ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2000 МАТЕМАТИКА № 8 (459)

УДК 517.537

М.М. ДРАГИЛЕВ

О СВОЙСТВАХ АБЕЛЯ И ФАБРИ БАЗИСНЫХ РАЗЛОЖЕНИЙ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

1. Пусть G — односвязная область в расширенной плоскости $\mathbf{C}$, $A(G)$ — пространство функций, аналитических в G, с топологией внутренней равномерной сходимости, $\overline{A}(K)$ — двойственное к $A(G)$ пространство функций, аналитических на компакте $K = \mathbf{C} \setminus G$. Пространства $A(G)$ и $\overline{A}(\overline{G})$ могут, вообще говоря, иметь общий базис, для чего достаточно и в некотором смысле необходимо [1], чтобы граница области G была замкнутой аналитической кривой (в дальнейшем это требование считается выполненным).

Пусть D — произвольная односвязная область, содержащая G, $D \neq G$. Если имеет место строгое включение

$$D \supset \overline{G}, \tag{1}$$

то, как вытекает из [2], найдется общий базис пространств $A(G)$ и $\overline{A}(\overline{G})$, *продолжаемый* в область D, т.е. являющийся базисом также в пространстве $A(D)$. До настоящего времени не известно, является ли условие (1) необходимым для существования такого базиса. Поэтому полезно рассматривать разложение аналитической функции в ряд по элементам общего базиса пространств $A(G)$ и $\overline{A}(\overline{G})$ как аналог классического степенного ряда. В данной статье изучаются простейшие свойства базисных разложений, имеющие прямое отношение к проблеме продолжаемости базиса.

2. Последовательность функций $(f_n)_{n=1}^{\infty} \subset A(G)$ (соответственно $(f_n)_{n=1}^{\infty} \subset \overline{A}(\overline{G})$) называют *квизи-степепной* (к.-с.), если для произвольной последовательности чисел $(c_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathbf{C}$ выполняется условие

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n f_n \in A(G) \Leftrightarrow \overline{\lim_{n\to\infty}} |c_n|^{1/n} \le 1 \tag{2}$$

или соответственно условие

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n f_n \in \overline{A}(\overline{G}) \Leftrightarrow \overline{\lim_{n\to\infty}} |c_n|^{1/n} < 1. \tag{3}$$

Замечание 1 ([3]). Из (3), в частности, следует, что все функции f_n аналитичны в некоторой окрестности компакта $\overline{G}$.

Пусть $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ — к.-с. последовательность в пространствах $A(G)$ и $\overline{A}(\overline{G})$, и пусть наряду с (2) и (3) выполняется одно из следующих двух условий:

а) $$\underline{\lim_{n\to\infty}} |f_n|_{K_z}^{1/n} \ge 1, \tag{4}$$

где K_z — любая замкнутая окрестность произвольной точки $z \in \partial G$, лежащая в области аналитичности всех функций f_n (символ $|\cdot|_K$ означает верхнюю грань модуля функции, определенной на множестве K);

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 97-01-00-215).

б) каждая последовательность из функций f_n содержит подпоследовательность, сумма элементов которой имеет своей естественной границей аналитичности ∂G.

В первом случае будем говорить, что последовательность обладает *свойством Абеля*, во втором — *свойством Фабри.*

Замечание 2. Свойство а) равносильно следующему аналогу классической "первой теоремы Абеля": из сходимости базисного разложения в окрестности граничной точки области G следует равномерная сходимость внутри области; свойство б) близко к теореме Фабри о лакунарных степенных рядах.

Пусть $\sigma : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ — перестановка индексов, $(\lambda_n)_{n=1}^{\infty}$ — последовательность положительных чисел, $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ — последовательность элементов в $A(G)$ либо в $\overline{A}(\overline{G})$.

Преобразование вида

$$(f_n)_{n=1}^{\infty} \to (\lambda_n f_{\sigma(n)})_{n=1}^{\infty}, \tag{5}$$

состоящее в перестановке и нормировке элементов, назовем *элементарным.*

Пусть $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ — к.-с. последовательность в $A(G)$ либо в $\overline{A}(\overline{G})$. Из определения непосредственно вытекает

Лемма 1. *Преобразование* (5) *тогда и только тогда сохраняет свойства* (2) *и* (3), *когда выполняются соотношения*

$$\text{а)}\ \ 0 < \varliminf_{n\to\infty} \frac{\sigma(n)}{n} \le \varlimsup_{n\to\infty} \frac{\sigma(n)}{n} < \infty, \qquad \text{б)}\ \ \lim_{n\to\infty} \lambda_n^{1/n} = 1.$$

При этом сохраняются также свойства Абеля и Фабри.

