Известия вузов. Математика *http://www.ksu.ru/journals/izv_vuz/*
2010, №5, с. 3–7 *Гос. номер статьи по НТЦ "Информрегистр" 0421000123\0041*

Т.М. АЛДИБЕКОВ

О ПОЛУНЕПРЕРЫВНОСТИ СВЕРХУ СТАРШЕГО ОБОБЩЕННОГО ПОКАЗАТЕЛЯ ЛЯПУНОВА СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Аннотация. Изучаются обобщенные показатели Ляпунова, т.е. показатели Ляпунова в более общей шкале, и используются к исследованию асимптотики роста решений дифференциальных систем. Установлено необходимое и достаточное условие полунепрерывности сверху старшего обобщенного показателя Ляпунова в некотором классе системы дифференциальных уравнений.

Ключевые слова: обобщенные показатели Ляпунова, системы дифференциальных уравнений, полунепрерывность.

УДК: 517.938

Abstract. We study Lyapunov's generalized exponent, i.e., Lyapunov's exponent in more general scale, which are applied in investigation of asymptotic growth of the solutions of differential systems. We establish necessary and sufficient conditions of semicontinuity from above of senior generalized Lyapunov's exponent in a class of system of the differential equations.

Keywords: Lyapunov's generalized exponent, differential systems, semicontinuity.

В работе установлено необходимое и достаточное условие полунепрерывности сверху старшего обобщенного показателя Ляпунова в некотором классе системы дифференциальных уравнений.

Для линейных систем дифференциальных уравнений с непрерывными и неограниченными коэффициентами показатели могут не иметь конечного значения. Это лишает возможности пользоваться в таких ситуациях результатами (см. [1], с. 10) теории показателей Ляпунова, поскольку даже само исходное определение оказывается тогда не совсем пригодным. Если показатели системы принимают нулевые значения, то возникают трудности, так как в этом случае о поведении решений при $t \to \infty$ ничего определенного сказать нельзя. Поэтому изучаются обобщенные показатели Ляпунова, т.е. показатели Ляпунова в более общей шкале, и используются для исследования асимптотики роста решений дифференциальных систем.

Пусть Q — множество всех кусочно-непрерывных, неотрицательных, неограниченных, монотонно возрастающих функций при $t \geq 0$.

Обобщенный показатель Ляпунова ненулевого решения $x(t)$ системы с кусочно-непрерывной матрицей коэффициентов $A(t)$, $t \in I \equiv [0, +\infty]$,

$$\dot{x} = A(t)x \tag{1}$$

Поступила 14.04.2008

относительно $q(t)$, $t\in I$, определяется по формуле

$$\chi[x,q]=\overline{\lim_{t\to+\infty}}\frac{1}{q(t)}\ln\|x(t)\|.$$

В зависимости от $q(t)$ обобщенный показатель есть число или символ $-\infty$ либо $+\infty$. Для нулевого решения $x(t)=\theta$ по определению полагаем $\chi[\theta,q]=-\infty$. Известно (см. [2]), что если векторная функция $F(t,x)$ непрерывна в области $G=I\times D$, $D\subset R^n$, $F(t,0)=0$ и удовлетворяет условию $\|F(t,x)\|\le K\varphi(t)\|x\|$, где $\varphi(t)$ — непрерывная положительная в I функция, K — положительная постоянная, то все ненулевые решения векторного уравнения $\dot{x}=F(t,x)$ имеют конечные обобщенные показатели относительно $q(t)=\int\limits_{t_0}^{t}\varphi(\tau)d\tau, t_0\in I$. В частности, это справедливо для системы (1), удовлетворяющей условию $\|A(t)\|\le K\varphi(t)$. Поэтому система (1) имеет не более $n\in N$ различных конечных обобщенных показателей относительно $q(t)=\int\limits_{t_0}^{t}\varphi(\tau)d\tau$, так как существуют всего n линейно независимых решений. Наибольший обобщенный показатель системы (1) называется старшим обобщенным показателем системы (1) и обозначается через $\lambda(A)$.

