И З В Е С Т И Я   В Ы С Ш И Х   У Ч Е Б Н Ы Х   З А В Е Д Е Н И Й

2000 МАТЕМАТИКА № 8 (459)

УДК 511.216

И.А. АЛЛАКОВ

О ПРЕДСТАВЛЕНИИ ЧЕТНЫХ ЧИСЕЛ СУММОЙ ДВУХ НЕЧЕТНЫХ ПРОСТЫХ ЧИСЕЛ ИЗ АРИФМЕТИЧЕСКОЙ ПРОГРЕССИИ

1. Введение

Пусть X и P — достаточно большие вещественные числа, а N — натуральное число с условием $\sqrt{N} < X \le N$; p, p_1, p_2 — простые числа; $D = p^\nu$, где $p > 2$, ν — положительное целое; $M_D(X)$ — множество четных натуральных чисел $n \le X$, которые (возможно) не представимы в виде

$$n = p_1 + p_2, \quad p_i \equiv l_i (\operatorname{mod} D), \quad (l_i, D) = 1, \quad i = 1, 2; \tag{1.1}$$

$E_D(X) = \operatorname{card} M_D(X)$; $R(n)$ — число представлений n в виде (1.1); c, c_j $(j = 1, 2, \dots)$ — некоторые положительные постоянные, $\ll$ — символ Виноградова, $\varphi(a)$ — функция Эйлера.

В [1] была получена асимптотическая формула для $R(n)$, справедливая для всех четных $n \le X$, за исключением не более $E_D(X) \ll X \ln^{-A} X$ (где $A > 0$ — произвольная постоянная) значений n из них. Затем в [2], [3] для $E_D(X)$ в случае $D = 1$ соответственно доказано, что $E_1(X) < X \exp(-c\sqrt{\ln X})$ и $E_1(X) < X^{1-\delta}$, $0 < \delta < 1$. В [4] получена оценка снизу $R(n)$ при $D = 1$ для всех $n \le X$, за исключением не более $X^{1-\delta}$ значений n из них.

В данной работе соединением методик работ [1], [2] доказана

Теорема 1. *При $D = p^\nu$ и $D \ll \ln^A X$ справедливы оценки*

$$E_D(X) \ll X\varphi^{-1}(D) \exp(-c_1\sqrt{\ln X})$$

и для $n \notin M_D(X)$, $n \le X$

$$R(n) \gg \frac{n}{\varphi(D)\ln^2 n}\Big(1 - \frac{\ln^A n}{\exp(c_2\sqrt{\ln n})}\Big) \exp\Big(-\frac{c_2}{4}\sqrt{\ln n}\Big),$$

где постоянные c_1 и c_2 не зависят от A.

Пусть s — комплексная переменная, $\chi_q(n)$ — характер Дирихле по модулю q и $L(s, \chi_q)$ — L-функция Дирихле, определяемая при $\operatorname{Re} s > 1$ равенством $L(s, \chi_q) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \chi_q(n) n^{-s}$. Если не существует вещественный (исключительный) нуль β с условием $\beta > 1 - c_3 \ln^{-1} q$ L-функции Дирихле для всех $q \le P$ (в этом случае положим $E = 0$), то методикой из данной работы можно получить асимптотическую формулу для $R(n)$. В случае существования такого исключительного нуля (тогда положим $E = 1$) также получается асимптотическая формула, но в этой формуле вместе с обычным главным членом будет участвовать член, соответствующий исключительному нулю (порядок которого по сути одинаков с главным членом), т. е. справедлива

Теорема 2. *Если $D = p^\nu$ и $D \ll \ln^A X$, то для всех $n \le X$, исключая не более чем $c_4 X\varphi^{-1}(D)\exp(-c_1\sqrt{\ln X})$ значений из них, справедлива формула*

$$R(n) = \frac{J(n)\sigma(n)}{\varphi^2(D)\ln^2 n} + E\frac{J_\beta(n)\widetilde{\sigma}(n)}{\varphi^2(D)\ln^2 n} + O\Big(\frac{n(\varphi(D)\ln^2 n)^{-1}}{\exp(c_5\sqrt{\ln n})}\Big),$$

где

$$J(n)=\sum_{\substack{n=n_1+n_2\\ n_1,n_2\geq 2}}1,\quad J_\beta(n)=\sum_{\substack{n=n_1+n_2\\ n_1,n_2\geq 2}}(n_1n_2)^{(\beta-1)},$$

$$\sigma(n)=2D\prod_{p>2}\frac{p(p-2)}{(p-1)^2}\prod_{\substack{p\backslash D\\ p>2}}\frac{(p-1)^2}{p(p-2)}\prod_{\substack{p\backslash n\\ p\not\backslash D,\ p>2}}\frac{p-1}{p-2},$$

$$\widetilde{\sigma}(n)=\prod_{\substack{p\backslash rd\\ p\not\backslash n}}\frac{1}{p-1}\prod_{\substack{p\not\backslash nrd\\ p>2}}\frac{p(p-2)}{(p-1)^2}\prod_{\substack{p\backslash ndr\\ p>2}}\frac{p}{p-1},$$

где $d=(q,D)$, r *— модуль вещественного (исключительного) характера* $\widetilde{\chi}_r$ *и* β *— исключительный нуль функции* $L(s,\widetilde{\chi}_r)$.

Заметим, что методика работы [3] не позволяет получить даже такую асимптотическую формулу. Отметим также, что в [5] приводится оценка $E_D(X)\ll\varphi^{-1}(D)X^{1-\delta}$, однако она доказана другим путем и только в случае, когда $D=p$ — простое число.

Известно, что изучение функции $R(n)$ можно связать с изучением функции $\prod_n(X,D)$, означающей число пар простых чисел p, $p+2n$ из интервала $(0;X)$, принадлежащих соответственно арифметическим прогрессиям Dt_1+l_1, Dt_2+l_2 с условием $1\leq l_1,l_2\leq D$, $(l_1,D)=1$, $(l_2,D)=1$ [1].

Методика, используемая в данной работе, дает возможность доказать аналогичный результат и для $\prod_n(X,D)$, а именно, справедлива

Теорема 3. *Если* $D=p^\nu$ *и* $D\ll\ln^A X$, *то для каждого целого* $0<2n\leq X\ln^{-A}X$, $2n\equiv l_1-l_2(\mathrm{mod}\,D)$, *исключая не более чем* $c_4X\varphi^{-1}(D)\exp(-c_1\sqrt{\ln X})$ *значений из них, справедлива оценка*

$$\prod\nolimits_n(X,\,D)\gg\frac{n}{\varphi(D)\ln^2 n}\left(1-\frac{\ln^A n}{\exp(c_2\sqrt{\ln n})}\right)\exp\left(-\frac{c_2}{4}\sqrt{\ln n}\right),$$

где постоянные c_1 *и* c_2 *не зависят от* $A>0$.

