ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2005 МАТЕМАТИКА № 10 (521)

УДК 517.518

С.А. СТЕПАНЯНЦ

НЕОБХОДИМЫЕ УСЛОВИЯ ТАУБЕРОВА ТИПА ДЛЯ МЕТОДОВ СУММИРОВАНИЯ ЧЕЗАРО

1. В данной работе будут рассматриваться классические методы суммирования числовых рядов — методы Чезаро (C,α) с $\alpha \geq 0$ и метод Абеля (A) (определения этих методов см. ([1], сс. 20, 125–128)), изучаться условия тауберова типа для этих методов.

Условимся, если не оговорено противное, везде далее считать, что $a_n = \{a_n\}_{n=0}^{+\infty}$ — последовательность действительных чисел; $c_n = \{c_n\}_{n=0}^{+\infty}$ — последовательность неотрицательных чисел; $\{n_r\}_{r=1}^{+\infty}$ — последовательность натуральных чисел; $k,\ l,\ n$ — целые неотрицательные числа; α, β — неотрицательные числа. Запись $\sum a_n = A(P)$ означает, что ряд $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n$ суммируем к числу A методом P (ряды с неуказанными пределами суммирования будем считать суммируемыми от 0 до $+\infty$), запись $a_n \in R$ означает, что последовательность a_n удовлетворяет условию R.

Будем говорить, что метод P включается методом Q $(P \subset Q)$, если из того, что $\sum a_n = A(P)$ следует $\sum a_n = A(Q)$.

Хорошо известны включения $(C,\alpha) \subset (C,\beta) \subset A$ при $\alpha < \beta$ ([1], сс. 131, 140). Обратные включения в общем случае неверны, однако они становятся справедливыми, если на a_n наложить некоторые условия, называемые тауберовыми.

Будем рассматривать так называемые "O-условия" тауберова типа, т. е. условия вида $a_n = O(c_n)$.

Скажем, что последовательность c_n принадлежит классу $OT_Q(P)$ $(c_n \in OT_Q(P))$, если из того, что ряд $\sum a_n$ суммируем методом P, и того, что $a_n = O(c_n)$, следует, что $\sum a_n$ суммируем методом Q. Метод P при этом будем называть "верхним", Q — "нижним". Далее в качестве "верхнего" метода рассматриваются методы Чезаро (C,α) или Абеля (A), в качестве "нижнего" — метод (C,k) с $k < \alpha$.

Приведем некоторые классические результаты для случая, когда "нижним" методом является $(C,0)$-сходимость.

Харди [2] доказал, что $\frac{1}{n} \in OT_{(C,0)}(C,\alpha)$, Литлвуд [3] — что $\frac{1}{n} \in OT_{(C,0)}(A)$.

В [4] рассмотрено следующее условие (E). Последовательность $c_n \in (E)$, если для любого $\varepsilon > 0$ существуют число $q > 1$ и последовательность натуральных чисел $\{n_r\}_{r=1}^{\infty}$ такие, что $\frac{n_{r+1}}{n_r} \geq q$ и $\sum\limits_{n_r<\nu<n_{r+1}} c_\nu < \varepsilon$ для всех r.

Пусть P — некоторый фиксированный метод (C,α) с $\alpha > 0$ или метод (A). Тогда, как показано в [4], условие $c_n \in (E)$ является необходимым и достаточным для того, чтобы

$$c_n \in OT_{(C,0)}(P).$$

Из этого результата следует, что условие Харди $a_n = O(\frac{1}{n})$ является наилучшим с точки зрения порядка, т. е. для любой последовательности w_n такой, что $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = +\infty$, имеем

$$\frac{w_n}{n} \notin OT_{(C,0)}(P).$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 03-01-00080.

Рассмотрим теперь аналогичные вопросы для случая, когда "нижним" методом является уже не метод $(C,0)$, а метод (C,k) с $k>0$.

В [5] установлено, что для любой последовательности w_n такой, что $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n=+\infty$, существует a_n такая, что $a_n=O(\frac{w_n}{n})$; ряд $\sum a_n$ суммируем методом (A) и не суммируем никаким методом (C,k), т.е. для всех k имеем $\frac{w_n}{n}\notin OT_{(C,k)}(A)$.

В [6] были введены условия (F,k), которые для краткости не будем здесь формулировать, и установлены следующие свойства этих условий:

1) $(F,0)=(E)$;

2) если $k<l$ и $c_n\in(F,k)$, то $c_n\in(F,l)$;

3) если $k<l$, то существует c_n такая, что $c_n\notin(F,k)$, но $c_n\in(F,l)$;

4) если $c_n\in(F,k)$, то $c_n\in OT_{(C,k)}(C,\alpha)$ для любого $\alpha>k$.

Из этих свойств следует, в частности, что условие $c_n\in(E)$ не является необходимым для того, чтобы $c_n\in OT_{(C,k)}(P)$, где (P) — метод (C,α) с $\alpha>k$ или метод (A). Ниже будут введены условия (ND,k) и получено, что требование $c_n\notin(ND,k)$ является необходимым для того, чтобы $c_n\in OT_{(C,k)}(P)$.

Доказательство этого проводится в теореме 1, которая формулируется в несколько иных обозначениях для придания ее утверждению более прозрачного смысла.

Пусть k — натуральное число. Дадим определение условий (ND,k).

Последовательность c_n удовлетворяет условию (ND,k), если существуют числа $\varepsilon>0$ и p $(0<p<1)$ такие, что для любого q $(1<q<q^3\le 2)$ существуют следующие объекты, зависящие от q:

I) последовательность натуральных чисел $\{n_r^{(q)}\}_{r=1}^{+\infty}$ такая, что

$$q\le\frac{n_{r+1}^{(q)}}{n_r^{(q)}}\le q^3;$$

II) последовательность $\{\widetilde{c}_n^{(q)}\}$ такая, что $0\le\widetilde{c}_n^{(q)}\le c_n$;

III) $(k+2)$ возрастающих последовательностей натуральных чисел $\{l_{ir}^{(q)}\}_{r=1}^{+\infty}$ $(i=1,\dots,k+2)$;

