \quad \|\dot{q} - \dot{p}\| < \varepsilon_2,$$

если только при $t_0 = 0$ выполняются условия

$$q_0 = p_0, \quad \|\dot{q}_0 - \dot{p}_0\| \leq \delta.$$

Литература

1. Скимель В.Н. *Применение метода функций Ляпунова к некоторым задачам приемлемости приближенных решений дифференциальных уравнений* // ПММ. – 1992. – Т. 56. – № 6. – С. 918–925.
2. Румянцев В.В., Озиранер А.С. *Устойчивость и стабилизация движения по отношению к части переменных.* – М.: Наука, 1987. – 253 с.
3. Ла-Салль Ж., Лефшец С. *Исследование устойчивости прямым методом Ляпунова.* – М.: Мир, 1964. – 168 с.

Казанский государственный технический университет

Поступила 13.03.1998