Полученные результаты являются усилением результатов [1] и обобщением результата [2].

Доказательство теоремы 3 в основном аналогично доказательству теоремы 1, причем необходимые изменения для вывода теоремы 3 можно посмотреть в [1]. В ходе доказательства теоремы 1 сначала установим справедливость теоремы 2.

2. Основные леммы

Пусть $\Lambda(n)$ — функция Мангольдта, определяемая равенством

$$\Lambda(n)=\begin{cases}\ln n, & \text{если } n=p^k;\\ 0 & \text{в остальных случаях.}\end{cases}$$

Обозначим $\psi(x,\chi_m)=\sum\limits_{n\leq x}\Lambda(n)\chi_m(n)$ и

$$\delta_\chi=\begin{cases}1, & \chi_m=\chi_m^\circ \text{ (главный характер)};\\ 0, & \chi_m\neq\chi_m^\circ.\end{cases}$$

Символы $\sum\limits_{\chi_q}$ и $\sum\limits_{a=1}^{q}{}'$ обозначают соответственно суммирование по всем характерам $\mathrm{mod}\,q$ и по приведенной системе вычетов $\mathrm{mod}\,q$.

Лемма 2.1 ([6], § 19; [2], п. 4). *Для достаточно больших* X *и* N *с условием* $3\leq n\leq X$, $\sqrt{N}<X\leq N$ *и для всех* $m\leq\exp(c_5\sqrt{\ln N})$ *справедливы следующие равенства*:

a) *если $E = 0$ и $E = 1$ и m — модуль характера χ_m не делится на r — ведущий модуль исключительного характера $\widetilde{\chi}_m$, то $\psi(n, \chi_m) = \delta_\chi n + \rho_n$;*
b) *если же $E = 1$ и $r \setminus m$, то $\psi(n, \chi_m) = \delta_\chi n - \beta^{-1} n^\beta + \rho_n$, причем во всех случаях для ρ_n справедлива оценка*

$$\rho_n \ll X \exp(-c_6 \sqrt{\ln N}).$$

Лемма 2.2 ([7]). *Если $\chi'(t)$ и $\chi''(t)$ — характеры Дирихле соответственно по $\bmod Q'$ и Q'', то произведение $\chi'(t)\chi''(t)$ — главный характер тогда и только тогда, когда $\chi'(t) = \overline{\chi}''(t)$ для всех $(t, Q) = 1$ и χ' — производный характер, порожденный одним из характеров по $\bmod d$, где $d = (Q', Q'')$, $Q = Q'Q''d^{-1}$ и $\overline{\chi}''(t)$ — характер, сопряженный с $\chi''(t)$.*

Лемма 2.3 ([7]). *Для $(j, k) = 1$, $d \setminus k$ и $(h, d) = 1$ имеют место соотношения*

$$\sum_{\substack{l=1\\ l\equiv h(\bmod d)}}^{k}{}' e\left(\frac{jl}{k}\right) = \begin{cases} 0, & \text{если } (d, kd^{-1}) > 1; \\ \mu\left(\frac{k}{d}\right) e\left(\frac{j\theta h}{d}\right), & \text{если } (d, kd^{-1}) = 1, \end{cases}$$

где $e(\alpha) = e^{2\pi i\alpha}$, $\mu(k)$ — функция Мебиуса и θ — решение сравнения $kd^{-1}z \equiv 1(\bmod d)$.

3. Основные обозначения и деление единичного интервала

Пусть

$$P_1 = \exp\left(c_6 \frac{\sqrt{\ln N}}{200}\right), \quad P_2 = P_1^{1/4}.$$

Если $E = 0$ или же $E = 1$ и $P_2 < r$, то положим $P = P_2$, в остальных случаях $P = P_1$. Полагая $Q = NP^{-1}$, сегмент $[Q^{-1}, 1 + Q^{-1}]$ делим на основные и дополнительные интервалы. При $a \le q \le P$ через $M(q, a)$ обозначим закрытый интервал $[aq^{-1} - (qQ)^{-1}, aq^{-1} + (qQ)^{-1}]$, $(a, q) = 1$. Ясно, что основные интервалы не пересекаются и $M(q, a) \subset [Q^{-1}, 1 + Q^{-1}]$.

Через T обозначим множество тех точек α, $Q^{-1} < \alpha < 1 + Q^{-1}$, которые не содержатся ни в каком $M(q, a)$. В дальнейшем объединение всех $M(q, a)$ назовем большой дугой, а T — малой дугой.

Введем функции

$$S_i(X, \alpha) = \sum_{\chi_D} \overline{\chi}_D(l_i) \sum_{2 < p_i \le X} \chi_D(p_i) \ln p_i e(p_i \alpha), \quad i = 1, 2; \tag{3.1}$$

$$\mathrm{g}_u^{(i)}(x, \alpha) = \sum_{2 < n \le X} n_i^{u-1} e(n_i \alpha), \quad i = 1, 2; \tag{3.2}$$

$$V_i(X, \alpha, q, a) = R(q) \frac{\mu(qd^{-1})}{\varphi(qd^{-1})} e\left(\frac{a}{q} N_1 l_i\right) \mathrm{g}_1^{(i)}(X, \eta), \quad i = 1, 2, \tag{3.3}$$

где $\alpha = aq^{-1} + \eta$, $d = (q, D)$, $N_1 = \mathrm{g}qd^{-1}(\bmod q)$ (N_1 — наименьший положительный вычет числа $\mathrm{g}qd^{-1}$ по $\bmod q$), g по $\bmod d$ определяется из $\mathrm{g}qd^{-1} \equiv 1(\bmod d)$; $R(q) = 1$, если $(qd^{-1}, D) = 1$, и $R(q) = 0$ в противном случае, обозначим

$$\begin{aligned} S = S(X, \alpha) &= S_1(X, \alpha) S_2(X, \alpha), \\ V = V(X, \alpha, q, a) &= V_1(X, \alpha, q, a) V_2(X, \alpha, q, a). \end{aligned} \tag{3.4}$$

Тогда имеем

$$S(X, \alpha) = \varphi^2(D) \sum_{2 < n \le 2X} R(X, n) e(\alpha n), \tag{3.5}$$

где

$$R(X,n)=\sum_{\substack{n=p_1+p_2\\ 2<p_1,p_2\le X\\ p_1\equiv l_1,\ p_2\equiv l_2 (\mathrm{mod}\, D)}} \ln p_1 \ln p_2, \tag{3.6}$$