$(k+2)$ возрастающих последовательностей натуральных чисел $\{m_{ir}^{(q)}\}_{r=1}^{+\infty}$ $(i=1,\dots,k+2)$, и для этих объектов для бесконечного числа номеров r одновременно выполнены следующие соотношения:

$$n_r^{(q)}\le l_{1r}^{(q)}<m_{1r}^{(q)}<q^p m_{1r}^{(q)}\le l_{2r}^{(q)}<m_{2r}^{(q)}<q^p m_{2r}^{(q)}\le l_{3r}^{(q)}<\dots\le l_{(k+2)r}^{(q)}<m_{(k+2)r}^{(q)}<n_{r+1}^{(q)},\qquad(1)$$

$$\sum_{\nu=l_{1r}^{(q)}+1}^{m_{1r}^{(q)}}\widetilde{c}_\nu^{(q)}=\sum_{\nu=l_{ir}^{(q)}+1}^{m_{ir}^{(q)}}\widetilde{c}_\nu^{(q)}\quad(i=2,3,\dots,k+2),\qquad(2)$$

$$\sum_{i=1}^{k+2}\sum_{\nu=l_{ir}^{(q)}+1}^{m_{ir}^{(q)}}(n_{r+1}^{(q)}-\nu+1)^k\widetilde{c}_\nu^{(q)}\ge\varepsilon(n_r^{(q)})^k.\qquad(3)$$

Теорема 1. *Пусть k — фиксированное натуральное число, последовательность c_n $(c_n\ge0)$ удовлетворяет условию (ND,k). Тогда существует последовательность a_n, для которой выполнено* 1) $|a_n|\le c_n$ *для всех* n; 2) *ряд $\sum a_n$ суммируем к нулю любым методом (C,α) с $\alpha>k$;* 3) *ряд $\sum a_n$ не суммируем методом (C,k).*

Сделаем одно замечание об условиях (ND,k). Эти условия были получены некоторым изменением (введением требования "равномерности роста") из отрицания условий (F,k) и внешне выглядят несколько громоздкими. Однако, несмотря на это, они оказываются довольно удобными в применении. Так, простой проверкой того, что $\frac{w_n}{n}\in(ND,k)$ для всех k, доказывается

Теорема 2. *Пусть последовательность w_n такова, что $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n=+\infty$. Тогда $\frac{w_n}{n}\notin OT_{(C,k)}(C,\alpha)$ ни при каких k и α $(k<\alpha)$.*

Теорема 2 вместе с указанными выше результатами работ [2], [3], [5] полностью решает вопрос о наилучшем с точки зрения порядка $OT_Q(P)$-условии для случая $Q=(C,k)$; $P=(C,\alpha)$ с $\alpha>k$ или $P=A$, а именно $\frac{1}{n}\in OT_{(C,k)}(P)$; $\frac{w_n}{n}\notin OT_{(C,k)}(P)$, если $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n=+\infty$.

2. Установим некоторые вспомогательные утверждения, которые потребуются при доказательстве теорем. Обозначения в приводимых ниже леммах максимально приближены к соответствующим обозначениям в теоремах.

В каждой из лемм фиксированы натуральные числа k, l, m, l_i, m_i, где $i=1,\dots,k+2$, причем выполнено

$$l\le l_1<m_1<l_2<m_2<\dots<l_{k+2}<m_{k+2}\le m. \tag{4}$$

Действительные числа λ, β_i $(i=1,\dots,k+2)$, $\widetilde{c}_\nu$, a_ν (ν — целое, $\nu\in(l;m]$) заданы так, что

$$\widetilde{c}_\nu\ge 0 \qquad \text{для всех} \quad \nu\in(l;m], \tag{5}$$

$$a_\nu=0, \qquad \text{если} \quad \nu\in(l;m]\setminus\bigcup_{i=1}^{k+2}(l_i;m_i], \tag{6}$$

$$a_\nu=\lambda\cdot\beta_i\cdot\widetilde{c}_\nu, \qquad \text{если} \quad \nu\in(l_i;m_i]. \tag{7}$$

Будут использоваться также следующие обозначения: $[t]$ — целая часть числа t;

$$Y_\nu(n,k)=\prod_{s=1}^{k}(n-\nu+s).$$

Лемма 1. *Пусть k, l, m, l_i, m_i $(i=1,\dots,k+2)$ — натуральные числа, удовлетворяющие неравенствам* (4). *Пусть λ, β_i $(i=1,\dots,k+2)$, $\widetilde{c}_\nu$, a_ν (ν — целое, $\nu\in(l;m]$) — действительные числа, удовлетворяющие соотношениям* (5)–(7) *и такие, что для всех целых $t\in[0;k]$ выполнено*

$$\sum_{i=1}^{k+2}\Big(\sum_{\nu=l_i+1}^{m_i}\nu^t\widetilde{c}_\nu\Big)\beta_i=0. \tag{8}$$

Пусть n — натуральное число такое, что $n\ge m$. Тогда справедливы равенства

$$\sum_{\nu=l+1}^{m}Y_\nu(n,k+1)a_\nu=(-1)^{k+1}\lambda\Big(\sum_{i=1}^{k+2}\Big(\sum_{\nu=l_i+1}^{m_i}\nu^{k+1}\widetilde{c}_\nu\Big)\beta_i\Big)=\lambda\sum_{i=1}^{k+2}\beta_i\Big(\sum_{\nu=l_i+1}^{m_i}(m-\nu+1)^{k+1}\widetilde{c}_\nu\Big), \tag{9}$$

$$\sum_{\nu=l+1}^{m}Y_\nu(n,k)a_\nu=0. \tag{10}$$

Доказательство. Выражение $Y_\nu(n,k+1)$ является многочленом степени $k+1$ от переменной ν. Обозначим числовой коэффициент при ν^t в стандартной записи этого многочлена через χ_t, т. е. $Y_\nu(n,k+1)=\sum\limits_{t=0}^{k+1}\chi_t\nu^t$. Тогда, т. к. $\chi_{k+1}=(-1)^{k+1}$, то, используя (5)–(8), получаем

$$\sum_{\nu=l+1}^{m}Y_\nu(n,k+1)a_\nu=\lambda\sum_{i=1}^{k+2}\beta_i\sum_{\nu=l_i+1}^{m_i}\Big(\sum_{t=0}^{k+1}\chi_t\nu^t\Big)\widetilde{c}_\nu=$$
$$=\lambda\sum_{t=0}^{k+1}\chi_t\Big(\sum_{i=1}^{k+2}\Big(\sum_{\nu=l_i+1}^{m_i}\nu^t\widetilde{c}_\nu\Big)\beta_i\Big)=(-1)^{k+1}\lambda\Big(\sum_{i=1}^{k+2}\Big(\sum_{\nu=l_i+1}^{m_i}\nu^{k+1}\widetilde{c}_\nu\Big)\beta_i\Big).$$