Пример 1. $\dot{x}=2tx$, $\dot{y}=-2ty$.

Обобщенными показателями относительно $q(t)=t^2$ являются $\lambda_1(q)=1$, $\lambda_2(q)=-1$.

Пример 2. $\dot{x}=\frac{1}{t}x$.

Обобщенный показатель относительно $q(t)=\ln t$, $\lambda_1(q)=1$, т. е. решение растет.

Пример 3. $\dot{x}=\left[\frac{t^3}{3}(4\operatorname{arctg}\frac{t}{t+1}-\pi+\frac{t}{(t+1)^2+t^2})+\frac{t^2}{4}+1\right]x+\frac{2007t^{2007}}{e^{t^2}}y$, $\dot{y}=-2007t\ln tx-2007t^2y$.

Обобщенные показатели этой системы относительно $q(t)=\frac{t^3}{3}$ есть $\lambda_1(q)=-\frac{1}{4}$, $\lambda_2(q)=-2007$. Следовательно, система асимптотически устойчива.

Лемма. *Старший обобщенный показатель системы* (1) *определяется по формуле*

$$\lambda[A]=\overline{\lim_{t\to\infty}}\frac{1}{q(t)}\ln\|X_A(t,0)\|,$$

где $q(t)=\int\limits_{t_0}^{t}\varphi(\tau)d\tau, X_A(t,0)$ *— матрица Коши системы* (1).

Доказательство. Положим $\mu\equiv\overline{\lim\limits_{t\to+\infty}}\frac{1}{q(t)}\ln\|X_A(t,0)\|$. Из равенства $x(t)=X_A(t,0)x(0)$ следует, что

$$\|x(t)\|\le\|X_A(t,0)\|\cdot\|x(0)\|,$$
$$\frac{1}{q(t)}\ln\|x(t)\|\le\frac{1}{q(t)}\ln\|X_A(t,0)\|+\frac{1}{q(t)}\ln\|x(0)\|,$$
$$\overline{\lim_{t\to+\infty}}\frac{1}{q(t)}\ln\|x(t)\|\le\overline{\lim_{t\to+\infty}}\frac{1}{q(t)}\ln\|X_A(t,0)\|=\mu,$$

т. е. для любого ненулевого решения $x(t)$ системы (1) имеет место неравенство $\chi[x,q]\le\mu$, в частности, $\lambda(A)\le\mu$. Докажем обратное неравенство. Для любого решения $x(t)=X_A(t,0)x(0)$ системы (1) справедлива оценка $\|x(t)\|=\|X_A(t,0)x(0)\|\le N_{\varepsilon,x(0)}e^{(\lambda(A)+\varepsilon)q(t)}$, где $\varepsilon>0$ и $N_{\varepsilon,x(0)}$ — некоторая постоянная, $\lambda(A)$ — старший обобщенный показатель системы относительно $q(t)$. Отсюда вытекает неравенство

$$\|X_A(t,0)x(0)\|e^{-(\lambda(A)+\varepsilon)q(t)}\le N_{\varepsilon,x(0)}$$

или

$$\|X_A(t,0)e^{-(\lambda(A)+\varepsilon)q(t)}x(0)\| \le N_{\varepsilon,x(0)}.$$

Совокупность операторов $X_A(t,0)e^{-(\lambda(A)+\varepsilon)q(t)}$, $t \in I$, ограничена на каждом элементе $x(0) \in R^n$. Из теоремы Банаха–Штейнгауза (см. [3], с. 21) следует ее равномерная ограниченность: $\|X_A(t,0)e^{-(\lambda(A)+\varepsilon)q(t)}\| \le N_\varepsilon$, $t \in I$. Поэтому имеет место неравенство $\|X_A(t,0)\| \le N_\varepsilon e^{(\lambda(A)+\varepsilon)q(t)}$ или $\frac{1}{q(t)}\ln\|X_A(t,0)\| \le \frac{\ln N_\varepsilon}{q(t)} + \lambda(A) + \varepsilon$. Переходя к верхнему пределу при $t \to +\infty$, в силу произвольности $\varepsilon > 0$ получаем неравенство $\mu \le \lambda(A)$. □

Старший обобщенный показатель, служащий для оценки решений системы дифференциальных уравнений сверху, может измениться под действием возмущений. Поэтому для старшего обобщенного показателя важна оценка сверху. Для линейных систем дифференциальных уравнений с непрерывными и неограниченными коэффициентами рассматриваются обобщенные центральные показатели, которы оценивают обобщенные показатели.