и

$$V=R(q)\frac{\mu^2(qd^{-1})}{\varphi^2(qd^{-1})}\sum_{2<n\le 2N} J(N,n)e\biggl(\frac{a}{q}(N_1(l_1+l_2)-n)\biggr)e(\alpha n), \tag{3.7}$$

где

$$J(N,n)=\sum_{\substack{n=n_1+n_2\\ 2\le n_1,n_2\le N}} 1. \tag{3.8}$$

Очевидно,

$$n/2<J(N,n)\ll N \quad (J(N,n)=2(n-2)), \tag{3.9}$$

если $2<n\le N$. Если $1/2\le u\le 1$, то суммирование по частям дает ([8], лемма 3.5)

$$\mathrm{g}_u^{(i)}(X,\alpha)\ll \min(\|\alpha\|^{-u}, X^u), \tag{3.10}$$

где $\|\alpha\|$ — расстояние от α до ближайшего целого числа.

4. Малые дуги

Лемма 4.1. *При достаточно большом N справедливы оценки*

$$\int_T |S(N,\alpha)|^2 d\alpha \ll N^2D^2\varphi(D)P^{-1}\ln^{12} N, \tag{4.1}$$

$$\int_T \biggl|\sum_{q\le P}\sideset{}{'}\sum_{a=1}^{q} V(N,\alpha)\biggr|^2 d\alpha \ll N^3P^{-2}(D\ln\ln P)^4. \tag{4.2}$$

Доказательство. В силу (3.4) имеем

$$\int_T |S(N,\alpha)|^2 d\alpha \ll \max_{\alpha\in T}|S_1(N,\alpha)|^2\int_T |S_2(N,\alpha)|^2 d\alpha. \tag{4.3}$$

Здесь

$$\int_T |S_2(N,\alpha)|^2 d\alpha \le \int_{Q^{-1}}^{1+Q^{-1}} |S_2(N,\alpha)|^2 d\alpha = \varphi^2(D)\sum_{\substack{2<p\le N\\ p_2\equiv l_2 (\mathrm{mod}\, D)}} \ln^2 p_2.$$

В силу теоремы 5.2.1 из [9] при $N\ge 2$ и $D\le N^{1/2}$

$$\sum_{p\le N,\ p\equiv l (mod\, D)} \ln p \ll N\varphi^{-1}(D).$$

Поэтому

$$\int_T |S_2(N,\alpha)|^2 d\alpha \ll \varphi(D)N\ln N. \tag{4.4}$$

Для оценки $\max\limits_{\alpha\in T}|S_1(N,\alpha)|^2$ используем результат работы [10]: если $R<q\le NR^{-1}$, $1\le R\le N^{1/3}$, $(a,q)=1$, $|\alpha-aq^{-1}|\le 2R(qN)^{-1}$, то

$$S_i(N,\alpha)\ll NR^{-1/2}D(\ln N)^{11/2}. \tag{4.5}$$

Согласно теореме Дирихле существуют такие $q \le Q$ и α с условием $1 \le a \le q$, $(a,q)=1$, для которых $|\alpha - aq^{-1}| < (qQ)^{-1}$. Это означает, что $\alpha \in M(q,a)$, если $q \le P$. Значит, для $\alpha \in T$ имеем $q > P$ и, следовательно, в (4.5) можем полагать $R = P$. Теперь из (4.3)–(4.5) следует (4.1).

Оценка (4.2) доказывается так же, как оценка (5.9) из [2]. $\square$

5. Главные дуги

А. Случай $P = P_2$. Из (3.7) следует, что

$$\sum_{q>y} \sum_{a=1}^{q}{}' V(N,\alpha,q,a) = \sum_{2<n\le 2N} J(N,n)\sigma(y,n)e(n\alpha), \tag{5.1}$$

где

$$\sigma(y,n) = \sum_{q>y} R(q)\frac{\mu^2(qd^{-1})}{\varphi^2(qd^{-1})} \sum_{a=1}^{q}{}' e\Big(\frac{a}{q}(N_1(l_1+l_2)-n)\Big). \tag{5.2}$$

Лемма 5.1. *Если $\alpha \in M(q,a)$, то*

$$\sum_{q\le P} \sum_{a=1}^{q}{}' \int_{M(q,a)} \Big| \sum_{\substack{k\le P\\ k\ne q}} \sum_{\substack{h=1\\ h\ne a}}^{k}{}' V(N,\alpha,k,h)\Big|^2 d\alpha \ll \frac{P^9}{Q}(D\ln\ln P)^4.$$

Доказательство. Предположим, что $a \le q \le P$, $(a,q)=1$, $h \le k \le P$, $(h,k)=1$, $k \ne q$, $h \ne a$ и $\alpha \in M(q,a)$. Тогда $|\alpha - aq^{-1}| \le (qQ)^{-1}$. Следовательно, $\|\alpha - hk^{-1}\| = \|\alpha - hk^{-1} + aq^{-1} - aq^{-1}\| \ge \|aq^{-1} - hk^{-1}\| - |\alpha - aq^{-1}| \ge (qk)^{-1} - (qQ)^{-1} > (qk)^{-1}$. Поэтому, учитывая $n\varphi^{-1}(n) \ll \ln\ln n$ (при $n \ge 3$) и $d_1 = (k,D) \le D$, из (3.3), (3.4), (3.10) получим

$$\Big| \sum_{\substack{k\le P\\ k\ne q}} \sum_{\substack{h=1\\ h\ne a}}^{k}{}' V(N,\alpha,k,h)\Big|^2 \ll \Big| \sum_{\substack{k\le P\\ k\ne q}} \frac{\mu^2(kd_1^{-1})}{\varphi^2(kd_1^{-1})}\|\alpha - hk^{-1}\|^{-2}\varphi(k)\Big|^2 \ll$$

$$\ll (qD\ln\ln P)^4 \Big(\sum_{k\le P}\varphi(k)\Big)^2 \ll (qDP\ln\ln P)^4.$$

Таким образом,

$$\sum_{q\le P} \sum_{a=1}^{q}{}' \int_{M(q,a)} \Big| \sum_{\substack{k\le P\\ k\ne q}} \sum_{\substack{h=1\\ h\ne a}}^{k}{}' V(N,\alpha,k,h)\Big|^2 d\alpha \ll$$

$$\ll \sum_{q\le P} \sum_{a=1}^{q}{}' (PDq\ln\ln P)^4 (qQ)^{-1} \ll P^9 Q^{-1}(D\ln\ln P)^4. \quad \square$$

Лемма 5.2 ([1], § 7). *Для суммы $\sigma(P,n)$, определяемой равенством* (5.2)*, справедлива оценка*

$$\sigma(P,n) \ll D^2 P^{-1}\tau(n)(\ln\ln N)^3,$$

где $\tau(n)$ — число натуральных делителей n.