Лемма 2 ([1]). *Общий базис пространств $A(G)$ и $\overline{A}(\overline{G})$ можно элементарным преобразованием привести к каноническому виду, т. е. сделать к.-с. последовательностью* (*базисом*) *в $A(G)$ и в $\overline{A}(\overline{G})$.*

Лемма 3 ([4]). *Если $D \supset G$ и существует к.-с. базис $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ в $A(G)$, продолжаемый в область D, то найдется последовательность $(\lambda_n)_{n=1}^{\infty}$, удовлетворяющая условию*

$$\varlimsup_{n\to\infty} \lambda_n^{1/n} \le 1, \tag{6}$$

такая, что $(\lambda_n f_n)_{n=1}^{\infty}$ есть к.-с. базис в $A(D)$. Равенство в (6) *достигается тогда и только тогда, когда включение* (1) *не имеет места.*

Следствие. В условиях леммы для произвольного компакта $K \subset D$ выполняется соотношение

$$\varlimsup_{n\to\infty} |\lambda_n f_n|_K^{1/n} < 1. \tag{7}$$

Теорема 1. *Пусть $D \supset G$, $D \not\supset \overline{G}$ и $D \ne G$. Общий базис пространств $A(G)$ и $\overline{A}(\overline{G})$ не продолжается в область D, если соответствующий канонический базис обладает свойствами Абеля или Фабри.*

Доказательство. Если существует общий базис пространств $A(G)$, $\overline{A}(\overline{G})$ и $A(D)$, то по лемме 2 его можно элементарным преобразованием перевести в канонический базис $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ пространств $A(G)$ и $\overline{A}(\overline{G})$, продолжаемый в область D. По лемме 3 найдется последовательность $(\lambda_n)_{n=1}^{\infty}$, удовлетворяющая условию (6), такая, что $(\lambda_n f_n)_{n=1}^{\infty}$ есть к.-с. базис в $A(D)$. Так как при этом в (6) достигается равенство, найдется последовательность индексов $\nu \subset \mathbf{N}$ такая, что $\lim_{n\in\nu} \lambda_n^{1/n} = 1$. В силу (7) имеем $\varlimsup_{n\in\nu} |f_n|_K^{1/n} < 1$ для произвольного компакта $K \subset D$. По условию теоремы найдется точка $z \in \partial G$, внутренняя к D. Пусть $K_z \subset D$ — ее замкнутая окрестность. Если последовательность $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ обладает свойством Абеля, то на основании (4) должно быть

$$\varliminf_{n\in\nu} |f_n|_{K_z}^{1/n} \geq 1,$$

что противоречит предыдущему соотношению. Этим доказано первое утверждение теоремы. Далее заметим, что последовательность $(f_n)_{n\in\nu}$ абсолютно суммируема в $A(D)$. Сумма элементов любой ее подпоследовательности аналитична в области D, а это несовместимо с предположением о том, что исходная последовательность $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ обладает свойством Фабри.

Обратное утверждение неверно, как показывает следующий пример (ср. [5]).

Теорема 2. *Существует общий канонический базис пространств $A(G)$ и $\overline{A}(\overline{G})$, не продолжаемый в область, содержащую G, и не обладающий свойствами Абеля и Фабри.*

Доказательство. Обозначим $U_r = \{z : |z| < r\}$ $(0 < r < \infty)$. Достаточно рассмотреть пространства $A_1 = A(U_1)$ и $\overline{A}_1 = \overline{A}(\overline{U}_1)$. Пусть

$$f_n(z) = \begin{cases} z^{n-1}, & n \neq 2n_k; \\ \dfrac{z^{n_k}(z-1)^{2n_k}}{\binom{2n_k}{n_k}}, & n = 2n_k, \end{cases} \qquad k = 1, 2, \dots, \tag{8}$$

