ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1998 МАТЕМАТИКА № 11 (438)

УДК 517.911

Э.И. АБДУРАГИМОВ

ЕДИНСТВЕННОСТЬ ПОЛОЖИТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ ОДНОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ ДВУХТОЧЕЧНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ И ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД ЕГО НАХОЖДЕНИЯ

Рассмотрим на отрезке $[0,1]$ двухточечную краевую задачу

$$y'' + ax^m y^n = 0, \quad 0 < x < 1, \tag{1}$$

$$y(0) = y(1) = 0, \tag{2}$$

где m, n, a — постоянные, причем $a > 0$, $m > 0$, $n > 1$. Под положительным решением задачи (1)–(2) понимаем решение этой задачи из класса $C^2[0,1]$, для которого $y(x) > 0$, $x \in (0,1)$.

В данной работе доказывается существование и единственность положительного решения задачи (1)–(2), предлагается неитерационный численный метод его нахождения, хотя существование положительного решения задачи (1)–(2) можно доказать также методом расслоения С.И. Похожаева, например, [1], [2].

1. Априорные оценки

Теорема 1.1. *Для положительного решения $y(x)$ задачи* (1)–(2) *справедливы оценки*

$$M_1 a^{-\frac{1}{n-1}} \le \max_{[0,1]} y(x) \le M_2 a^{-\frac{1}{n-1}}, \tag{1.1}$$

где M_1 и M_2 — положительные постоянные, зависящие лишь от m, n.

Доказательство. Пусть $M = \max\limits_{[0,1]} y(x) = y(d)$, $d \in (0,1)$. Тогда $y'(d) = 0$, $y''(d) \le 0$. Имеем

$$M = \int_0^d y'(t)dt = -\int_0^d ty''(t)dt = a\int_0^d t^{m+1}y^n(t)dt, \tag{1.2}$$

с другой стороны,

$$M = -\int_d^1 y'(t)dt = -\int_d^1 (1-t)y''(t)dt = a\int_d^1 (1-t)t^m y^n(t)dt. \tag{1.3}$$

Так как $y''(x) < 0$ при $x \in (0,1)$, то $y(x)$ — выпуклая вверх функция. Отсюда следует $y(t) \ge \frac{y(d)}{d}t = \frac{M}{d}t$ при $0 \le t \le d$ и $y(t) \ge \frac{1-t}{1-d}y(d) = \frac{M(1-t)}{1-d}$ при $d \le t \le 1$. Пользуясь этим, из (1.2) получаем

$$M \ge \frac{aM^n}{m+n+2}d^{m+2}, \tag{1.4}$$

а при $d \le t \le 1$ из (1.3) следует

$$M \ge \frac{aM^n}{(1-d)^n}\int_d^1 (1-t)^{n+1}t^m dt.$$

После замены $t = (1-d)s + d$ в последнем интеграле получим

$$M \geq aM^n(1-d)^2 \int_0^1 (1-s)^{n+1}[(1-d)s+d]^m ds \geq aM^n(1-d)^{m+2}\int_0^1 (1-s)^{n+1}s^m ds. \quad (1.5)$$

Так как $1-s \geq s$ при $s \in [0, 1/2]$ и $s \geq 1-s$ при $s \in [1/2, 1]$, то

$$\int_0^1 (1-s)^{n+1}s^m ds = \int_0^{1/2}(1-s)^{n+1}s^m ds + \int_{1/2}^1 (1-s)^{n+1}s^m ds \geq$$

$$\geq \int_0^{1/2} s^{n+m+1}ds + \int_{1/2}^1 (1-s)^{n+m+1}ds = \frac{1}{2^{m+n+1}(m+n+2)}.$$

Тогда из (1.5) вытекает

$$M \geq \frac{aM^n(1-d)^{m+2}}{2^{m+n+1}(m+n+2)}. \quad (1.6)$$

Оценивая теперь интегралы (1.2) и (1.3) сверху, имеем

$$M \leq aM^n d^{m+2}/(m+2) \quad (1.7)$$

и

$$M \leq aM^n(1-d^{m+2})/(m+2). \quad (1.8)$$

В силу (1.4) и (1.8)

$$\frac{m+2}{1-d^{m+2}} \leq aM^{n-1} \leq \frac{m+n+2}{d^{m+2}}. \quad (1.9)$$

Отсюда следует

$$d \leq \left[\frac{m+n+2}{2m+n+4}\right]^{\frac{1}{m+2}} = d_1 < 1. \quad (1.10)$$

Аналогично из (1.6) и (1.7) получим

$$\frac{m+2}{d^{m+2}} \leq aM^{n-1} \leq \frac{2^{m+n+1}(m+n+2)}{(1-d)^{m+2}} \quad (1.11)$$

и

$$d \geq \left(1 + \left[\frac{2^{m+n+1}(m+n+2)}{m+2}\right]^{\frac{1}{m+2}}\right)^{-1} = d_0. \quad (1.12)$$