Из леммы 5.2 и из (5.1), (3.9) следует

Лемма 5.3. *При достаточно большом N имеет место оценка*

$$\int_{Q^{-1}}^{1+Q^{-1}} \Big| \sum_{q>P} \sum_{a=1}^{q}{}' V(N,\alpha,k,h)\Big|^2 d\alpha \ll N^3 P^{-2}(D\ln N)^4.$$

Лемма 5.4. *Если* $a \le q \le P$, $(a,q)=1$ *и* $\alpha \in M(q,a)$, *то*

$$S_i(N,\alpha) - V_i(N,\alpha,q,a) \ll N^2 q^{-1} Q^{-1} \exp(-c_6\sqrt{\ln N})^4.$$

Доказательство. Ясно, что

$$\left|\sum_{p_i\le N}\chi_D(p_i)\ln p_i e(\alpha p_i) - \sum_{p_i\le N,\ p_i\nmid q}\chi_D(p_i)\ln p_i e(\alpha p_i)\right| \le \ln q. \tag{5.3}$$

Используя свойство ортогональности характеров, вычитаемую сумму в левой части (5.3) можно написать в виде

$$\frac{1}{\varphi(q)}\sum_{\chi_q}\left(\sum_{j=1}^{q}\overline{\chi}_q(j)e\left(\frac{aj}{q}\right)\right)\sum_{p_i\le N}(\ln p_i)\chi_D(p_i)\chi_q(p_i)e(p_i\eta). \tag{5.4}$$

Обозначим

$$A_i = A_i(\chi_D,\chi_q,q,a) = \frac{1}{\varphi(q)}\sum_{\chi_D,\chi_q}\sum_{j=1}^{q}\overline{\chi}_D(l_i)\overline{\chi}_q(j)e\left(\frac{aj}{q}\right) \tag{5.5}$$

и

$$G_i = G_i(\chi_D,\chi_q,N) = \sum_{p_i\le N}(\ln p_i)\chi_D(p_i)\chi_q(p_i)e(p_i\eta), \quad i=1,2. \tag{5.6}$$

Тогда, используя (5.3)–(5.6), из (3.1) находим

$$S_i(N,\alpha) = A_iG_i + O(\varphi(D)\ln q), \quad i=1,2. \tag{5.7}$$

Сначала оценим G_i. Положим $\chi_D(p_i)\chi_q(p_i)=\chi_m(p_i)$, где $m=qDd^{-1}$, тогда из (5.6) получим

$$G_i = \sum_{p_i\le N}\chi_m(p_i)\ln p_i e(p_i\eta) = \sum_{n_i\le N}\chi_m(n_i)\Lambda(n_i)e(n_i\eta) - \sum_{p^\nu\begin{cases}\le N\\ \ge 2\end{cases}}\chi_m(p_i^\nu)\ln p_i e(p_i^\nu\eta) =$$

$$= \sum_{n_i\le N}(\psi(\chi_m,n_i)-\psi(\chi_m,n_i-1))e(n_i,\eta) + O(N^{1/2}).$$

Отсюда, используя лемму 2.1 a), находим

$$G_i(\chi_m,N) - \delta_\chi\sum_{2<n_i\le N}e(n_i\eta) \ll \left|\sum_{2<n_i\le N}(\rho_{n_i}-\rho_{n_i-1})e(n_i\eta)\right| + \sqrt{N} \ll$$

$$\ll \left|\sum_{2<n_i\le N}(\rho_{n_i}-\rho_{n_i-1})\right| + \left|\sum_{2<n_i\le N-1}(e(n_i\eta)-e((n_i+1)\eta))\sum_{2<t\le n_i}(\rho_t-\rho_{t-1})\right| +$$

$$+ \sqrt{N} \ll |\rho_N| + \sum_{2<n_i\le N}|e(n_i\eta)-e((n_i+1)\eta)|\,|\rho_{n_i}| + \sqrt{N}.$$

Далее, принимая во внимание $|e(n_i\eta)-e((n_i+1)\eta)| \ll |\eta| \le (qQ)^{-1}$, будем иметь

$$G_i(\chi_m,N) - \delta_\chi\sum_{2<n_i\le N}e(n_i\eta) \ll |\rho_N| + N(qQ)^{-1}\max_{n_i}|\rho_N| + \sqrt{N} \ll$$

$$\ll N(qQ)^{-1}|\rho_N| \ll N^2(qQ)^{-1}\exp(-c_6\sqrt{\ln N}). \tag{5.8}$$

Таким образом, из (5.7) и (5.8) находим

$$S_i(N,\alpha) = \delta_\chi A_i\sum_{2<n_i\le N}e(n_i\eta) + O\left(\frac{N^2}{qQ}|A_i|\exp(-c_6\sqrt{\ln N})\right). \tag{5.9}$$

Теперь найдем A_i. В силу леммы 2.2 $\chi_D(p_i)\chi_q(p_i) = \chi_m(p_i) = \chi_m^\circ$ — главный характер (т. е. $\delta_\chi = 1$) тогда и только тогда, когда $\chi_D(p_i) = \overline{\chi}_q(p_i)$ и $\chi_q(p_i) = \chi_d(p_i)$ для всех $(p_i, m) = 1$. Поэтому, применяя лемму 2.2 при $Q' = D$, $Q'' = q$, $Q = m$, из (5.5) получим

$$A_i = \frac{1}{\varphi(q)} \sum_{\chi_D, \chi_q} \sum_{j=1}^{q} \overline{\chi}_D(l_i)\overline{\chi}_q(j) e\Big(\frac{aj}{q}\Big) = \frac{1}{\varphi(q)} \sum_{\chi_d} \sum_{j=1}^{q} \chi_d(l_i)\overline{\chi}_d(j) e\Big(\frac{aj}{q}\Big) = \frac{\varphi(d)}{\varphi(q)} \sideset{}{'}\sum_{\substack{j=1 \\ j \equiv l_i (\mathrm{mod}\, d)}}^{q} e\Big(\frac{aj}{q}\Big).$$

Отсюда, используя лемму 2.3, находим

$$A_i = R(D) \frac{\mu(qd^{-1})}{\varphi(qd^{-1})} e\Big(\frac{aN_1 l_i}{q}\Big). \tag{5.10}$$