где $n_1 > 1$, $n_{k+1} > 3n_k$ $(k = 1, 2, \dots)$. Последовательность (8) является к.-с. базисом пространства A_1 [5] и, как видно из доказательства, приведенного в [5], также и общим каноническим базисом пространств A_1 и $\overline{A}_1$. Пусть E — внутренность замкнутой аналитической кривой (лемнискаты)

$$L = \left\{ z : \frac{|z|^{1/2}|z-1|}{2} = 1 \right\}.$$

Рассмотрим ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_{2n_k} f_{2n_k}(z) \quad (z \in E), \tag{9}$$

где

$$\varlimsup_{k\to\infty} |c_{2n_k}|^{1/(2n_k)} = 1. \tag{10}$$

Для произвольного компакта $K \subset E$ имеем

$$\varlimsup_{k\to\infty} |f_{2n_k}|_K^{1/(2n_k)} = \lim_{k\to\infty} \frac{2}{\binom{2n_k}{n_k}^{1/(2n_k)}} \varlimsup_{k\to\infty} \left| \frac{z^{n_k}(z-1)^{2n_k}}{2^{2n_k}} \right|_K^{1/(2n_k)} = \left| \frac{|z|^{1/2}|z-1|}{2} \right|_K < 1.$$

Следовательно, ряд (9) сходится равномерно внутри E к некоторой функции $f(z) \in A(E)$. Положим

$$F(w) = \sum_{k=1}^{\infty} c_{2n_k} \frac{2^{2n_k}}{\binom{2n_k}{n_k}} w^{2n_k} \quad (|w| < 1).$$

Функция $F(w)$ аналитична в единичном круге и, т. к. выполнено условие $k = o(n_k)$, по теореме Фабри о лакунарных степенных рядах она имеет особенности в каждой граничной точке. Пусть $w = \frac{1}{2}\sqrt{z}(z-1)$ в некоторой окрестности произвольной точки $z_0 \in L$ (фиксируется однозначная ветвь функции). Так как $f(z) = F(w)$ в части этой окрестности, содержащейся в E, заключаем, что z_0 — особая точка функции $f(z)$. Следовательно, кривая L является естественной границей для суммы ряда (9).

Пусть теперь D — область, содержащая единичный круг, $D \neq U_1$. Так как E содержит замкнутый круг $\overline{U}_1$ с выключенной точкой -1, найдется точка $z_0 \in D \cap E$, для которой $|z_0| = R > 1$. Если базис (8) продолжается в область D, то ряд

$$\frac{1}{z+1} = \sum_{n=1}^{\infty} c_n f_n(z) \tag{11}$$

сходится в $A(D)$ и тем более в A_1, а т. к. (8) — к.-с. базис в A_1, то

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} |c_n|^{1/n} \leq 1.$$

При этом достигается равенство, ибо в противном случае (с учетом того, что (8) — к.-с. базис также и в $\overline{A}_1$) разложение (11) сходилось бы в окрестности точки -1. Из сходимости ряда

$$\sum_{n\notin\nu} c_n f_n(z) = \sum_{n\notin\nu} c_n z^{n-1} \quad (\nu = (2n_k)_{k=1}^{\infty}) \tag{12}$$

в точке z_0 и из первой теоремы Абеля следует, что

$$\overline{\lim_{n\notin\nu}} |c_n|^{1/n} \leq \frac{1}{R}.$$

Таким образом, сумма ряда (12) регулярна в круге U_r, и при этом выполнено условие (10). Значит, сумма ряда (9) является функцией, аналитической в E с особенностями в каждой точке границы, а сумма ряда (11) должна иметь континуум особых точек, по крайней мере, на части кривой L, содержащейся в U_r. Так как это противоречит равенству (11), базис (8) не продолжаем в область D. Остается заметить, что он не обладает свойствами Абеля и Фабри. В частности, при $z = 1$ вместо условия (4) имеем

$$\inf_{K_1} \underline{\lim_{n\to\infty}} |f_n|_{K_1}^{1/n} = 0.$$

Кроме того, сумма любого ряда из функций f_{n_k} аналитична в каждой точке единичной окружности, за исключением $z = -1$.

3. Пусть

$$f_n(z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_{kn} z^{k-1} \quad (n = 1, 2, \dots) \tag{13}$$

— общий базис пространств A_1 и $\overline{A}_1$, приведенный к каноническому виду. Целесообразно охарактеризовать свойства Абеля и Фабри в терминах матрицы $(a_{kn})_{k,n=1}^{\infty}$ тейлоровских коэффициентов функций (13).