Теперь правая часть неравенства (1.1) следует из правой части неравенства (1.9) и (1.12) с $M_2 = (m+n+2)^{\frac{1}{n-1}} d_0^{-\frac{m+2}{n-1}}$, а левая часть — из левой части неравенства (1.11) и (1.10) с $M_1 = (m+2)^{\frac{1}{n-1}} d_1^{-\frac{m+2}{n-1}}$. $\square$

Используя оценки (1.1), легко убедиться, что если $y(x)$ — положительное решение задачи (1)–(2), то

$$\max_{[0,1]} |y''(x)| \leq M_2^n a^{-\frac{1}{n-1}}. \quad (1.13)$$

Так как

$$y'(0) = -\int_0^d y''(t)dt = a\int_0^d t^m y^n(t)dt,$$

то в силу (1.1), (1.10) и (1.12) получим

$$C_1 a^{-\frac{n}{n-1}} \leq y'(0) \leq C_2 a^{-\frac{n}{n-1}}, \quad (1.14)$$

где постоянные C_1, C_2 зависят лишь от m и n.

Пусть теперь h — положительное число. Рассмотрим задачу

$$y'' = -ax^m y^n, \quad 0 < x < h, \tag{1.15}$$

$$y(0) = y(h) = 0. \tag{1.16}$$

Получим априорные оценки положительного решения этой задачи. Для этого заменой $t = x/h$ сведем задачу (1.15)–(1.16) к задаче

$$\begin{gathered} u'' = -ah^{m+2}t^m u^n, \quad 0 < t < 1, \\ u(0) = u(1) = 0, \end{gathered} \tag{1.17}$$

где $u = u(t) = y(th)$. Уравнение (1.17) отличается от уравнения (1) только коэффициентом ah^{m+2} вместо коэффициента a в уравнении (1). Поэтому для положительного решения задачи (1.15)–(1.16) справедливы оценки

$$\frac{M_1}{h^{\frac{m+2}{n-1}} a^{\frac{1}{n-1}}} \le \max_{[0,h]} y(x) \le \frac{M_2}{h^{\frac{m+2}{n-1}} a^{\frac{1}{n-1}}}. \tag{1.18}$$

Аналогично из (1.13) и (1.14) получаем оценки

$$\max_{[0,h]} |y''(x)| \le \frac{M_2^n}{h^{\frac{m+2}{n-1}} a^{\frac{1}{n-1}}}, \qquad \frac{C_1}{h^{\frac{m+2}{n-1}} a^{\frac{1}{n-1}}} \le y'(0) \le \frac{C_2}{h^{\frac{m+2}{n-1}} a^{\frac{1}{n-1}}}.$$

2. Единственность положительного решения

Докажем существование и единственность положительного решения в $C^2[0,1]$ задачи (1)–(2). Для этой цели рассмотрим задачу Коши

$$y'' = -ax^m y^n, \tag{2.1}$$

$$y(0) = 0, \tag{2.2}$$

$$y'(0) = s, \tag{2.3}$$

где s — некоторое положительное число.

Теорема 2.1. *Для любого $s > 0$ существует единственное число $h(s) > 0$, при котором найдется единственное неотрицательное решение задачи Коши (2.1)–(2.3) из класса $C_2[0, h(s)]$, обращающееся в нуль на концах отрезка $[0, h(s)]$.*

Доказательство. Интегрируя два раза уравнение (2.1) от 0 до x с учетом начальных условий (2.2)–(2.3), получим

$$y(x) = sx - a\int_0^x \int_0^t z^m y^n(x) dz\, dt. \tag{2.4}$$

Так как $y(0) = 0$, $y'(0) = s > 0$, то существует такое положительное число δ, что $y(x) > 0$ при $x \in (0, \delta)$. Предположим, что $y'(x) > 0$ при всех $x > 0$. Тогда $y(x) > 0$ и возрастает при $x > 0$. Из (2.4) следует

$$y(x) > sx - a\frac{x^{m+2}y^n}{(m+1)(m+2)}.$$

Отсюда имеем

$$ax^{m+2}y^n + (m+1)(m+2)y - (m+1)(m+2)sx \ge 0. \tag{2.5}$$

Воспользуемся неравенством Юнга ([3], с. 61):

$$ab \le \varepsilon a^{1/q} + (q/\varepsilon)^{q/(1-q)}(1-q)b^{1/(1-q)},$$

где ε — произвольное положительное число, $q \in (0,1)$, a и b — неотрицательные числа. В силу этого неравенства при $q = \frac{n-1}{n}$ и $\varepsilon = \frac{1}{2}$ имеем

$$(m+1)(m+2)y = [(m+1)(m+2)sx]^{\frac{n-1}{n}} \frac{[(m+1)(m+2)]^{\frac{1}{n}}}{(sx)^{\frac{n-1}{n}}} y \leq$$

$$\leq \frac{(m+1)(m+2)sx}{2} + \left(2\frac{n-1}{n}\right)^{n-1} \frac{1}{n} \frac{(m+1)(m+2)}{(sx)^{n-1}} y^n.$$