Из (3.3), (5.9) и (5.10) следует утверждение леммы 5.4 □

Лемма 5.5. *Справедлива оценка*

$$\sum_{q \le P} \sideset{}{'}\sum_{a=1}^{q} \int_{M(q,a)} |S(N,\alpha) - V(N,\alpha,q,a)|^2 d\alpha \ll N^3 P^3 D^2 \exp(-2c_6 \sqrt{\ln N}).$$

Доказательство. Утверждение леммы следует из леммы 5.4, если учесть в силу (3.3) и (3.10)

$$V_i(N,\alpha,q,a) \ll \varphi^{-1}(qd^{-1}) |\mathrm{g}_1^{(i)}(N,\eta)| \ll N \varphi^{-1}(qd^{-1}).$$

Действительно, из леммы 5.4 следует

$$S(N,\alpha) - V(N,\alpha,q,a) \ll (|V_1(N,\alpha,q,a)| + |V_2(N,\alpha,q,a)|) NPq^{-1} \exp(-c_6\sqrt{\ln N}) +$$
$$+ (NPq^{-1}\exp(-c_6\sqrt{\ln N}))^2 \ll N^2 P \varphi^{-1}(qd^{-1}) q^{-1} \exp(-c_6\sqrt{\ln N}) + N^2 P^2 q^{-1} \exp(-2c_6\sqrt{\ln N}).$$

Отсюда

$$\sum_{q \le P} \sideset{}{'}\sum_{a=1}^{q} \int_{M(q,a)} |S(N,\alpha) - V(N,\alpha,q,a)|^2 d\alpha \ll$$
$$\ll \frac{N^4 P^2}{\exp(2c_6\sqrt{\ln N})} \sum_{q \le P} \frac{\varphi(q)}{q^3 Q \varphi^2(qd^{-1})} + \frac{N^4 P^4}{\exp(4c_6\sqrt{\ln N})} \sum_{q \le P} \varphi(q) q^{-5} Q^{-1} \ll$$
$$\ll N^3 P^3 D^2 \exp(-2c_6\sqrt{\ln N}). \quad \square$$

Лемма 5.6. *Справедливо соотношение*

$$\int_{Q^{-1}}^{1+Q^{-1}} \Big| S(N,\alpha) - \sum_{q=1}^{\infty} \sideset{}{'}\sum_{a=1}^{q} V(N,\alpha,q,a) \Big|^2 d\alpha \ll N^3 D^2 P^{-1} \ln^{12} N.$$

Доказательство. В силу леммы 5.3 оцениваемый интеграл можно представить в виде

$$\int_{Q^{-1}}^{1+Q^{-1}} \Big| S(N,\alpha) - \sum_{q \le P} \sideset{}{'}\sum_{a=1}^{q} V(N,\alpha,q,a) \Big|^2 d\alpha + O\Big(\frac{N^3 D^4 \ln^4 N}{P^2}\Big). \tag{5.11}$$

Пусть $M = [Q^{-1}, 1+Q^{-1}] \setminus T$. Тогда интеграл по $[Q^{-1}, 1+Q^{-1}]$ в (5.11) можно записать как сумму интегралов по M и по T, которые обозначим через K_1 и K_2 соответственно.

K_2 оценим при помощи леммы 4.1

$$K_2 \ll \int_T |S(N,\alpha)|^2 d\alpha + \int_T \Big| \sum_{k \le P} \sideset{}{'}\sum_{h=1}^{k} V(N,\alpha,k,h) \Big|^2 d\alpha \ll N^3 D^2 P^{-1} \ln^{12} N. \tag{5.12}$$

Для оценки интеграла K_1 используем леммы 5.1 и 5.5. Это дает

$$K_1 \ll \int_M \Bigg| S(N,\alpha) - \sum_{\substack{k\le P\\ \alpha\in M(k,h)}} \sum_{h=1}^{k}{}' V(N,\alpha,k,h) \Bigg|^2 d\alpha +$$

$$+ \int_M \Bigg| \sum_{\substack{k\le P\\ \alpha\notin M(k,h)}} \sum_{h=1}^{k}{}' V(N,\alpha,k,h) \Bigg|^2 d\alpha \ll N^3P^3D^2\exp(-2c_6\sqrt{\ln N}). \quad (5.13)$$

Теперь из (5.11)–(5.13) следует утверждение леммы 5.6. □

Б. В случае $P = P_1$ получится $E = 1$ и существует исключительный вещественный (нуль β) характер $\widetilde{\chi}_r$, где $r \le P_1^{1/4} = P_2$. Пусть $\tau(\chi_k)$ — сумма Гаусса, т. е.

$$\tau(\chi_k) = \sum_{n=1}^{k} \chi_k(n)e(n/k).$$

Из теоремы Пейджа и Зигеля о нулях L-функции Дирихле [6] следует, что $1 - c_7\ln^{-1/2} N < \beta < 1 - c(\varepsilon)r^{-\varepsilon}$, т. е. $r \gg (\ln N)^{1/2\varepsilon}$. Положим $\varepsilon = \varepsilon_1 = (2A+6)^{-1}$, тогда $r > (\ln N)^{A+2}$.

Известно, что ведущие модули вещественного примитивного характера могут равняться только 4, 8 и $p > 3$ — простое число. Так как $m = qDd^{-1}$, $d = (q,D)$, $D = p^\nu$, $D \ll \ln^a X$, $(qd^{-1},D) = 1$, qd^{-1} бесквадратный, то отсюда следует, что $r \setminus m$ равносильно тому, что $r \setminus qd^{-1}$, т. е. $r \setminus q$.

Лемма 5.$\widetilde{1}$. a) *если* $r \not\setminus q$, *то*

$$\sum_{q\le P}\sum_{a=1}^{q}{}' \int_{M(q,a)} |S(N,\alpha) - V(N,\alpha,q,a)|^2 d\alpha \ll \frac{N^3P^3D^2}{\exp(2c_6\sqrt{\ln N})};$$

b) *если* $r \setminus q$, *то*

$$\sum_{q\le P}\sum_{a=1}^{q}{}' \int_{M(q,a)} \Bigg| S(N,\alpha) - \prod_{i=1}^{2}(V_i - \widetilde{V}_i) \Bigg|^2 d\alpha \ll \frac{N^3P^3\ln P}{\exp(2c_6\sqrt{\ln N})},$$

где

$$\widetilde{V}_i = A_i(\chi_q,\chi_D,q,a)\mathrm{g}_\beta^{(i)}(N,\eta).$$

Доказывается так же, как и лемма 5.5. При этом в доказательстве утверждения a) используется лемма 2.1 a), а в доказательстве утверждения b) — лемма 2.1 b).