Лемма 4 ([3]). *Матрица $(a_{kn})_{k,n=1}^{\infty}$ обладает свойствами*

$$\begin{aligned}
&\text{а)} \quad \exists r < 1 \Big| \overline{\lim_{n\to\infty}} \Big(\sum_{k\leq rn} |a_{kn}| \Big)^{1/n} < 1; \\
&\text{б)} \quad \exists R > 1 \Big| \overline{\lim_{n\to\infty}} \Big(\sum_{k\geq Rn} |a_{kn}| \Big)^{1/n} < 1; \\
&\text{в)} \quad \lim_{n\to\infty} \big(\max_{nr<k\leq nR} |a_{kn}| \big)^{1/n} = 1.
\end{aligned} \tag{14}$$

Аналогичными свойствами обладает транспонированная матрица $(a_{nk})_{n,k=1}^{\infty}$.

Обозначим

$$\mathcal{P} = \{(p_n)_{n=1}^{\infty} : \lim_{n\to\infty} |a_{p_n n}|^{1/n} = 1\}.$$

При этом, как видно из леммы,

$$0 < \varliminf_{n\to\infty} \frac{p_n}{n} \le \varlimsup_{n\to\infty} \frac{p_n}{n} < \infty \tag{15}$$

и множество $\mathcal{P}$ не пусто. Для произвольной последовательности $(p_n)_{n=1}^{\infty} = p \in \mathcal{P}$ обозначим при $0 < r \le 1$

$$\begin{aligned}
\alpha^{(p)}(r) &= \varlimsup_{n\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{p_n} |a_{kn}| r^{k-p_n} \right)^{1/p_n}, \quad \alpha^*(r) = \inf_p \alpha^{(p)}(r),\\
\alpha_{(p)}(r) &= \varlimsup_{n\to\infty} \left(\sum_{k=p_n}^{\infty} |a_{kn}| r^{p_n-k} \right)^{1/p_n}, \quad \alpha_*(r) = \inf_p \alpha_{(p)}(r),\\
\varphi^{(p)}(r) &= \varlimsup_{n\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{rp_n} |a_{kn}| \right)^{1/p_n}, \quad \varphi^*(r) = \inf_p \varphi^{(p)}(r),\\
\varphi_{(p)}(r) &= \varlimsup_{n\to\infty} \left(\sum_{k=p_n/r}^{\infty} |a_{kn}| \right)^{1/p_n}, \quad \varphi_*(r) = \inf_p \varphi_{(p)}(r).
\end{aligned} \tag{16}$$

Функции (16) монотонны (первые две пары функций не возрастают, две другие не убывают). При этом все функции принимают значение, равное единице, в точке $z = 1$. Имеет место также легко проверяемая

Лемма 5. *В равенствах* (16) *все нижние грани достигаются на соответствующих последовательностях $p \in \mathcal{P}$ (зависящих от функции и от r).*

Заметим, что для степенного базиса $(z^{n-1})_{n=1}^{\infty}$ выполняются (при некотором $\varepsilon > 0$) неравенства

$$\text{а)}\ \alpha^*(1-\varepsilon) \le 1; \qquad \text{б)}\ \alpha_*(1-\varepsilon) \le 1, \tag{17}$$

а также

$$\text{а)}\ \varphi^*(1-0) < 1; \qquad \text{б)}\ \varphi_*(1-0) < 1. \tag{18}$$

То же, очевидно, верно и для любой подпоследовательности степенного базиса.

Лемма 6. *Пусть функции $F_n(z)$ $(n = 1, 2, \dots)$ аналитичны в кольце $\overline{U}_{r_2} \setminus U_{r_1}$ $(r_1 < r_2)$, и пусть для некоторой последовательности положительных чисел $(\lambda_n)_{n=1}^{\infty}$ выполняется соотношение*

$$\lim_{n\to\infty} |F_n|_{\partial U_r}^{\lambda_n} = 1 \quad (r_1 \le r \le r_2). \tag{19}$$

Тогда существует аналогичный предел

$$\lim_{n\to\infty} |F_n|_K^{\lambda_n} = 1, \tag{20}$$

где $K \subset \overline{U}_{r_2} \setminus U_{r_1}$ — любая замкнутая окрестность произвольной внутренней точки кольца.