Аналогично, раскрывая по степеням ν выражения $(m-\nu+1)^k$ и $Y_\nu(n,k)$ и применяя (8), получаем соответственно второе из равенств формулы (9) и формулу (10). $\square$

При доказательстве леммы 2 будут использоваться следующие неравенства, справедливые для всех $q \in (1;\ 1{,}5)$, $p \in (0;1)$

$$\frac{q^p-1}{q-1} \geq \frac{p}{2p+2}, \tag{11}$$

$$q^8-1 < 50(q-1). \tag{12}$$

Неравенство (11) вытекает из возрастания на $[0;1]$ функции $\phi(y) = (2y+2)(q^y-1) - y(q-1)$, которое, в свою очередь, следует из того, что $\phi'(0) > 0$ и $\phi''(y) > 0$ при $y \in [0;1]$. Неравенство (12) получается разложением q^8-1 на множители и элементарными числовыми оценками.

Лемма 2. *Пусть* q $(1 < q < q^3 < 2)$, p $(0 < p < 1)$ *— фиксированные числа;* k, l, m, l_i, m_i $(i = 1,\ldots,k+2)$ *— натуральные числа, удовлетворяющие неравенствам* (4) *и такие, что*

$$q^p m_i \leq l_{i+1}, \quad q \leq \frac{m}{l} \leq q^3, \quad 1 + \frac{k+1}{m} < q^3. \tag{13}$$

Пусть $l_{k+3} = [q^p m]+1$, V *— фиксированное положительное число,* λ $(\lambda{>}0)$, β_i $(i{=}1,\ldots,k{+}2)$, $\widetilde{c}_\nu$, a_ν $(\nu$ *— целое,* $\nu \in (l;m])$ *— действительные числа, удовлетворяющие соотношениям* (5)–(7) *и равенству* $\sum\limits_{\nu=l_1+1}^{m_1} \widetilde{c}_\nu = \sum\limits_{\nu=l_i+1}^{m_i} \widetilde{c}_\nu$ $(i = 2,\ldots,k+1)$.

Пусть справедливы неравенства

$$\Big|\sum_{\nu=l+1}^{m_i} Y_\nu(l_{i+1};k) a_\nu\Big| < \frac{V}{2^{k+2}}\left(\frac{p}{100p+100}\right)^{k(k+2)} m_i^k \tag{14}$$

для $i = 1,\ldots,k+2$ *и*

$$\lambda \sum_{\nu=l_1+1}^{m_1} \widetilde{c}_\nu > \frac{V}{(q^8-1)^k}. \tag{15}$$

Тогда для всех целых $i \in [1;k+2]$ *имеем*

$$|\beta_i| < \frac{1}{2^{k+3-i}}\left(\frac{p}{100p+100}\right)^{k(k+2-i)}. \tag{16}$$

Доказательство проведем индукцией по i. Пусть $i = 1$. Тогда, применяя неравенства (11)–(15), получаем

$$\frac{V}{2^{k+2}}\left(\frac{p}{100p+100}\right)^{k(k+2)} m_i^k > \Big|\sum_{\nu=l+1}^{m_1} Y_\nu(l_2;k) a_\nu\Big| = \lambda|\beta_1| \sum_{\nu=l_1+1}^{m_1} Y_\nu(l_2;k)\widetilde{c}_\nu \geq$$

$$\geq \lambda|\beta_1|(l_2-m_1)^k \sum_{\nu=l_1+1}^{m_1} \widetilde{c}_\nu \geq \frac{V}{50^k(q-1)^k}|\beta_1| m_1^k \left(\frac{l_2}{m_1}-1\right)^k \geq$$

$$\geq \frac{V(q^p-1)^k}{50^k(q-1)^k}|\beta_1| m_1^k \geq V\left(\frac{p}{100p+100}\right)^k |\beta_1| m_1^k.$$

Отсюда следует, что $|\beta_1| < \frac{1}{2^{k+2}}(\frac{p}{100p+100})^{k(k+1)}$. Для $i = 1$ неравенство (16) доказано.

Допустим, что оно верно для $i = 1, \ldots, w$, где w — целое, $w \in [1, k+1]$. Покажем, что оно верно для $i = w+1$. С использованием (13), (14) имеем

$$\frac{V}{2^{k+2}}\Big(\frac{p}{100p+100}\Big)^{k(k+2)} m_{w+1}^k > \Big|\sum_{\nu=l+1}^{m_{w+1}} Y_\nu(l_{w+2};k)a_\nu\Big| =$$

$$= \Big|\lambda\sum_{i=1}^{w}\beta_i\sum_{\nu=l_i+1}^{m_i} Y_\nu(l_{w+2};k)\widetilde{c}_\nu + \lambda\beta_{w+1}\sum_{\nu=l_{w+1}+1}^{m_{w+1}} Y_\nu(l_{w+2};k)\widetilde{c}_\nu\Big| \ge$$

$$\ge \lambda|\beta_{w+1}|\sum_{\nu=l_{w+1}+1}^{m_{w+1}} Y_\nu(l_{w+2};k)\widetilde{c}_\nu - \lambda\sum_{i=1}^{w}|\beta_i|\sum_{\nu=l_i+1}^{m_i} Y_\nu(l_{w+2};k)\widetilde{c}_\nu \ge$$

$$\ge \lambda|\beta_{w+1}|(l_{w+2}-m_{w+1})^k\sum_{\nu=l_{w+1}+1}^{m_{w+1}}\widetilde{c}_\nu - \lambda(l_{w+2}-l_1+k)^k\sum_{i=1}^{w}|\beta_i|\sum_{\nu=l_i+1}^{m_i}\widetilde{c}_\nu =$$

$$= \lambda\Big(\sum_{\nu=l_1+1}^{m_1}\widetilde{c}_\nu\Big)\Big(|\beta_{w+1}|m_{w+1}^k\Big(\frac{l_{w+2}}{m_{w+1}}-1\Big)^k - \Big(\sum_{i=1}^{w}|\beta_i|\Big)m_{w+1}^k\Big(\frac{l_1}{m_{w+1}}\Big)^k\Big(\frac{l_{w+2}+k}{l_1}-1\Big)^k\Big) \ge$$

$$\ge m_{w+1}^k\lambda\Big(\sum_{\nu=l_1+1}^{m_1}\widetilde{c}_\nu\Big)\Big(|\beta_{w+1}|(q^p-1)^k - \Big(\sum_{i=1}^{w}|\beta_i|\Big)(q^8-1)^k\Big).$$