Лемма 5.$\widetilde{2}$ ([3], лемма 5.2). *Если* χ_k *— характер по* $\operatorname{mod} k$, *индуцированный примитивным характером* χ_k^*, *то* $r \setminus k$ *и* $\tau(\chi_k) = \mu(k/r)\chi_r^*(k/r)\tau(\chi_r^*)$, $|\tau(\chi_r^*)|^2 = r$.

Из равенства (5.5) следует

Лемма 5.$\widetilde{3}$. *Если существует исключительный характер по модулю* $m = qDd^{-1}$, *то*

$$A_i(\chi_D,\chi_q,q,a) = \frac{1}{\varphi(q)}\widetilde{\chi}_m(al_i)\sum_{h=1}^{q}{}' \widetilde{\chi}_m(h)e(h/q).$$

Далее для $a \le q \le P$, $(a,q) = 1$, $r \setminus m$, $\alpha \in M(q,a)$ положим $W(N,\alpha) = \widetilde{V}_1\widetilde{V}_2 - V_1\widetilde{V}_2 + \widetilde{V}_1V_2$, в других случаях $W(N,\alpha) = 0$.

Лемма 5.$\widetilde{4}$. *Справедлива оценка*

$$\int_{Q^{-1}}^{1+Q^{-1}} \Bigg| S - \sum_{q=1}^{\infty}\sum_{a=1}^{q}{}' V(N,\alpha,q,a) - W(N,\alpha) \Bigg|^2 d\alpha \ll N^3D^2P^{-1}\ln^{12} N.$$

Доказательство. В силу леммы 5.3 оцениваемый интеграл представим в виде

$$\int_{Q^{-1}}^{1+Q^{-1}} \left| S - \sum_{q\le P} {\sum_{a=1}^{q}}' V(N,\alpha,q,a) - W(N,\alpha)\right|^2 d\alpha + O(N^3P^{-2}(D\ln N)^4). \tag{5.14}$$

Интеграл по $[Q^{-1}, 1+Q^{-1}]$ в (5.14) представим суммой интегралов по M и T. Тогда учитывая, что $W(N,\alpha) = 0$ для $\alpha \in T$, и используя леммы 4.1, 5.1 и $5.\widetilde{1}$, получим утверждение леммы (подробности — в [2]). $\square$

6. Исследование функции $W(N,\alpha)$

Положим

$$D(N,h) = \int_{Q^{-1}}^{1+Q^{-1}} W(N,\alpha)e(-h\alpha)d\alpha. \tag{6.1}$$

Лемма 6.1. *Имеет место оценка*

$$\sum_{2<n\le 2N} |\varphi^2(D)R(N,n) - J(N,n)\sigma(n) - D(N,n)|^2 \ll N^3D^3P^{-1}\ln^{12} N,$$

где $R(N,n)$, $J(N,n)$ *и* $\sigma(n) = \sigma(0,n)$ *определены в виде сумм* (3.6), (3.8) *и* (5.2).

Доказательство. Пусть

$$F(N,h) = \begin{cases} \varphi^2(D)R(N,h) - J(N,h) - D(N,h), & 0 < h \le 2N;\\ D(N,h) \ \ \text{в других случаях.}\end{cases}$$

Тогда в силу (6.1), (5.1) и (3.5) функция $F(N,h)$ является коэффициентом Фурье функции

$$S - \sum_{q=1}^{\infty} {\sum_{a=1}^{q}}' V(N,\alpha,q,a) - W(N,\alpha).$$

Применяя неравенство Бесселя и лемму $5.\widetilde{4}$, получим утверждение леммы. $\square$

Пусть $r \setminus m$ и

$$I_1^{(i)} = I_1^{(i)}(n,q,D,a) = \int_{M(q,a)} V_i\widetilde{V}_i e(-n\alpha)d\alpha, \quad i=1,2; \tag{6.2}$$

$$I_2^{(i)} = I_2^{(i)}(n,q,D,a) = \int_{M(q,a)} \widetilde{V} e(-n\alpha)d\alpha, \quad \widetilde{V} = \widetilde{V}_1\widetilde{V}_2; \tag{6.3}$$

$$B_1^{(i)} = B_1^{(i)}(n,q,D,a) = \mu(qd^{-1})\varphi^{-1}(qd^{-1})e(aq^{-1}(N_1l_i - n))A_i, \quad i=1,2; \tag{6.4}$$

$$B_2 = B_2(n,q,D,a) = A_1\cdot A_2 e(-aq^{-1}n), \tag{6.5}$$

тогда

$$I_1^{(i)} = B_1^{(i)} \int_{-1/qQ}^{1/qQ} \mathrm{g}_1^{(i)}(N,\eta)\mathrm{g}_\beta^{(i)}(N,\eta)e(-n\eta)d\eta, \quad i=1,2, \tag{6.6}$$

и

$$I_2 = B_2 \int_{-1/qQ}^{1/qQ} \mathrm{g}_\beta^{(1)}(N,\eta)\mathrm{g}_\beta^{(2)}(N,\eta)e(-n\eta)d\eta. \tag{6.7}$$

Теперь, если $q\le P$, $r\setminus qd^{-1}$ и $k = qr^{-1}$, то из (6.4) и леммы $5.\widetilde{3}$ следует оценка

$${\sum_{a=1}^{q}}' B_1^{(i)}(n,q,D,a) \ll \frac{r^{1/2}}{\varphi^2(q)}\varphi(d)\varphi(r)\widetilde{\chi}_r(k)^2|C_k(N_1l_i - n)|\mu^2(k).$$

Аналогично из (6.5) и леммы $5.\widetilde{3}$ получим

$$\sum_{a=1}^{q}{}' B_2(n,q,D,a) \ll \frac{1}{\varphi^2(q)}\widetilde{\chi}_r(l_1l_2)\mu^2(k)\widetilde{\chi}_r^2(k)\tau(\widetilde{\chi}_r)^2 C_q(-n), \tag{6.8}$$

где

$$C_q(m) = \sum_{a=1}^{q}{}' e\left(\frac{am}{q}\right) = \frac{\mu(q_1)}{\varphi(q_1)}\varphi(q), \quad q_1 = \frac{q}{(q,|m|)}. \tag{6.9}$$

Лемма 6.2 ([2], лемма 9.4). *Пусть* $L_i = |N_1 l_i - n|$, *тогда*

$$\sum_{k\le Pr^{-1}} \mu^2(k)\varphi^{-2}|C_k(N_1l_i - n)| \ll L_i\varphi^{-1}(L_i).$$

