ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1999 МАТЕМАТИКА № 6 (445)

УДК 517.546

В.П. СИЖУК

ОКРЕСТНОСТИ ФУНКЦИЙ, ВЫПУКЛЫХ ОТНОСИТЕЛЬНО СИММЕТРИЧНЫХ ТОЧЕК

Пусть R — класс регулярных в единичном круге $E=\{z:|z|<1\}$ функций вида $f(z)=z+\sum\limits_{k=2}^{\infty}a_kz^k$. Обозначим через $S_n^0(a,b)$ и $S_n^*(a,b)$ классы функций $f(z)\in R$, удовлетворяющих соответственно соотношениям подчиненности

$$(zf'(z))'/f_n'(z)\prec(1+az)/(1+bz),\quad z\in E, \tag{1}$$

и

$$zf'(z)/f_n(z)\prec(1+az)/(1+bz),\quad z\in E, \tag{2}$$

где a и b — произвольно заданные числа, $-1\le b\le 0$, $b<a\le 1$,

$$f_n(z)=\frac{1}{n}\sum_{m=0}^{n-1}\varepsilon^{-m}f(\varepsilon^m z),\quad \varepsilon=\exp(2\pi i/n),\quad n=1,2,\dots \tag{3}$$

Через $K_n(a,b)$ обозначим класс функций $g(z)\in R$, для каждой из которых существует такая функция $f(z)\in S_n^0(a,b)$, что

$$\operatorname{Re}\{(zg'(z))'/f_n'(z)\}>0,\quad z\in E. \tag{4}$$

Имеем $S_n^0(a,b)\subset S_n^0(1,-1)\equiv S_n^0$ — класс функций, выпуклых относительно n симметричных точек в E [1], $S_n^*(a,b)\subset S_n^*(1,-1)\equiv S_n^*$ — класс функций, звездообразных относительно n симметричных точек в E [2], [3]. Функции $g(z)\in K_n(a,b)$ почти выпуклы относительно n симметричных точек в E [1]; K — класс всех почти выпуклых функций в E (напр., [4], с. 583–584).

Для $\delta>0$ определим δ-окрестности функции $f(z)\in R$ следующим образом:

$$N_\delta^\nu(f)=\Big\{g\in R: g(z)=z+\sum_{k=2}^{\infty}b_kz^k,\ \sum_{k=2}^{\infty}k^\nu|a_k-b_k|\le\delta\Big\},\quad \nu=1,2.$$

Заметим, что $N_\delta^2(f)\subset N_\delta^1(f)$. Понятие δ-окрестности $N_\delta^1(f)$ введено в [5].

В работах [5]–[9] рассматривался вопрос о включении $N_\delta^1(f)\subset S_n^*(a,b)$ для $f(z)\in S_n^0(a,b)$ при определенных значениях параметров n, a и b. В данной статье этот вопрос исследуется при всех допустимых значениях параметров, и рассматривается вопрос о включении $N_\delta^2(f)\subset K_n(a,b)$, $f(z)\in S_n^0(a,b)$. Основным результатом статьи является

Теорема 1. *Если $f(z)\in S_n^0(a,b)$, то $N_{\delta_n^*}^1(f)\subset S_n^*(a,b)$, где*

$$\delta_n^*=\begin{cases}\dfrac{a-b}{1-b}\displaystyle\int_0^1(1-t^n)(1-bt^n)^{(a-b)/bn-1}dt, & b\ne 0;\\ a\displaystyle\int_0^1(1-t^n)\exp(-at^n/n)dt, & b=0.\end{cases}$$

Постоянную δ_n^* нельзя заменить бо́льшей.

Доказательство теоремы 1 основывается на идее С. Рушевейха [5], развитой Дж. Броуном для обоснования включения $N_\delta^1(f) \subset S_1^*(1,b)$, $f(z) = z + a_{m+1}z^{m+1} + \cdots \in S_1^0(1,b)$ [8], и на следующих леммах.