Последний переход совершен с помощью неравенства $\frac{l_{w+2}+k}{l_1} = \frac{(q^pm+1+k)q^pm}{q^pml_1} < (1+\frac{1+k}{m})q^p\frac{m}{l} < q^3qq^3 < q^8$. Применяя теперь неравенство (15), получаем

$$\frac{V}{2^{k+2}}\Big(\frac{p}{100p+100}\Big)^{k(k+2)} \ge V\Big(|\beta_{w+1}|\Big(\frac{q^p-1}{q^8-1}\Big)^k - \sum_{i=1}^{w}|\beta_i|\Big).$$

Отсюда, используя формулы (11), (12) и индукционное предположение, заключаем

$$|\beta_{w+1}| < \Big(\frac{q^8-1}{q^p-1}\Big)^k\Big(\sum_{i=1}^{w}|\beta_i| + \frac{1}{2^{k+2}}\Big(\frac{p}{100p+100}\Big)^{k(k+2)}\Big) <$$

$$< \Big(\frac{100p+100}{p}\Big)^k\Big(\sum_{i=1}^{w}\frac{1}{2^{k+3-i}}\Big(\frac{p}{100p+100}\Big)^{k(k+2-i)} + \frac{1}{2^{k+2}}\Big(\frac{p}{100p+100}\Big)^{k(k+2)}\Big) <$$

$$< \Big(\frac{100p+100}{p}\Big)^k\Big(\frac{p}{100p+100}\Big)^{k(k+2-w)}\Big(\sum_{i=1}^{w}\frac{1}{2^{k+3-i}} + \frac{1}{2^{k+2}}\Big) = \Big(\frac{p}{100p+100}\Big)^{k(k+1-w)}\frac{1}{2^{k+2-w}}. \quad \square$$

3. Доказательство теоремы 1. Так как $c_n \in (ND, k)$, то существуют $\varepsilon > 0$ и p $(0 < p < 1)$ такие, что для любого q $(1 < q < q^3 \le 2)$ найдутся указанные в условии (ND, k) объекты, зависящие, вообще говоря, от q.

В качестве q будем рассматривать величины $q_s = \sqrt[3]{1 + (\frac{1}{2})^{s+2}}$ при натуральных s.

Для каждого из этих q_s существует следующий набор “своих” объектов (в качестве верхнего индекса у них правильно было бы писать (q_s), но для краткости будем писать (s)):

I) последовательность натуральных чисел $\{n_r^{(s)}\}_{r=1}^{+\infty}$ такая, что

$$q_s \le \frac{n_{r+1}^{(s)}}{n_r^{(s)}} \le q_s^3;$$

II) последовательность $\{\widetilde{c}_n^{(s)}\}_{n=0}^{+\infty}$ такая, что $0 \le \widetilde{c}_n^{(s)} \le c_n$;

III) $(2k+4)$ возрастающих последовательностей натуральных чисел $\{l_{ir}^{(s)}\}_{r=1}^{+\infty}$, $\{m_{ir}^{(s)}\}_{r=1}^{+\infty}$ $(i = 1, \ldots, k+2)$, и для этих объектов для бесконечного числа номеров r одновременно выполнены соотношения (1)–(3).

Построим теперь по индукции последовательности $\{l^{(s)}\}_{s=1}^{+\infty}$, $\{m^{(s)}\}_{s=1}^{+\infty}$, $\{l_i^{(s)}\}_{s=1}^{+\infty}$, $\{m_i^{(s)}\}_{s=1}^{+\infty}$ $(i=1,\ldots,k+2)$. Для этого обозначим через ρ_1 первый из номеров r последовательности $\{n_r^{(1)}\}$, для которых выполнены (1)–(3) и $n_{\rho_1}^{(1)} > 64(k+1)$.

Положим

$$l^{(1)} = n_{\rho_1}^{(1)},\quad m^{(1)} = n_{\rho_1+1}^{(1)},\quad l_i^{(1)} = l_{i\rho_1}^{(1)},\quad m_i^{(1)} = m_{i\rho_1}^{(1)}\quad (i=1,\ldots,k+2).$$

Тем самым первые члены последовательностей построены. Пусть теперь построены первые $(s-1)$ членов. Построим члены с номерами s.

Обозначим через ρ_s первый из номеров последовательности $\{n_r^{(s)}\}$, для которых выполнены соотношения (1)–(3) и справедливы следующие неравенства:

$$n_{\rho_s}^{(s)} > 2m^{(s-1)},$$

$$\sum_{j=1}^{s-1} (l^{(j)})^{k+1} \Big/ (n_{\rho_s}^{(s)})^{k+1} < \frac{1}{2^{s+1}}.$$

Положим $l^{(s)} = n_{\rho_s}^{(s)}$, $m^{(s)} = n_{\rho_s+1}^{(s)}$, $l_i^{(s)} = l_{i\rho_s}^{(s)}$, $m_i^{(s)} = m_{i\rho_s}^{(s)}$.

Тем самым последовательности $\{l^{(s)}\}$, $\{m^{(s)}\}$, $\{l_i^{(s)}\}$, $\{m_i^{(s)}\}$, где $i=1,\ldots,k+2$, $s\in\mathbb{N}$, построены, причем для всех s выполнены соотношения

$$1 < q_s \le \frac{m^{(s)}}{l^{(s)}} \le q_s^3 = 1 + \frac{1}{2^{s+2}}, \tag{17}$$

$$8(k+1) < l^{(s)} \le l_1^{(s)} < m_1^{(s)} < q_s^p m_1^{(s)} \le l_2^{(s)} < m_2^{(s)} < q_s^p m_2^{(s)} \le l_3^{(s)} < \cdots \le l_{k+2}^{(s)} < m_{k+2}^{(s)} \le m^{(s)}, \tag{18}$$

$$\sum_{\nu=l_1^{(s)}+1}^{m_1^{(s)}} \widetilde{c}_\nu^{(s)} = \sum_{\nu=l_i^{(s)}+1}^{m_i^{(s)}} \widetilde{c}_\nu^{(s)} \quad (i=2,\ldots,k+2), \tag{19}$$

$$\sum_{i=1}^{k+2} \sum_{\nu=l_i^{(s)}+1}^{m_i^{(s)}} (m^{(s)}-\nu+1)^k \widetilde{c}_\nu^{(s)} \ge \varepsilon (l^{(s)})^k, \tag{20}$$

$$l^{(s)} > 2m^{(s-1)}, \tag{21}$$

$$\frac{\sum\limits_{j=1}^{s-1} (l^{(j)})^{k+1}}{(l^{(s)})^{k+1}} < \frac{1}{2^{s+1}}. \tag{22}$$