Функция $R_q(t)$, $t \in I$, называется (см. [1], с. 103; [4]) обобщенно-верхней функцией относительно $q(t) \in Q$ для системы (1), если она ограничена, измерима и для всех ненулевых решений системы (1) осуществляет оценку

$$\frac{\|x(t)\|}{\|x(s)\|} \le D_{R,\varepsilon} \exp\left\{\int_s^t [R_q(\tau)+\varepsilon]dq(\tau)\right\} \text{ для всех } t \ge s \ge 0,$$

$D_{R,\varepsilon}$ — константа, зависящая от выбора $R_q(t)$ и $\varepsilon > 0$.

Множество $\{R_q(t)\}$ обобщенно-верхних функций системы (1) называется верхним классом системы (1) относительно $q \in Q$ и обозначается символом $B(A,q)$. Пусть $\Omega(R,q) = \overline{\lim\limits_{t\to+\infty}} \frac{1}{q(t)} \int\limits_0^t R_q(\tau)dq(\tau)$. Число $\Omega(A) = \inf\limits_{R\in B(A,q)} \Omega(R,q)$ называется обобщенно-верхним центральным показателем системы (1) относительно $q \in Q$.

Для любого решения системы (1) при любом $\varepsilon > 0$ выполняется неравенство

$$\|x(t)\| \le D_\varepsilon \|x(t_0)\| \exp\{[\Omega(A)+\varepsilon][q(t)-q(t_0)]\}, \tag{2}$$

где D_ε — некоторая положительная константа, $t \ge t_0 \ge 0$. Следовательно, обобщенный показатель любого ненулевого решения системы (1) удовлетворяет неравенству $\lambda[x,q] \le \Omega(A)$ и, в частности, для старшего обобщенного показателя имеет место неравенство $\lambda(A) \le \Omega(A)$, которое также может быть строгим.

Пример 4. $\dot{x} = x$, $\dot{y} = \pi t \sin \pi\sqrt{t} y$. Здесь $\lambda_1(q) = \lambda_2(q) = 0$, $\Omega(q) = \frac{1}{2}$ относительно $q(t) = t^2$.

Обозначим через $M_n^+(\varphi)$ метрическое пространство, точками которого являются кусочно-непрерывные матрицы $A(t)$, $t \in I$, порядка $n \times n$, а расстояние определяется формулой

$$\rho(A,B) = \sup_{t\ge 0} \frac{\|A(t)-B(t)\|}{\varphi(t)}, \quad A, B \in M_n^+(\varphi).$$

Старший обобщенный показатель Ляпунова $\lambda(A)$ и обобщенно-верхний центральный показатель $\Omega(A)$ системы (1) будем рассматривать как функционалы, определенные на этом пространстве:

$$\lambda(\cdot) : M_n^+(\varphi) \to R, \quad \Omega(\cdot) : M_n^+(\varphi) \to R.$$

Известно (см. [1], с. 208; [4]), что функционал $\Omega(\cdot) : M_n^+(\varphi) \to R$ полунепрерывен сверху в каждой точке пространства $M_n^+(\varphi)$. Пусть $q(t) = t^\beta$, $\varphi(t) = t^{\beta-1}$, $\beta > 1$, $M_n^+ \equiv M_n^+(t^{\beta-1})$.