Доказательство леммы, использующее принцип максимума для субгармонических функций [6], приводится в работе [7].

Теорема 3. *Чтобы общий канонический базис* (13) *пространств A_1 и $\overline{A}_1$ обладал свойствами Абеля и Фабри, достаточно и, вообще говоря, необходимо, чтобы выполнялось хотя бы одно из неравенств* (17) *и соответственно* (18), *либо — чтобы базис можно было разбить на две подпоследовательности, удовлетворяющие тем же условиям.*

Доказательство. Если при некотором $\varepsilon > 0$ выполнено первое неравенство (17), то, поскольку функция α^* не возрастает, имеем $\alpha^*(1-\varepsilon) = 1$. По лемме 5 найдется последовательность $(p_n)_{n=1}^{\infty} = p \in \mathcal{P}$, для которой $\alpha^{(p)}(1-\varepsilon) = 1$. Обозначим

$$F_n(z) = \frac{f_n(z)}{z^{p_n - 1}} \quad (n = 1, 2, \dots). \tag{21}$$

Из (14) и (15) следует

$$\varlimsup_{n\to\infty} |F_n|_{\partial U_1}^{1/p_n} \le \varlimsup_{n\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |a_{kn}| \right)^{1/p_n} = \varlimsup_{n\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |a_{kn}| \right)^{\frac{1}{n}\frac{n}{p_n}} = 1. \tag{22}$$

Кроме того, при $1 - \varepsilon \le r < 1$ имеем

$$\varlimsup_{n\to\infty} \left(\sum_{k=p_n+1}^{\infty} |a_{kn}| r^{k-p_n} \right)^{1/p_n} \le \varlimsup_{n\to\infty} \left(\max_k |a_{kn}| \sum_{j=1}^{\infty} r^j \right)^{1/p_n} \le 1.$$

Следовательно,

$$\varlimsup_{n\to\infty} |F_n|_{\partial U_r}^{1/p_n} \le \varlimsup_{n\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{p_n} |a_{kn}| r^{k-p_n} + \sum_{k=p_n+1}^{\infty} |a_{kn}| r^{k-p_n} \right)^{1/p_n} \le \max(\alpha^{(p)}(r), 1) = 1.$$

С другой стороны, $|f_n|_{U_r} \ge |a_{p_n n}| r^{p_n - 1}$ при всех r, из чего заключаем

$$\varliminf_{n\to\infty} |F_n|_{\partial U_r}^{1/p_n} \ge \varliminf_{n\to\infty} (|a_{p_n n}|)^{\frac{1}{n}\frac{n}{p_n}} \ge 1 \quad (1 - \varepsilon \le r \le 1). \tag{23}$$

Таким образом, при $r_1 = 1 - \varepsilon$, $r_2 = 1$ и $\lambda_n = 1/p_n$ $(n = 1, 2, \dots)$ выполняется равенство (19), а в силу леммы 6 — также и равенство (20). Пусть теперь K_z — замкнутая окрестность точки $z \in U_1$ и $K \subset K_z$ — круг, содержащийся в U_1. Тогда

$$\varliminf_{n\to\infty} |f_n|_{K_z}^{1/n} \ge \varliminf_{n\to\infty} |f_n|_K^{1/n} \ge \varliminf_{n\to\infty} |F_n|_K \varliminf_{n\to\infty} (r-\delta)^{(p_n-1)/n} \ge \varliminf_{n\to\infty} (r-\delta)^{(p_n-1)/n},$$

где r — модуль центра круга K, а δ — его радиус. Так как r и δ можно выбрать соответственно произвольно близко к единице и к нулю, а числа p_n удовлетворяют соотношению (15), заключаем, что имеет место (4).