Из соотношений (18) и (20) получим, что последовательности $\{l^{(s)}\}$ и $\{m^{(s)}\}$ монотонно возрастают, стремясь к $+\infty$, и полуинтервалы $(l^{(s)}; m^{(s)}]$ при различных s попарно не пересекаются.

Далее будем строить последовательность $\{a_n\}_{n=0}^{+\infty}$, удовлетворяющую условиям теоремы.

Положим $a_n = 0$, если $n \notin \bigcup\limits_{s=1}^{+\infty} (l^{(s)}; m^{(s)}]$. Будем считать теперь, что s — произвольное, но фиксированное натуральное число, и построим a_n для $n \in (l^{(s)}; m^{(s)}]$. Для этого понадобятся числа $\lambda^{(s)}$ и $\beta_i^{(s)}$, где i — целое, $i \in [1, k+2]$, которые сейчас определим. Положим

$$\lambda^{(s)} = \frac{\varepsilon (l^{(s)})^k}{\sum\limits_{i=1}^{k+2} \sum\limits_{\nu=l_i^{(s)}+1}^{m_i^{(s)}} (m^{(s)}-\nu+1)^k \widetilde{c}_\nu^{(s)}}. \tag{23}$$

Из (20) следует, что $0 < \lambda^{(s)} \le 1$.

Рассмотрим теперь следующую систему линейных уравнений относительно неизвестных $\beta_i^{(s)}$, где i — целое, $i \in [1, k+2]$:

$$\begin{gathered}
\Bigl(\sum_{\nu=l_1^{(s)}+1}^{m_1^{(s)}} \widetilde{c}_\nu^{(s)}\Bigr)\beta_1^{(s)} + \dots + \Bigl(\sum_{\nu=l_{k+2}^{(s)}+1}^{m_{k+2}^{(s)}} \widetilde{c}_\nu^{(s)}\Bigr)\beta_{k+2}^{(s)} = 0,\\
\Bigl(\sum_{\nu=l_1^{(s)}+1}^{m_1^{(s)}} \nu\widetilde{c}_\nu^{(s)}\Bigr)\beta_1^{(s)} + \dots + \Bigl(\sum_{\nu=l_{k+2}^{(s)}+1}^{m_{k+2}^{(s)}} \nu\widetilde{c}_\nu^{(s)}\Bigr)\beta_{k+2}^{(s)} = 0,\\
\dots\dots\dots\\
\Bigl(\sum_{\nu=l_1^{(s)}+1}^{m_1^{(s)}} \nu^k\widetilde{c}_\nu^{(s)}\Bigr)\beta_1^{(s)} + \dots + \Bigl(\sum_{\nu=l_{k+2}^{(s)}+1}^{m_{k+2}^{(s)}} \nu^k\widetilde{c}_\nu^{(s)}\Bigr)\beta_{k+2}^{(s)} = 0.
\end{gathered} \tag{24}$$

В системе (24) количество уравнений $(k+1)$ меньше числа неизвестных. Следовательно, эта система обладает решениями, отличными от нулевого. Тогда, очевидно, существует решение $(\beta_1^{(s)}, \beta_2^{(s)}, \dots, \beta_{k+2}^{(s)})$ системы (24) такое, что $\max\limits_{1\le i\le k+2} |\beta_i^{(s)}| = 1$. Именно такой конкретный набор чисел $\beta_i^{(s)}$ и будем в дальнейшем рассматривать.

Положим

$$\begin{aligned}
&a_n = \lambda^{(s)}\beta_i^{(s)}c_n^{(s)} && \text{при} \;\; n \in (l_i^{(s)}; m_i^{(s)}], \;\; \text{где} \;\; i = 1, \dots, k+2;\\
&a_n = 0 && \text{при} \;\; n \in (l^{(s)}; m^{(s)}] \setminus \bigcup_{i=1}^{k+2} (l_i^{(s)}; m_i^{(s)}].
\end{aligned}$$

Таким образом, последовательность $\{a_n\}_{n=0}^{+\infty}$ определена, причем $|a_n| \le c_n$ для всех n.

Покажем, что $\sum a_n = 0\ (C, k+1)$. Возьмем любое $\delta > 0$. Для этого δ существует натуральное s_0 $(s_0 > 2)$ такое, что для всех $s \ge s_0$ выполнено неравенство

$$\frac{(k+1)!}{2^s}\varepsilon < \delta. \tag{25}$$

Пусть $n > l^{(s_0)}$. Тогда существует $s \ge s_0$ такое, что $l^{(s)} < n \le l^{(s+1)}$. Обозначим $T^k(n) = \sum\limits_{\nu=0}^{n} Y_\nu(n,k)a_\nu$, $T^{k+1}(n) = \sum\limits_{\nu=0}^{n} Y_\nu(n,k+1)a_\nu$ и оценим модули этих величин.