Пользуясь этой оценкой, из (2.5) получаем

$$y^n(x) \geq s^n x^n \Big/ \left[\frac{2as^{n-1}x^{m+n+1}}{(m+1)(m+2)} + \left(\frac{2}{n}\right)^n (n-1)^{n-1}\right].$$

Отсюда следует

$$y^n(x) \geq s^n x^n / [a_0(s)(1 + x^{m+n+1})], \tag{2.6}$$

где

$$a_0(s) = \max\left[\left(\frac{2}{n}\right)^n (n-1)^{n-1}, \frac{2as^{n-1}}{(m+1)(m+2)}\right].$$

Интегрируя уравнение (2.1) от 0 до x, с учетом начального условия (2.3) получим

$$y'(x) = s - a\int_0^x t^m y^n(t)dt.$$

Отсюда с учетом предположения $y'(x) > 0$ при $x > 0$ и неравенства (2.6), имеем

$$s > a\int_0^x t^m y^n(t)dt \geq a\frac{s^n}{a_0(s)} \int_0^x \frac{t^{m+n}}{1+t^{m+n+1}}dt = \frac{as^n}{(m+n+1)a_0(s)} \ln(1 + x^{m+n+1}).$$

Этого не может быть, т. к. $\ln(1+x^{m+n+1}) \to +\infty$ при $x \to +\infty$. Следовательно, существует такая точка $x_0 > 0$, что $y'(x_0) = 0$ и $y'(x) > 0$ при $0 \leq x < x_0$. Из уравнения (2.1) следует $y''(x_0) < 0$, т. е. x_0 является точкой максимума решения задачи (2.1)–(2.3). Так как в силу уравнения (2.1) $y'(x) < 0$ при $y(x) > 0$, то $y'(x) < 0$ при $x_0 < x < x_1$ для некоторого x_1, а из выпуклости вверх $y(x)$ для положительных значений $y(x)$ следует существование единственной точки $h = h(s)$, в которой положительное на $(0, h(s))$ решение задачи Коши (2.1)–(2.3) обращается в нуль.

Пусть $y(x,s)$ — решение задачи Коши (2.1)–(2.3). Существование для любого $s > 0$ единственного значения $h(s) > 0$ такого, что $y(x,s) > 0$ при $0 < x < h(s)$ и $y(h(s),s) = 0$, доказано выше. Из априорных оценок (1.18) с $h = h(s)$ следует единственность $y(x,s)$ в $C^2[0,h(s)]$. $\square$

Теорема 2.2. *Существует единственное положительное решение задачи* (1)–(2).

Доказательство. По теореме 2.1 для положительного решения $\overline{y}(\overline{x})$ задачи Коши

$$\overline{y}\,'' + a\overline{x}^m\overline{y}^n = 0, \quad \overline{y}(0) = 0, \quad \overline{y}\,'(0) = 1$$

существует единственное значение $\overline{h}$ такое, что $\overline{y}(\overline{h}) = 0$. Легко проверить по аналогии с [4], что замена $x = A^{\alpha_1}\overline{x}$, $y = A^{\alpha_2}\overline{y}$ с $A = \overline{h}^{(m+n+1)/(n-1)}$, $\alpha_1 = -\frac{n-1}{m+n+1}$, $\alpha_2 = \frac{m+2}{m+n+1}$ приведет к единственному положительному решению задачи (1)–(2). $\square$

Замечание. Из оценок (1.18) следует, что уравнение (1) не имеет положительного решения, удовлетворяющего условиям $y(0) = 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} y(x) = 0$.

Схема численного решения связана с доказательством теоремы 2.2. Именно, сначала находим $\overline{h}$ из условия $\overline{y}(\overline{h}) = 0$, затем по $\overline{h}$ вычисляем A, затем записываем решение. Численный эксперимент, проведенный при различных значениях m, n и $a = 1$, показал, что эта схема легко реализуется на ЭВМ.

Литература

1. Похожаев С.И. *Об одном конструктивном методе вариационного исчисления* // ДАН СССР. – 1988. – Т. 298. – № 6. – С. 1330–1333.
2. Похожаев С.И. *Об одной задаче Л.В. Овсянникова* // Журн. прикл. механ. и техн. физ. – 1989. – Т.2. – С. 5–10.
3. Ладыженская О.А., Уральцева Н.Н. *Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа.* – М.: Наука, 1964. – 540 с.
4. Абдурагимов Э.И. *О положительном радиально-симметрическом решении задачи Дирихле для одного нелинейного уравнения и численном методе его получения* // Изв. вузов. Математика. – 1997. – № 5. – С. 3–6.

Дагестанский государственный университет

Поступили
первый вариант 04.05.1995
окончательный вариант 06.08.1998