Лемма 6.3. *Если* $r \setminus m$, *то*

$$\sum_{q\le P}\sum_{a=1}^{q}{}' I_1^{(i)}(n,q,D,a) \ll Nr^{1/2}\varphi(d)L_i(\varphi(r)\varphi(L_i))^{-1}.$$

Доказательство. Используя неравенство Шварца и (3.2) в (6.6), а затем применяя лемму 6.2, получим утверждение леммы. □

Пусть

$$J_\beta(N,n) = \int_{-1/2}^{1/2} \mathrm{g}_\beta^{(1)}\mathrm{g}_\beta^{(2)} e(-n\eta)d\eta = \sum_{\substack{n=n_1+n_2\\ 2\le n_1,n_2\le N}} (n_1n_2)^{\beta-1}. \tag{6.10}$$

Тогда

$$\int_{-1/qQ}^{1/qQ} \mathrm{g}_\beta^{(1)}\mathrm{g}_\beta^{(2)} e(-n\eta)d\eta = J_\beta(N,n) + O\left(\frac{qN}{P}\right). \tag{6.11}$$

Далее положим

$$G(N,n) = \sum_{\substack{q\le P\\ r\setminus qd^{-1}}}\sum_{a=1}^{q}{}' B_2(n,q,D,a). \tag{6.12}$$

Лемма 6.4. *Если* $n \le N$, *то*

$$\sum_{\substack{q\le P\\ r\setminus q}}\sum_{a=1}^{q}{}' I_2(n,q,D,a) = J_\beta(N,n)G(N,n) + O\left(\frac{qN}{P}\tau(n)(\ln\ln N)^4\ln^{1/2} N\right).$$

Доказательство. Согласно (6.7) и (6.11) из (6.8), (6.9) и (6.12) получим

$$\sum_{\substack{q\le P\\ r\setminus qd^{-1}}}\sum_{a=1}^{q}{}' I_2(n,q,D,a) - J_\beta(N,n)G(N,n) \ll \frac{Nr^2}{P\varphi(r)}\sum\nolimits_1, \tag{6.13}$$

где

$$\sum\nolimits_1 = \sum_{\substack{k\le Pr^{-1}\\ (k,r)=1}} \mu^2(k)\mu^2\left(\frac{k}{(k,n)}\right)\frac{k}{\varphi(k)}\varphi^{-1}\left(\frac{k}{(k,n)}\right) \ll (\ln\ln N)^3\tau(n)\ln^{1/2} N. \tag{6.14}$$

Так как $r\varphi^{-1}(r) \ll \ln\ln N$, то из (6.13) и (6.14) следует утверждение леммы. □

Лемма 6.5. *Если* $n \le 2N$, *то* $D(N,n) - J_\beta(N,n)G(N,n) \ll NP^{-1}r\tau(n)(\ln\ln N)^4 \ln^{1/2} N + Nr^{-1/2}\varphi(d)(\ln\ln N)^2$.

Доказательство. В силу (6.1)–(6.3) имеем

$$D(N,n) = \sum_{q\le P} \sideset{}{'}\sum_{a=1}^{q} (I_2 - I_1^{(1)} - I_1^{(2)}).$$

Далее, применяя леммы 6.3 и 6.4, будем иметь

$$D(N,n) - J_\beta(N,n)G(N,n) \ll NP^{-1}\tau(n)r(\ln\ln N)^4 \ln^{1/2} N + Nr^{1/2}\varphi(d)\varphi^{-1}(r)\ln\ln N.$$

Отсюда следует утверждение леммы 6.5, если учесть, что

$$\varphi(r) \gg r(\ln\ln r)^{-1}, \quad \text{где} \quad P \ge r > \ln^{A+2} N. \quad \square$$

7. Доказательство теоремы 1

А. Случай $P = P_2$. Из (3.5) и (5.1) при $y = 0$, используя тождество Парсеваля и лемму 5.6, находим

$$\sum_{n\le 2N} (\varphi^2(D)R(N,n) - J(N,n)\sigma(n))^2 \ll \frac{(ND)^2}{P}\varphi(D)\ln^{12} N. \tag{7.1}$$

Здесь для четного n

$$\sigma(n) = \sigma(0,n) = D\sum_{k=1}^{\infty} \mu(k)\varphi^{-2}(k) \sum_{t\backslash n,\ (t,D)=1} \mu^2(t)\varphi^{-1}(t) =$$

$$= \lambda D \prod_{p>2} \frac{p(p-2)}{(p-1)^2} \prod_{\substack{p\backslash D\\ p>2}} \frac{(p-1)^2}{p(p-2)} \prod_{\substack{p\backslash n, p\not\backslash D\\ p>2}} \frac{p-1}{p-2},$$

где $\lambda = 1$, если D четное; при D нечетном $\lambda = 2$ (более подробно относительно $\sigma(n)$ см. § 7 из [1]). Отсюда

$$\sigma(n) \gg D. \tag{7.2}$$

Из (7.1) следует, что для всех $n \le 2N$, исключая не более чем

$$c_8 NP^{-1/3}\varphi(D)\ln^4 N \tag{7.3}$$

значений из них, справедлива формула

$$R(N,n) = \frac{J(N,n)\sigma(n)}{\varphi^2(D)} + O\biggl(\frac{N(\ln N)^4 \ln\ln D}{\varphi(D)\exp(c_6\sqrt{\ln N}/600)}\biggr). \tag{7.4}$$

Согласно (7.2) и (3.9) при $N/2 < n \le N$ имеем

$$J(N,n)\sigma(n) \gg DN.$$

Тогда из (7.4) находим

$$R(N,n) \gg DN\varphi^{-2}(D)\Bigl(1 - P^{-1/3}\ln^4 N\Bigr) \gg N\varphi^{-1}(D). \tag{7.5}$$

Из (7.3) и (7.5) сразу следует утверждение теоремы 1 с $X = N$. Из (7.5) следует, что

$$R(n) \gg n(\varphi(D)\ln^2 n)^{-1}(1 - (\ln n)^2\exp(-c_9\sqrt{\ln n})). \tag{7.6}$$

Б. Случай $P = P_1$. В силу (6.13) и (6.8) имеем

$$|G(N,n)| \le \widetilde{\sigma}(n) + O(P^{-1} r d\tau(n)(\ln\ln N)^4), \tag{7.7}$$

где

$$\widetilde{\sigma}(n) = \prod_{\substack{p\backslash rd \\ p\not\backslash n}} \frac{1}{p-1} \prod_{p\not\backslash nrd} \frac{p(p-2)}{(p-1)^2} \prod_{p\backslash nrd} \frac{p}{p-1} \le \sigma(n)$$

(подробные выкладки см. в [1] и [2]).