Применяя лемму 1 к каждому из промежутков $(l^{(j)}; m^{(j)}]$, где $j = 1, \dots, s-1$, т. е. полагая в лемме 1 $l = l^{(j)}$, $m = m^{(j)}$, $l_i = l_i^{(j)}$, $m_i = m_i^{(j)}$, $\lambda = \lambda^{(j)}$, $c_\nu = c_\nu^{(j)}$, получаем

$$\begin{gathered}
|T^{k+1}(n)| = \Bigl|\sum_{j=1}^{s-1}\sum_{\nu=l^{(j)}+1}^{m^{(j)}} Y_\nu(n,k+1)a_\nu + \sum_{\nu=l^{(s)}+1}^{n} Y_\nu(n,k+1)a_\nu\Bigr| =\\
= \Bigl|\sum_{j=1}^{s-1}\lambda^{(j)}\sum_{i=1}^{k+2}\beta_i\Bigl(\sum_{\nu=l_i^{(j)}+1}^{m_i^{(j)}} (m^{(j)}-\nu+1)^{k+1}\widetilde{c}_\nu^{(j)}\Bigr) + \sum_{\nu=l^{(s)}+1}^{n} Y_\nu(n,k+1)a_\nu\Bigr|;\\
|T^k(n)| = \Bigl|\sum_{\nu=l^{(s)}+1}^{n} Y_\nu(n,k)a_\nu\Bigr|.
\end{gathered} \tag{26}$$

Рассмотрим отдельно два случая расположения n в промежутке $(l^{(s)}; l^{(s+1)}]$:

А) $m^{(s)} < n \le l^{(s+1)}$,

Б) $l^{(s)} < n \le m^{(s)}$.

В случае А), еще раз применяя лемму 1 к промежутку $(l^{(s)}; m^{(s)}]$, выводим

$$|T^{k+1}(n)| = \Bigg|\sum_{j=1}^{s}\lambda^{(j)}\sum_{i=1}^{k+2}\beta_i\sum_{\nu=l_i^{(j)}+1}^{m_i^{(j)}}(m^{(j)}-\nu+1)^{k+1}\tilde{c}_\nu^{(j)}\Bigg| \le \sum_{j=1}^{s}\lambda^{(j)}\sum_{i=1}^{k+2}\sum_{\nu=l_i^{(j)}+1}^{m_i^{(j)}}(m^{(j)}-\nu+1)^{k+1}\tilde{c}_\nu^{(j)}, \tag{27}$$

$$|T^k(n)| = 0. \tag{28}$$

В случае Б), используя оценки $Y_\nu(n,k) < k!(m^{(s)}-\nu+1)^k$, $Y_\nu(n,k+1) < (k+1)!(m^{(s)}-\nu+1)^{k+1}$, получаем

$$|T^{k+1}(n)| \le (k+1)!\sum_{j=1}^{s}\lambda^{(j)}\sum_{i=1}^{k+2}\sum_{\nu=l_i^{(j)}+1}^{m_i^{(j)}}(m^{(j)}-\nu+1)^{k+1}\tilde{c}_\nu^{(j)}, \tag{29}$$

$$|T^k(n)| \le k!\lambda^{(s)}\sum_{i=1}^{k+2}\sum_{\nu=l_i^{(s)}+1}^{m_i^{(s)}}(m^{(s)}-\nu+1)^k\tilde{c}_\nu^{(s)}. \tag{30}$$

Сравнивая полученные оценки с формулами (27), (28), заключаем, что для любого $n \in (l^{(s)}; l^{(s+1)}]$ верны неравенства (29), (30).

Из формулы (29) с использованием (17), (22), (23), (25) получаем

$$\frac{|T^{k+1}(n)|}{(n+1)\cdots(n+k+1)} \le \frac{(k+1)!}{(l^{(s)})^{k+1}}\sum_{j=1}^{s}\lambda^{(j)}l^{(j)}\left(\frac{m^{(j)}}{l^{(j)}}-1\right)\sum_{i=1}^{k+2}\sum_{\nu=l_i^{(j)}+1}^{m_i^{(j)}}(m^{(j)}-\nu+1)^k\tilde{c}_\nu^{(j)} \le$$

$$\le \frac{(k+1)!}{(l^{(s)})^{k+1}}\sum_{j=1}^{s}\frac{\varepsilon(l^{(j)})^{k+1}}{2^{j+2}} < \frac{(k+1)!\varepsilon}{(l^{(s)})^{k+1}}\left(\sum_{j=1}^{s-1}(l^{(j)})^{k+1}+\frac{(l^{(s)})^{k+1}}{2^{s+2}}\right) < \frac{(k+1)!}{2^s}\varepsilon < \delta. \tag{31}$$

Формула (31) означает, что

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\binom{n+k+1}{k+1}}\sum_{\nu=0}^{n}\binom{n-\nu+k+1}{k+1}a_\nu = 0.$$

Следовательно ([1], с. 125–126), $\sum a_n = 0$ $(C, k+1)$.

Из формул (23) и (30) сразу вытекает, что $|T^k(n)| \le k!\varepsilon n^k$ и, следовательно, $\sum\limits_{\nu=0}^{n}\binom{n-\nu+k}{k}a_\nu = O(n^k)$, а это по определению ([1], с. 128) означает, что ряд $\sum a_n$ ограничен (C,k).

Таким образом, ряд $\sum a_n$ ограничен (C,k) и суммируем к нулю методом $(C,k+1)$. Следовательно, по теореме о выпуклости ([1], с. 163–164, теорема 70) $\sum a_n = 0$ (C,α) для всех $\alpha > k$.

Для доказательства теоремы осталось установить, что ряд $\sum a_n$ не суммируем методом (C,k). Предположим противное, что ряд $\sum a_n$ суммируем (C,k). Поскольку $\sum a_n = 0$ $(C,k+1)$, то и суммироваться (C,k) ряд $\sum a_n$ мог бы только к числу 0. Тогда

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\binom{n+k}{k}}\sum_{\nu=0}^{n}\binom{n-\nu+k}{k}a_\nu = 0.$$

Это соотношение эквивалентно тому, что $\sum\limits_{\nu=0}^{n}Y_\nu(n,k)a_\nu = o(n^k)$. Тогда для любого B существует s такое, что для любого $n > l^{(s)}$ имеем $\frac{1}{n^k}\Big|\sum\limits_{\nu=0}^{n}Y_\nu(n,k)a_\nu\Big| < B$.