Лемма 1. *Если* $f(z) \in R$, $|(f(z) * \psi_\theta(z))/z| \geq c > 0$ *в* E, *где*

$$\psi_\theta(z) = (a-b)^{-1}e^{-i\theta}\left[(1+ae^{i\theta})\frac{z}{1-z^n} - (1+be^{i\theta})\frac{z}{(1-z)^2}\right], \quad 0 \leq \theta < 2\pi, \tag{5}$$

то $N_\delta^1(f) \subset S_n^*(a,b)$, $\delta = c(a-b)/(1-b)$.

Доказательство. Для $f(z) \in R$ соотношение подчиненности (2) равносильно условию

$$zf'(z)/f_n(z) \neq (1+ae^{i\theta})/(1+be^{i\theta}), \quad z \in E, \ 0 \leq \theta < 2\pi,$$

которое с учетом равенств

$$f(z) * z/(1-z^n) = f_n(z), \quad f(z) * z(1-z)^{-2} = zf'(z) \tag{6}$$

и определения $\psi_\theta(z)$ преобразуется к виду $(f(z) * \psi_\theta(z))/z \neq 0$. Следовательно,

$$f(z) \in S_n^*(a,b) \Longleftrightarrow (f(z) * \psi_\theta(z))/z \neq 0, \quad z \in E. \tag{7}$$

По формуле (5) получим разложение $\psi_\theta(z) = z + \sum\limits_{k=2}^{\infty} c_k z^k$, где

$$c_k = \begin{cases} -k(1+be^{i\theta})/(a-b)e^{i\theta}, & k \neq mn+1; \\ [1-k+(a-kb)e^{i\theta}]/(a-b)e^{i\theta}, & k = mn+1, \end{cases} \qquad m = 1, 2, \ldots,$$

и заметим, что $|c_k| \leq (1-b)k/(a-b)$, $k = 2, 3, \ldots$, поскольку $-1 \leq b \leq 0$, $b < a \leq 1$.

Пусть $g(z) = z + \sum\limits_{k=2}^{\infty} b_k z^k \in N_\delta^1(f)$, где функция $f(z) = z + \sum\limits_{k=2}^{\infty} a_k z^k$ удовлетворяет условиям леммы, $\delta = c(a-b)/(1-b)$. Тогда

$$\left|\frac{g(z) * \psi_\theta(z)}{z}\right| \geq \left|\frac{f(z) * \psi_\theta(z)}{z}\right| - \left|\frac{(g(z) - f(z)) * \psi_\theta(z)}{z}\right| >$$
$$> c - \sum_{k=2}^{\infty} |c_k(a_k - b_k)| \geq c - \frac{1-b}{a-b}\sum_{k=2}^{\infty} k|a_k - b_k| \geq 0,$$

откуда $(g(z) * \psi_\theta(z))/z \neq 0$, $z \in E$. Это в соответствии с (7) означает, что $g(z) \in S_n^*(a,b)$. □

Замечание. Импликация (7) при $n = 1$, $b = -1$ и $a = 1 - 2\alpha$, $0 \leq \alpha < 1$, составляет содержание известной [10] теоремы о свертке функций, звездообразных в E порядка α (по Робертсону).

Лемма 2. *Если* $f(z) \in S_n^0(a,b)$ *и* $f_n(z)$ *определяется по формуле* (3), *то*

$$|f_n'(z)| \geq \begin{cases} (1-br^n)^{(a-b)/nb}, & b \neq 0; \\ \exp(-ar^n/n), & b = 0, \end{cases} \tag{8}$$

$|z| = r$, $0 < r < 1$.

Доказательство. Учитывая вытекающее из (3) равенство $f_n(\varepsilon^k z) = \varepsilon^k f_n(z)$ с $k = 1, 2, \ldots, n-1$, однолистность и выпуклость в E функции $(1+az)/(1+bz)$, убеждаемся, что (1) влечет

$$1 + zf_n''(z)/f_n'(z) \prec (1+az)/(1+bz), \quad z \in E. \tag{9}$$

Отсюда в силу одного обобщения леммы Шварца ([4], с. 323) имеем неравенство

$$|zf_n''(z)/f_n'(z)| \leq |z|^n |a - b(1 + zf_n''(z))/f_n'(z)|,$$

из которого следует, что значения функционала $w = 1 + zf_n''(z)/f_n'(z)$ при заданном $z \in E$, $|z| = r > 0$, лежат в круге