Учитывая $J_\beta(N,n) \ll N^\beta$ (см. (6.10)), из леммы 6.5 и неравенства (7.7) получим для четного $n \le 2N$

$$|D(N,n)| \le J_\beta(N,n)\sigma(n) + O(P^{-1} dr\tau(n)(\ln\ln N)^4 \ln^{1/2} N) + O(Nr^{-1/2}\varphi(D)(\ln\ln N)^2). \tag{7.8}$$

Лемма 7.1. *Существует такая положительная постоянная c_{10}, что*

$$J(N,n) - J_\beta(N,n) > c_{10} r^{-\varepsilon_1} J(N,n), \quad \varepsilon_1 = (2A+6)^{-1}.$$

Доказательство. В силу теоремы Зигеля $1/2 \le \beta < 1 - c(\varepsilon_1) r^{-\varepsilon_1}$. Поэтому при $n_1 n_2 > 1$ будем иметь

$$\big(1 - (n_1 n_2)^{\beta-1}\big) > 1 - \exp\big(-c(\varepsilon_1) r^{-\varepsilon_1} \ln(n_1 n_2)\big) > c_{10} r^{-\varepsilon_1}.$$

Теперь, используя последнюю оценку, из (6.10) и (3.8) получим утверждение леммы. □

Из (7.8) и леммы 7.1 следует, что если $n \le 2N$ и $n \equiv 0 (\operatorname{mod} 2)$, то

$$|J(N,n)\sigma(n) + D(N,n)| > c_{10} r^{-\varepsilon_1} J(N,n)\sigma(n) + \\ + O\bigg(\frac{N}{P} rd\tau(n)(\ln\ln N)^4 \ln^{1/2} N\bigg) + O\bigg(\frac{N}{r^{1/2}}\varphi(D)(\ln\ln N)^2\bigg). \tag{7.9}$$

Согласно лемме 6.1

$$\varphi^2(D)R(N,n) - J(N,n)\sigma(n) - D(N,n) \ll NP^{-1/3} D\varphi(D) \tag{7.10}$$

для всех $n \le 2N$, за исключением не более чем

$$c_{11}\varphi^{-1}(D) NP^{-1/3} \ln^{12} N \tag{7.11}$$

значений из них.

Лемма 7.2. *Для всех четных чисел n, $N/2 < n \le N$, за исключением не более чем $c_{12} N\varphi^{-1}(D) P^{-1/3} \ln N$ значений из них, справедлива оценка*

$$|J(N,n)\sigma(n) + D(N,n)| \gg NP^{-\varepsilon_1/4} D.$$

Доказательство. Известно, что $\sum\limits_{n \le N} \tau(n) \ll N \ln N$. Отсюда $\tau(n) \ll P^{1/3}\varphi(D)$ для всех n, $n \le N$, за исключением не более чем $c_{12} NP^{-1/3}\varphi^{-1}(D) \ln N$ значений n.

Следовательно, согласно (7.9)

$$|J(N,n)\sigma(n) + D(N,n)| > c_{10} J(N,n)\sigma(n) + O(Nr^{-1} P^{-5/12} \varphi(D) d(\ln\ln N)^4 \ln^{1/2} N) + \\ + O(Nr^{-1/2}(\ln\ln N)^2 \varphi(d)) \gg r^{-\varepsilon_1} ND(1 - c_{13}(\ln\ln N)^2 (\ln N)^{-(A+2)(\frac{1}{2}-\varepsilon_1)}) \gg r^{-\varepsilon_1} ND.$$

Так как $r \le P$, то отсюда следует утверждение леммы. □

Поскольку $R(N,n)$ не отрицательное, то

$$R(N,n) \geq \varphi^{-2}(D)\{|J(N,n)\sigma(n) + D(N,n)| - |\varphi^2(D)R(N,n) - J(N,n)\sigma(n) - D(N,n)|\}.$$

Следовательно, учитывая $P = P_1$, из (7.10) и леммы 7.2 получим

$$R(N,n) > \frac{ND}{P^{\varepsilon_1/4}}\left(c_{14} - c_{15}\varphi(D)P^{-\frac{1}{3}+\frac{\varepsilon_1}{4}}\right) > NDP^{-\frac{1}{20}}.$$

Из последнего соотношения следует

$$R(n) > \frac{n\exp(-c_{14}\sqrt{\ln n})}{\varphi(D)\ln^2 n}\left(1 - \frac{\ln^A n}{\exp(3c_{14}\sqrt{\ln n})}\right). \tag{7.12}$$

Из (7.6) и (7.12), учитывая (7.3) и (7.11), получим утверждение теоремы 1. $\square$

В заключение автор выражает благодарность за поддержку и полезные советы профессорам А.Ф. Лаврику и М.И. Исраилову.

Литература

1. Лаврик А.Ф. *К бинарным проблемам аддитивной теории простых чисел в связи с методом тригонометрических сумм И.М. Виноградова* // Вестн. Ленингр. ун-та. Сер. матем. – 1961. – Вып. 13. – С. 11–27.
2. Vaughan R.C. *On Goldbach's problem* // Acta arithm. – 1972. – V. 21. – № 1. – P. 21–48.
3. Montgomery H.L., Vaughan R.C. *The exceptional set in Goldbach's problem* // Acta arithm. – 1975. – V. 27. – P. 353–370.
4. Аллаков И.А. *Некоторые оценки снизу для числа представлений гольдбаховых чисел* // Вопр. вычисл. и прикл. матем. – Ташкент. – 1985. – № 77. – С. 37–41.
5. Хамзаев Э. *О представлении натуральных чисел в виде суммы простого и квадрата целого из арифметической прогрессии* // Узб. матем. журн. – 1991. – №3. – С. 64–75.
6. Дэвенпорт Г. *Мультипликативная теория чисел.* – М.: Наука, 1971. – 199 с.
7. Rademacher H. *Über eine Erweiterung des Goldbachen Problems* // Math. Zeit. – 1925. – Bd. 25. – S. 627–657.
8. Аллаков И.А. *Об исключительном множестве в бинарной проблеме Гольдбаха.* – Ред. журн. "Изв. АН УзССР. Сер. физ.-матем. наук". – Ташкент, 1981. – 76 с. – Деп. в ВИНИТИ 11.11.81, № 5087–82.
9. Прахар К. *Распределение простых чисел.* – М.: Мир, 1967. – 511 с.
10. Исраилов М.И., Аллаков И.А. *Об оценке тригонометрических сумм по простым числам арифметических прогрессий* // ДАН УзССР. – 1982. – № 4. – С. 5–6.

Термезский государственный университет

Поступили
первый вариант 17.02.1997
окончательный вариант 29.02.2000