Если выполняется второе неравенство (17), то, рассуждая, как и выше, найдем, что $\alpha_{(p)}(1-\varepsilon) = 1$ для некоторой последовательности $p = (p_n)_{n=1}^{\infty}$. При $1 - \varepsilon \le r < 1$ имеем

$$\varlimsup_{n\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{p_n} |a_{kn}| r^{p_n - k} \right)^{1/p_n} \le \varlimsup_{n\to\infty} \left(\max_k |a_{kn}| \sum_{j=1}^{\infty} r^j \right)^{1/p_n} \le 1.$$

Для функций (21) при $R = 1/r$ отсюда следует

$$\varlimsup_{n\to\infty} |F_n|_{\partial U_R}^{1/p_n} \le \varlimsup_{n\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{p_n} |a_{kn}| r^{p_n - k} + \sum_{k=p_n+1}^{\infty} |a_{kn}| r^{p_n - k} \right)^{1/p_n} \le \max(1, \alpha_*(r)) = 1 \quad (1 < R \le \tfrac{1}{1-\varepsilon}).$$

Оценка верна также при $R = 1$ в силу (22). С другой стороны, в интервале $[1, 1/(1-\varepsilon)]$ имеем $|f_n|_{U_R} \ge |a_{p_n n}| R^{p_n - 1}$ и, следовательно, $\varliminf_{n\to\infty} |F_n|_{\partial U_R}^{1/p_n} \ge 1$ по аналогии с (23). Положив теперь $r_1 = 1$, $r_2 = 1/(1-\varepsilon)$, $\lambda_n = 1/p_n$ $(n = 1, 2, \dots)$ и воспользовавшись леммой 6, получим равенство (20), в котором K — любая замкнутая окрестность произвольной внутренней точки кольца с радиусами 1 и $1/(1-\varepsilon)$. Как и в предыдущем случае, из произвольности K следует свойство Абеля (4).

Пусть, далее, выполнено условие а) в (18). По лемме 4 найдется последовательность $(p_n)_{n=1}^\infty = p \in \mathcal{P}$ такая, что

$$\sup_{r<1} \varlimsup_{n\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{rp_n} |a_{kn}| \right)^{1/p_n} < 1.$$

Это позволяет построить последовательность индексов

$$(p'_n)_{n=1}^\infty, \quad p'_n < p_n \quad (n = 1, 2, \dots), \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{p'_n}{p_n} = 1, \tag{24}$$

такую, чтобы при некотором $R > 1$ выполнялось соотношение

$$\varlimsup_{n\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{p'_n} |a_{kn}| R^{k-1} \right)^{1/p_n} < 1. \tag{25}$$

Как вытекает из леммы 4, найдется еще последовательность $(p''_n)_{n=1}^\infty$, $p''_n > p_n$ $(n = 1, 2, \dots)$, для которой

$$\varlimsup_{n\to\infty} \left(\sum_{k=p''_n+1} |a_{kn}| R^{k-1} \right)^{1/p_n} < 1. \tag{26}$$

Теперь, если дана произвольная последовательность индексов, выделим из нее подпоследовательность $(n_j)_{j=1}^\infty$ так, чтобы выполнялось условие $p'_{n_{j+1}} > \theta p''_{n_j}$ при некотором $\theta > 1$ $(j = 1, 2, \dots)$. Рассмотрим ряд

$$\sum_{j=1}^\infty f_{n_j}(z) = \sum_{j=1}^\infty \sum_{k=1}^\infty a_{kn_j} z^{k-1} = \sum_{j=1}^\infty \sum_{k=1}^{p'_{n_j}} a_{kn_j} z^{k-1} + \sum_{j=1}^\infty \sum_{k=p'_{n_j}}^{p''_{n_j}} a_{kn_j} z^{k-1} + \sum_{j=1}^\infty \sum_{k=p''_{n_j}}^\infty a_{kn_j} z^{k-1}. \tag{27}$$

В силу (25) и (26) первая и третья суммы сходятся к функциям, аналитическим в U_R, вторая же сумма есть лакунарный степенной ряд, коэффициенты которого удовлетворяют условиям

а) $$\lim_{j\to\infty} |a_{p_{n_j} n_j}|^{1/p_{n_j}} = 1; \tag{28}$$

б) при некотором $\theta > 1$ число отличных от нуля коэффициентов на интервале номеров $\frac{1}{\theta} p_{n_j} < k \le p_{n_j}$ растет не быстрее, чем $o(p_{n_j})$ при $j \to \infty$. Действительно, свойство б) вытекает из того, что $(p_{n_j} - p'_{n_j})/n_j \to 0$ при $j \to \infty$ в силу условия (24).

По теореме Фабри–Полиа ([8], с. 84) сумма степенного ряда имеет единичную окружность своей естественной границей. То же в силу выше сказанного относится и к сумме ряда (27).