$$\Delta_r = \{w : |w - w_0| \le \rho\}, \tag{10}$$

где $w_0 = (1 - abr^{2n})/(1 - b^2r^{2n})$, $\rho = (a-b)r^n/(1 - b^2r^{2n})$. Из (10) находим

$$\mathrm{Re}\{zf_n''(z)/f_n'(z)\} \ge -(a-b)r^n/(1-br^n),$$

откуда

$$\frac{\partial}{\partial r}\ln|f'(re^{i\varphi})| \ge -(a-b)r^{n-1}/(1-br^n).$$

Интегрируя это неравенство по r от 0 до r, приходим к оценке (8). $\square$

Лемма 3. *Если $f(z) \in S_n^0(a,b)$, то $f(z) * \psi_\theta(z) \in K$ при каждом $\theta \in [0, 2\pi)$, где $\psi_\theta(z)$ определяется по формуле* (5).

Доказательство. Если $b = -1$ и $\theta = 0$, то согласно (5) $\psi_\theta(z) = z/(1 - z^n)$ и, следовательно, $f(z) * \psi_\theta(z) = f_n(z)$. Но ввиду (9) $f_n(z) \in S_1^0(a,b)$, так что $f(z) * \psi_\theta(z) \in S_1^0(a,b) \subset K$.

Пусть $\theta \in [0, 2\pi)$, $\theta \ne 0$ при $b = -1$. Используя формулу (5) и равенства (6), получим

$$\frac{(a-b)e^{i\theta}}{1+be^{i\theta}}\frac{(f(z)*\psi_\theta(z))'}{f_n'(z)} = \frac{1+ae^{i\theta}}{1+be^{i\theta}} - \frac{(zf'(z))'}{f_n'(z)}. \tag{11}$$

Фиксируем θ и положим $\theta_0 = \arg\{e^{i\theta}/(1+be^{i\theta})\}$. Тогда для любого действительного α из (11) будем иметь

$$e^{i(\theta_0+\alpha)}\frac{(f(z)*\psi_\theta(z))'}{f_n'(z)} = e^{i\alpha}\frac{|1+be^{i\theta}|}{a-b}\left[\frac{1+ae^{i\theta}}{1+be^{i\theta}} - \frac{(zf'(z))'}{f_n'(z)}\right]. \tag{12}$$

На основании (1) заключаем, что значения $w = (zf'(z))'/f_n'(z)$ для $f(z) \in S_n^0(a,b)$ и $z \in E$ лежат в Δ, где Δ — круг в Δ_1 (см. (10)) при $b \ne -1$ и Δ — полуплоскость $\mathrm{Re}\, w > (1-a)/2$ при $b = -1$. Граница Δ — окружность (при $b = -1$ — прямая)

$$\Gamma = \{w : w = (1+ae^{it})/(1+be^{it}),\ 0 \le t < 2\pi\}.$$

Так как $(1+ae^{i\theta})/(1+be^{i\theta}) \in \Gamma$ и $0 \notin \Delta \cup \Gamma$, то существует такое $\alpha = \alpha(\theta)$, что

$$\mathrm{Re}\left\{e^{i\alpha}\left[\frac{1+ae^{i\theta}}{1+be^{i\theta}} - \frac{(zf'(z))'}{f_n'(z)}\right]\right\} > 0, \quad z \in E. \tag{13}$$

Сопоставив (12) и (13), приходим к неравенству

$$\mathrm{Re}\{e^{i(\theta_0+\alpha)}(f(z)*\psi_\theta(z))'/f_n'(z)\} > 0, \quad z \in E,$$

означающему вместе с (9), что $f(z) * \psi_\theta(z) \in K$ ([4], с. 583–584). $\square$

Лемма 4. *Если $f(z) \in S_n^0(a,b)$, то*

$$\left|1 + ae^{i\theta} - (1+be^{i\theta})\frac{(zf'(z))'}{f_n'(z)}\right| \ge \frac{(a-b)(1-r^n)}{1-br^n}, \tag{14}$$

$|z| = r$, $0 < r < 1$.