В качестве B будем рассматривать величину $\frac{\varepsilon}{(k+2)2^{2k+2}}(\frac{p}{100p+100})^{k(k+2)}$. Тогда из (26) для $i=1,\ldots,k+1$ получаем

$$\Big|\sum_{\nu=0}^{l_{i+1}^{(s)}} Y_\nu(l_{i+1}^{(s)},k)a_\nu\Big| = |T^k(l_{i+1}^{(s)})| = \Big|\sum_{\nu=l^{(s)}+1}^{l_{i+1}^{(s)}} Y_\nu(l_{i+1}^{(s)},k)a_\nu\Big| =$$

$$= \Big|\sum_{\nu=l^{(s)}+1}^{m_i^{(s)}} Y_\nu(l_{i+1}^{(s)},k)a_\nu\Big| < B(l_{i+1}^{(s)})^k < 2^k B(m_i^{(s)})^k.$$

Положив $l_{k+3}^{(s)} = [q^p m^{(s)}]+1$, по лемме 1 получим

$$\Big|\sum_{\nu=l^{(s)}+1}^{m_{k+2}^{(s)}} Y_\nu(l_{k+3}^{(s)},k)a_\nu\Big| = \Big|\sum_{\nu=l^{(s)}+1}^{m^{(s)}} Y_\nu(l_{k+3}^{(\nu)},k)a_\nu\Big| = 0.$$

Тем самым для всех $i=1,\ldots,k+2$ имеем

$$\Big|\sum_{\nu=l^{(s)}+1}^{m_i^{(s)}} Y_\nu(l_{i+1}^{(s)},k)a_\nu\Big| < \frac{\varepsilon}{(k+2)2^{(k+2)}}\left(\frac{p}{100p+100}\right)^{k(k+2)}(m_i^{(s)})^k. \tag{32}$$

Далее

$$\varepsilon(l^{(s)})^k = \lambda^{(s)}\sum_{i=1}^{k+2}\sum_{\nu=l_i^{(s)}+1}^{m_i^{(s)}}(m^{(s)}-\nu+1)^k\widetilde{c}_\nu^{(s)} \le \lambda^{(s)}\sum_{i=1}^{k+2}(m^{(s)}-l^{(s)})^k\sum_{\nu=l_i^{(s)}+1}^{m_i^{(s)}}\widetilde{c}_\nu^{(s)} =$$

$$= (k+2)\lambda^{(s)}(l^{(s)})^k\left(\frac{m^{(s)}}{l^{(s)}}-1\right)^k\sum_{\nu=l_1^{(s)}+1}^{m_1^{(s)}}\widetilde{c}_\nu^{(s)} < (k+2)(l^{(s)})^k(q^8-1)^k\lambda^{(s)}\sum_{\nu=l_1^{(s)}+1}^{m_1^{(s)}}\widetilde{c}_\nu^{(s)}.$$

Следовательно,

$$\lambda^{(s)}\sum_{\nu=l_1^{(s)}+1}^{m_1^{(s)}}\widetilde{c}_\nu^{(s)} > \frac{\varepsilon}{(k+2)(q^8-1)^k}. \tag{33}$$

Сравнивая формулы (32), (33) с формулами (14), (15), замечаем, что выполнены условия леммы 2 на промежутке $(l^{(s)};m^{(s)}]$ с $V=\frac{\varepsilon}{k+2}$ (соотношение $1+\frac{k+1}{m^{(s)}}<q^3$ выполнено, т. к. из (21) следует $\frac{k+1}{m^{(s)}}<\frac{k+1}{l^{(1)}}\frac{l^{(1)}}{l^{(2)}}\cdots\frac{l^{(s-1)}}{l^{(s)}}<\frac{1}{8}\frac{1}{2^{s-1}}=\frac{1}{2^{s+2}}=q_s^3-1$).

Применяя лемму 2, получаем для всех целых $i\in[1,k+2]$ неравенство

$$|\beta_i^{(s)}| < \frac{1}{2^{k+3-i}}\left(\frac{p}{100p+100}\right)^{k(k+2-i)} \le \frac{1}{2},$$

которое противоречит тому, что $\max\limits_{1\le i\le k+2}|\beta_i^{(s)}|=1$. Полученное противоречие доказывает теорему 1. $\square$

4. Доказательство теоремы 2. Пусть $c_n=\frac{w_n}{n}$ для всех n и пусть k — любое фиксированное натуральное число. Согласно теореме 1 достаточно установить, что $c_n\in(ND,k)$.

Возьмем $\varepsilon=1$, $p=\frac{1}{2k+4}$ и построим для любого q такого, что $1<q<q^3\le 2$, требуемые в условии (ND,k) объекты. Начнем с построения последовательностей $\{n_r^{(q)}\}_{r=1}^{+\infty}$, $\{l_{ir}^{(q)}\}_{r=1}^{+\infty}$,

$\{m_{ir}^{(q)}\}_{r=1}^{+\infty}$ $(i=1,\ldots,k+2)$. Положим $n_1^{(q)}=[\frac{1}{q^{2p}-1}]+1$. Считая теперь, что при некотором натуральном r построена величина $n_r^{(q)}$, определим значения $l_{ir}^{(q)}$, $m_{ir}^{(q)}$ $(i=1,\ldots,k+2)$ и $n_{r+1}^{(q)}$ следующим образом: $l_{1r}^{(q)}=n_r^{(q)}$, $m_{ir}^{(q)}=[q^p l_{ir}^{(q)}]+1$ $(i=1,\ldots,k+2)$, $l_{(i+1)r}^{(q)}=[q^p m_{ir}^{(q)}]+1$ $(i=1,\ldots,k+1)$, $n_{r+1}^{(q)}=[q^p m_{(k+2)r}^{(q)}]+1$.

Тем самым требуемые последовательности построены и для них выполнены соотношения

$$\frac{n_{r+1}^{(q)}}{n_r^{(q)}}=\frac{n_{r+1}^{(q)}}{m_{(k+2)r}^{(q)}}\prod_{i=1}^{k+2}\frac{m_{ir}^{(q)}}{l_{ir}^{(q)}}\prod_{i=1}^{k+1}\frac{l_{(i+1)r}^{(q)}}{m_{ir}^{(q)}}>q^p(q^p)^{k+2}(q^p)^{k+1}=q, \tag{34}$$

$\frac{m_{ir}^{(q)}}{l_{ir}^{(q)}}\le q^p+\frac{1}{l_{ir}^{(q)}}\le q^p+\frac{1}{n_1^{(q)}}<q^p+(q^{2p}-1)<q^p+q^p(q^{2p}-1)=q^{3p}$ для всех целых $i\in[1,k+2]$.

Аналогично $\frac{l_{(i+1)r}^{(q)}}{m_{ir}^{(q)}}<q^{3p}$ $(i=1,\ldots,k+1)$ и $\frac{n_{r+1}^{(q)}}{m_{(k+2)r}^{(q)}}<q^{3p}$.