Если выполняется условие б) в (18), то найдется последовательность $(p_n)_{n=1}^\infty = p \in \mathcal{P}$, для которой

$$\sup_{r<1} \varlimsup_{n\to\infty} \left(\sum_{k=\frac{1}{r}p_n}^\infty |a_{kn}| \right)^{1/p_n} < 1.$$

Пользуясь этим, выделим последовательность $(p''_n)_{n=1}^\infty$ такую, что

$$p''_n > p_n \quad (n = 1, 2, \dots), \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{p_n}{p''_n} = 1,$$

и при этом

$$\varlimsup_{n\to\infty} \left(\sum_{k=p''_n+1}^\infty |a_{kn}| \right)^{1/p_n} < 1.$$

Отсюда с помощью леммы 4 вытекает оценка (26) для некоторого $R > 1$. Как видно из леммы 4, найдутся последовательность

$$(p'_n)_{n=1}^\infty, \quad p'_n < p_n \quad (n = 1, 2, \dots), \qquad \lim_{n\to\infty} p'_n = \infty,$$

и число $R > 1$, для которых

$$\varlimsup_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{p'_n}|a_{kn}|R^k\right)^{1/p_n} < 1. \tag{29}$$

Далее из заданной произвольной последовательности индексов выделим подпоследовательность $(n_j)_{j=1}^{\infty}$ так, чтобы было $p'_{n_{j+1}} > \theta p''_{n_j}$, где $\theta > 1$ $(j = 1, 2, \dots)$. Как и в предыдущем случае, рассмотрим ряд (27), разложенный на три суммы. Первая и третья суммы сходятся к функциям, аналитическим в круге радиуса, большего единицы, в силу (29) и (26) соответственно. Вторая сумма является степенным рядом, для коэффициентов которого выполняется (28), а также следующее условие: число отличных от нуля коэффициентов на интервале номеров $p_{n_j} \le k < \theta p_{n_j}$ имеет рост не выше, чем $o(p_{n_j})$. Применяя снова теорему Фабри–Полиа, заключаем, что все точки единичной окружности являются особыми для суммы ряда (27).

Этим доказана достаточность каждого из условий (17) и соответственно (18). Случай, когда базис состоит из двух подпоследовательностей, удовлетворяющих тем же условиям, рассматривается аналогично. Пример базиса (8), не обладающего свойствами Абеля и Фабри, показывает, что условия теоремы, вообще говоря, необходимы (для базиса (8) имеем $\alpha^*(1-\varepsilon) = \alpha_*(1-\varepsilon) = (1-\frac{1}{2}\varepsilon)(1-\varepsilon)^{-3/2} > 1$, $\varphi^*(1-0) = \varphi_*(1-0) = 1$).

В заключение заметим, что пример базиса, состоящего из двух подпоследовательностей, одна из которых удовлетворяет только первому, а другая — только второму из условий (17) (соответственно (18)), может быть легко построен по образцу базиса (8).

Литература

1. Драгилев М.М. *Об общих базисах пространств $A(G)$ и $\overline{A}(\overline{G})$* // Сиб. матем. журн. – 1999. – Т. 40. – № 1. – С. 69–74.
2. Ерохин В.Д. *О конформных преобразованиях и об основном базисе пространства функций, аналитических в элементарной окрестности произвольного континуума* // ДАН СССР. – 1958. – Т. 120. – № 4. – С. 689–692.
3. Хапланов М.Г. *Матричный признак базиса в пространстве аналитических функций* // ДАН СССР. – 1951. – Т. 80. – № 2. – С. 177–180.
4. Dragilev M.M. *On isomorphic representation for the pairs of embedded spaces of analytic functions* // Linear Topological Spaces and Complex Analysis (Ankara). – 1997. – V. 3. – P. 50–56.
5. Драгилев М.М. *О локальной сходимости базисных рядов* // УМН. – 1963. – Т. 18. – № 4. – С. 143–145.
6. Маркушевич А.И. *Теория аналитических функций.* – М.–Л.: Гостехиздат, 1950. – 703 с.
7. Драгилев М.М. *О продолжаемых базисах аналитических функций* // Матем. сб. – 1961. – Т. 53. – № 2. – С. 207–218.
8. Бибербах Л. *Аналитическое продолжение.* – М.: Наука, 1967. – 240 с.

Ростовский государственный университет

Поступила
10.11.1998