Следующий пример

$$\frac{dy_1}{dt} = -akt^{k-1}y_1,$$
$$\frac{dy_2}{dt} = (kt^{k-1}\sin\ln t + t^{k-1}\cos\ln t - 2akt^{k-1})y_2$$

показывает, что старший обобщенный показатель имеет точку разрыва в пространстве M_2^+. Это модернизация примера Перрона ([5], $k = 1$). Справедливо равенство

$$\Omega(A) = \lim_{T\to+\infty} \overline{\lim_{m\to+\infty}} \frac{1}{m^\beta T^\beta} \sum_{j=0}^{m-1} \ln \|X_A((j+1)T, jT)\|,$$

$X_A(t,s)$ — матрица Коши системы (1).

Теорема. *Старший обобщенный показатель, как функционал $\lambda(\cdot) : M_n^+ \to R$, полунепрерывен сверху в точке $A \in M_n^+$ тогда и только тогда, когда $\lambda(A) = \Omega(A)$.*

Доказательство. Достаточность. Функционал $\Omega(\cdot) : M_n^+ \to R$ является полунепрерывным сверху функционалом. Следовательно, если имеет место равенство $\lambda(A) = \Omega(A)$ в точке $A \in M_n^+$, то старший обобщенный показатель полунепрерывен сверху в точке $A \in M_n^+$.

Необходимость. Пусть функционал $\lambda(\cdot)$ полунепрерывен сверху в точке $A \in M_n^+$. Следуя работе [6], для любого $\varepsilon > 0$ фиксируем T_0 такое, что $e^{\frac{\varepsilon}{2}T_0^\beta} \sin^2 \varepsilon \geq 1$. Выберем T такое, что

$$\overline{\lim_{m\to\infty}} \frac{1}{m^\beta T^\beta} \sum_{j=0}^{m-1} \ln \|X_A((j+1)T, jT)\| \geq \Omega(A) - \frac{\varepsilon}{4}, \tag{3}$$

$\frac{T}{T_0} = s$ целое, $4(2a+\varepsilon)\frac{T_0}{T} < \frac{\varepsilon}{4}$, где $a = \sup\limits_{t\geq 0} \frac{\|A(t)\|}{\varphi(t)}$. Пусть

$$x_i(t) = X_A(t, iT)x_i \tag{4}$$

— решения системы (1), где x_i, $i = 1, 2, 3, \ldots,$ — единичный вектор, для которого выполняется равенство

$$\|X_A((i+1)T, iT)x_i\| = \|X_A((i+1)T, iT)\|. \tag{5}$$

Строим возмущение. Положим $B_\varepsilon(t) = 0$ при $0 \leq t \leq T$. Пусть на отрезке $T \leq t \leq 2T$ выполняется неравенство $\frac{\|x_1(2T)\|}{\|x_1(T)\|} : \frac{\|x_0(2T)\|}{\|x_0(T)\|} \geq \exp(\frac{\varepsilon}{2}T^\beta)$. Разделим отрезок $[T, 2T]$ на s равных частей длины T_0 и возьмем первый из отрезков слева, на концах которых выполняется неравенство $\frac{\|x_1(T+i_1T_0)\|}{\|x_1(T+(i_1-1)T_0)\|} : \frac{\|x_0(T+i_1T_0)\|}{\|x_0(T+(i_1-1)T_0)\|} \geq \exp(\frac{\varepsilon}{2}T_0^\beta)$, $i_1 \in \{1, \ldots, s\}$. Строим возмущение $B_\varepsilon(t)$ при $T \leq t \leq 2T$ следующим образом:

$$\text{A)} \qquad B_\varepsilon(t) = 0 \ \text{ при } \ t \in (T, T+(i_1-2)T_0) \bigcup (T+i_1T_0, 2T],$$
$$\text{B)} \qquad B_\varepsilon(t) = U_\varepsilon^{-1}(t)A(t)U_\varepsilon(t) - U_\varepsilon^{-1}(t)\dot{U}_\varepsilon(t) - A(t)$$

при $t \in [T+(i_1-2)T_0,\, T+(i_1-1)T_0]$.