Доказательство. При $b=-1$ и $\theta=0$ неравенство (14) тривиально. Пусть $0\le\theta<2\pi$, $\theta\ne0$ при $b=-1$. Положим

$$Q(w)=(1+be^{i\theta})\Big(\frac{1+ae^{i\theta}}{1+be^{i\theta}}-w\Big),\quad w\in\Delta_r, \tag{15}$$

где Δ_r определяется по (10). Функция $Q(w)$ регулярна и $Q(w)\ne0$ в Δ_r. Поэтому к $Q(w)$ примени́м принцип минимума модуля для регулярных функций ([11], с. 192), в силу которого

$$|Q(w)|\ge\min_{w\in\partial\Delta_r}|Q(w)|=\min_{0\le\varphi<2\pi}|1+ae^{i\theta}-(1+be^{i\theta})(w_0+\rho e^{i\varphi})|=$$
$$=\frac{a-b}{1-b^2r^{2n}}\left(\sqrt{1+2br^{2n}\cos\theta+b^2r^{4n}}-r^n\sqrt{1+2b\cos\theta+b^2}\right).$$

Находя минимум правой части относительно θ, получаем

$$|Q(w)|\ge(a-b)(1-r^n)/(1-br^n),$$

что вместе с (15) и (1) влечет неравенство (14). $\square$

Доказательство теоремы 1. Пусть $f(z)\in S_n^0(a,b)$. Тогда из (11) в силу леммы 4 имеем

$$|(f(z)*\psi_\theta(z))'|\ge|f_n'(z)|(1-r^n)/(1-br^n),\quad |z|=r.$$

По лемме 2 отсюда получаем

$$|(f(z)*\psi_\theta(z))'|\ge\begin{cases}(1-r^n)(1-br^n)^{(a-b)/nb-1}, & b\ne0;\\ (1-r^n)\exp(-ar^n/n), & b=0.\end{cases} \tag{16}$$

Ввиду леммы 3 функция $f(z)*\psi_\theta(z)$ однолистна в E, поскольку класс K состоит из однолистных функций в E (напр., [4], с. 584). При однолистном отображении $w=f(z)*\psi_\theta(z)$ круга E образом окружности $|z|=r$ является замкнутая кривая Жордана, заключающая внутри точку $w=0$. Отметим на этой кривой точку, ближайшую к $w=0$, и соединим ее с $w=0$ прямолинейным отрезком. Соответствующую отрезку кривую $|z|\le r$ обозначим через L. Тогда

$$|f(z)*\psi_\theta(z)|=\int_L|(f(z)*\psi_\theta(z))'|\,|dz|\ge\int_0^{|z|}|(f(z)*\psi_\theta(z))'|d|z|. \tag{17}$$

Из (16) и (17) выводим оценку

$$\left|\frac{f(z)*\psi_\theta(z)}{z}\right|\ge\begin{cases}\nu(r)=\dfrac1r\displaystyle\int_0^r\frac{(1-t^n)dt}{(1-bt^n)^{1-(a-b)/bn}}, & b\ne0;\\ \mu(r)=\dfrac1r\displaystyle\int_0^r(1-t^n)\exp(-at^n/n)dt, & b=0.\end{cases} \tag{18}$$

Функции $\nu(r)$ и $\mu(r)$ убывают при $0<r<1$, поэтому из (18) имеем

$$|(f(z)*\psi_\theta(z))/z|\ge(1-b)\delta_n^*/(a-b),$$

где δ_n^* то же, что и в теореме. Теперь включение $N^1_{\delta_n^*}(f)\subset S_n^*(a,b)$ следует из леммы 1.