Далее, применяя разложение $\frac{n_{r+1}^{(q)}}{n_r^{(q)}}$ в произведение (см. (34)), получаем $\frac{n_{r+1}^{(q)}}{n_r^{(q)}}<q^3$. Кроме того, из построения следует справедливость формулы (1) из определения (ND,k).

Построим последовательность $\{\widetilde{c}_n^{(q)}\}_{n=0}^{+\infty}$. Для этого сначала образуем промежуточную последовательность $\{d_n^{(q)}\}_{n=0}^{+\infty}$, положив

$$\begin{aligned}
&d_\nu^{(q)}=0 && \text{при}\quad 0\le\nu\le n_1^{(q)},\\
&d_\nu^{(q)}=(\min_{n_r^{(q)}<n<n_{r+1}^{(q)}} w_n)/n_{r+1}^{(q)} && \text{при}\quad n_r^{(q)}<\nu\le n_{r+1}^{(q)}.
\end{aligned}$$

Обозначим $H_{ir}^{(q)}=\sum\limits_{\nu=l_{ir}^{(q)}+1}^{m_{ir}^{(q)}} d_\nu$ $(i=1,\ldots,k+2)$ и $H_r^{(q)}=\min\limits_{i=1,\ldots,k+2}H_{ir}^{(q)}$.

Положим теперь $\widetilde{c}_\nu^{(q)}=0$ при $0\le\nu\le n_1^{(q)}$, $\widetilde{c}_\nu^{(q)}=\frac{H_r^{(q)}}{H_{ir}^{(q)}}d_\nu^{(q)}$ при $l_{ir}^{(q)}<\nu\le m_{ir}^{(q)}$ $(i=1,\ldots,k+2)$, $\widetilde{c}_\nu^{(q)}=0$ при $\nu\in(n_r^{(q)};n_{r+1}^{(q)}]\setminus\bigcup\limits_{i=1}^{k+2}(l_{ir}^{(q)};m_{ir}^{(q)}]$. Для последовательности $\{\widetilde{c}_n^{(q)}\}_{n=0}^{+\infty}$ выполнено $0\le\widetilde{c}_n^{(q)}\le d_n\le\frac{w_n}{n}=c_n$ и

$$\sum_{\nu=l_{ir}^{(q)}+1}^{m_{ir}^{(q)}}\widetilde{c}_\nu^{(q)}=\frac{H_r^{(q)}}{H_{ir}^{(q)}}\sum_{\nu=l_{ir}^{(q)}+1}^{m_{ir}^{(q)}}d_\nu=H_r^{(q)}\quad(i=1,\ldots,k+2). \tag{35}$$

Из равенства (35) вытекает, что выполнена формула (2) из определения условий (ND,k).

Поскольку $\lim\limits_{n\to+\infty}w_n=+\infty$, то существует N такое, что для всех $n>N$ выполнено

$$w_n>\frac{2}{(q^p-1)^{k+1}}.$$

Пусть r любое такое, что $n_r>N$. Тогда

$$\sum_{i=1}^{k+2}\sum_{\nu=l_{ir}^{(q)}+1}^{m_{ir}^{(q)}}(n_{r+1}^{(q)}-\nu+1)^k\widetilde{c}_\nu^{(q)}=\sum_{i=1}^{k+2}\frac{H_r^{(q)}}{H_{ir}^{(q)}}\sum_{\nu=l_{ir}^{(q)}+1}^{m_{ir}^{(q)}}(n_{r+1}^{(q)}-\nu+1)^k d_\nu=$$

$$=\frac{\min\limits_{n_r^{(q)}<n\le n_{r+1}^{(q)}} w_n}{n_{r+1}^{(q)}}\sum_{i=1}^{k+2}\frac{H_r^{(q)}}{H_{ir}^{(q)}}\sum_{\nu=l_{ir}^{(q)}+1}^{m_{ir}^{(q)}}(n_{r+1}^{(q)}-\nu+1)^k\ge$$

$$\ge\frac{2}{(q^p-1)^{k+1}}\frac{1}{n_{r+1}^{(q)}}\sum_{i=1}^{k+2}\frac{H_r^{(q)}}{H_{ir}^{(q)}}\sum_{\nu=l_{ir}^{(q)}+1}^{m_{ir}^{(q)}}(n_{r+1}^{(q)}-m_{(k+2)r}^{(q)})^k=$$

$$= \frac{2}{(q^p-1)^{k+1}} \frac{(m^{(q)}_{(k+2)r})^k}{n^{(q)}_{r+1}} \left(\frac{n^{(q)}_{r+1}}{m^{(q)}_{(k+2)r}} - 1 \right)^k \sum_{i=1}^{k+2} \frac{H^{(q)}_r}{H^{(q)}_{ir}} l^{(q)}_{ir} \left(\frac{m^{(q)}_{ir}}{l^{(q)}_{ir}} - 1 \right) \geq$$

$$\geq (n^{(q)}_r)^k \sum_{i=1}^{k+2} \frac{H^{(q)}_r}{H^{(q)}_{ir}} \geq (n^{(q)}_r)^k = \varepsilon (n^{(q)}_r)^k.$$

Тем самым справедлива и формула (3) из определения условий (ND, k). Следовательно,

$$c_n \in (ND, k). \quad \square$$

Автор глубоко признателен своему научному руководителю член-корреспонденту РАН П.Л. Ульянову за внимание к работе и ряд полезных замечаний.

Литература

1. Харди Г. *Расходящиеся ряды.* – М.: Ин. лит., 1951. – 504 с.
2. Hardy G.H. *Theorems relating to the summability and convergence of slowly oscillating series* // Proc. London Math. Soc. – 1910. – V. 8. – № 2. – P. 301–320.
3. Littlewood J.E. *The converse of Abel's theorem on power series* // Proc. London Math. Soc. – 1910. – V. 9. – № 2. – P. 434–448.
4. Lorentz G.G. *Tauberian theorems and tauberian conditions* // Trans. Amer. Math. Soc. – 1948. – V. 63. – № 2. – P. 226–234.
5. Мельник В.И. *О суммировании рядов методами Чезаро и Абеля–Пуассона* // Матем. сб. – 1965. – Т. 67. – № 4. – С. 535–540.
6. Степанянц С.А. *Условия тауберова типа, связывающие методы суммирования Чезаро и Рисса различных порядков* // Anal. Math. – 2001. – Т. 27. – С. 287-318.

Московский государственный университет

Поступила
29.04.2003