Простыми вычислениями убедимся, что при $\theta=-\pi$, $z^n=-r^n$ имеет место равенство $(f(z)*\psi_\theta(z))/z=\nu(r)$ для функции

$$f(z)=\int_0^z(1+b\xi^n)^{(a-b)/bn}d\xi\in S_n^0(a,b),$$

если $b\ne0$, и равенство $(f(z)*\psi_\theta(z))/z=\mu(r)$ для функции

$$f(z)=\int_0^z\exp(a\xi^n/n)d\xi\in S_n^0(a,b),$$

если $b=0$. Следовательно, постоянную δ_n^* нельзя заменить бо́льшей. $\square$

Теорема 2. *Если* $f(z) \in S_n^0(a,b)$, *то* $N^2_{\delta_n}(f) \subset K_n(a,b)$, *где* $\delta_n = (1-a)(1-b)^{(a-b)/nb-1}$ *при* $b \neq 0$ *и* $\delta_n = (1-a)\exp(-a/n)$ *при* $b = 0$.

Доказательство. Пусть $g(z) \in N^2_{\delta_n}(f)$. Тогда $|(zf'(z))' - (zg'(z))'| < \delta_n$ в E, так что

$$\mathrm{Re}\,\frac{(zg'(z))'}{f_n'(z)} \geq \mathrm{Re}\,\frac{(zf'(z))'}{f_n'(z)} - \frac{\delta_n}{|f_n'(z)|}. \tag{19}$$

Из условия (1) по принципу подчиненности и лемме Шварца получим неравенство

$$\mathrm{Re}\{(zf'(z))'/f_n'(z)\} \geq (1-ar)/(1-br), \quad |z| = r < 1,$$

справедливое для любой функции $f(z) \in S_n^0(a,b)$. Правая часть в этом неравенстве убывает в промежутке $0 < r < 1$. Поэтому

$$\mathrm{Re}\{(zf'(z))'/f_n'(z)\} \geq (1-a)/(1-b), \quad z \in E. \tag{20}$$

В силу леммы 2 имеем в E оценку

$$\frac{1}{|f_n'(z)|} \leq \begin{cases} (1-b)^{-(a-b)/nb}, & b \neq 0; \\ \exp(a/n), & b = 0. \end{cases} \tag{21}$$

Из (19)–(21) с учетом определения δ_n находим неравенство (4), означающее, что $g(z) \in K_n(a,b)$. Следовательно, $N^2_{\delta_n}(f) \subset K_n(a,b)$. $\square$

Литература

1. Das R.N., Singh P. *On subclass of schlicht mapping* // Indian J. Pure Appl. Math. – 1977. – V. 8. – № 8. – P. 864–872.
2. Sakaguchi K. *On a certain univalent mapping* // J. Math. Soc. Japan. – 1959. – V. 11. – № 1. – P. 72–75.
3. Mocanu P.T. *On starlike function with respect to symmetric points* // Bull. math. Soc. sci. math. RSR. – 1984. – V. 28. – № 1. – P. 47–50.
4. Голузин Г.М. *Геометрическая теория функций комплексного переменного.* – 2-е изд. – М.: Наука, 1966. – 628 с.
5. Ruscheweyh S. *Neighborhoods of univalent functions* // Proc. Amer. Math. Soc. – 1981. – V. 81. – № 4. – P. 521–527.
6. Goodman A.W. *Univalent functions and nonanalytic curves* // Proc. Amer. Math. Soc. – 1957. – V. 8. – № 3. – P. 598–601.
7. Fournier R. *A note on neighborhoods of univalent functions* // Proc. Amer. Math. Soc. – 1983. – V. 87. – № 1. – P. 117–120.
8. Brown J.E. *Some sharp neighborhoods of univalent functions* // Trans. Amer. Math. Soc. – 1985. – V. 287. – № 2. – P. 475–482.
9. Gao Chun-yi *Sharp neighborhoods of certain analytic functions* // Хунань шусюэ нянькань, Hunan. Ann. Math. – 1987. – V. 7. – № 2. – P. 67–73.
10. Silverman H., Silvia E.M., Telage D. *Convolution condition for convexity, starlikeness and spirallikeness* // Math. Zeit. – 1978. – Bd. 162. – № 2. – S. 125–130.
11. Шабат Б.В. *Введение в комплексный анализ.* Учеб. пособие. – М.: Наука, 1969. – 576 с.

Ставропольский государственный университет

Поступила 08.08.1997