Так как $x_0(t)$ — решение системы (1), то $y_0(t) = x_0(t)$ при $t < T+(i_1-2)T_0$, а также $y_0(t) = U_\varepsilon^{-1}(t)x_0(t)$ при $t \in [T+(i_1-2)T_0, T+(i_1-1)T_0]$ есть решение системы

$$\dot{y} = A(t)y + B_\varepsilon(t)y, \tag{6}$$

где $U_\varepsilon(t)$ — ортогональная матрица, обладающая свойствами

$$\text{a)} \ \ U_\varepsilon(T+(i_1-2)T_0) = E; \quad \text{b)} \ \ \|\dot{U}_\varepsilon(t)\| \leq \frac{\varepsilon}{T_0^\beta},$$

где ε — угол наклона вектора $(x_0(T+(i_1-1)T_0), y_0(T+(i_1-1)T_0))$ к вещественной оси,

$$y_0(T+(i_1-1)T_0) = U_\varepsilon^{-1}(T+(i_1-1)T_0)x_0(T+(i_1-1)T_0) = \\ = \alpha_1 x_0(T+(i_1-1)T_0) + \alpha_2 x_1(T+(i_1-1)T_0) \quad (\alpha_1 > 0, \quad \alpha_2 > 0).$$

При $t \in [T+(i_1-1)T_0, T+i_1T_0]$ возьмем $B_\varepsilon(t)$ как в B) и $U_\varepsilon(t)$ такую, что $U_\varepsilon(T+(i_1-1)T_0) = E$ и вектор $U_\varepsilon^{-1}(T+i_1T_0)[\alpha_1 x_0(T+i_1T_0) + \alpha_2 x_1(T+i_1T_0)]$ был коллинеарен $x_1(T+i_1T_0)$.

Далее на отрезках $[2T, 3T], \ldots$ возмущение $B_\varepsilon(t)$ определяется аналогично. Заметим, что $A + B_\varepsilon \in M_n^+$. В силу построения при любом $i = 0, 1, 2, \ldots$ имеет место неравенство $\frac{\|y_0((i+1)T)\|}{\|y_0(iT)\|} \geq \frac{\|x_i((i+1)T\|}{\|x_i(iT))\|} \exp(-\frac{3\varepsilon}{4}T^\beta)$. Отсюда ввиду формул (3)–(5) для любого $\varepsilon > 0$ получаем $\lambda(A+B_\varepsilon) > \Omega(A) - \varepsilon$, где $\lambda(A+B_\varepsilon)$ — обобщенный показатель решения $y_0(t), y_0(0) = x_0$ системы (6). Так как $\lambda(A+B_\varepsilon) \leq \Omega(A+B_\varepsilon)$, то в силу полунепрерывности сверху функционала $\Omega(A)$ и произвольности $\varepsilon > 0$ справедливо равенство $\lambda(A) = \Omega(A)$. □

Следствие. Если $A \in M_n^+$ — точка полунепрерывности сверху старшего обобщенного показателя $\lambda(A)$ и $\lambda(A) < 0$, то из устойчивости нулевого решения системы (1) следует устойчивость нулевого решения квазилинейной системы $\dot{x} = A(t)x + f(t, x)$, где векторная функция $f(t, x)$ непрерывна в области $[0, +\infty) \times D$, $D \subset R^n$, $f(t, 0) = 0$ и удовлетворяет условию $\|f(t, x)\| \leq K\varphi(t)\|x\|$.

Доказательство. Класс вектор-функций $f(t, x)$, удовлетворяющих условию с константой K, обозначим через $L(K)$. Известно ([1], с. 208; [4]), что для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $K > 0$, что при всех $f(t, x) \in L(K)$, $t \geq t_0$, выполняется неравенство (2) равномерно по всем решениям системы (1), где D_ε — некоторая константа. Отсюда в силу полунепрерывности сверху обобщенного верхнего центрального показателя и из теоремы при условии $\lambda(A) < 0$ следует устойчивость нулевого решения квазилинейной системы. □

Литература

[1] Былов Б.Ф., Виноград Р.Э., Гробман Д.М., Немыцкий В.В. *Теория показателей Ляпунова и ее приложение к вопросам устойчивости.* – М.: Наука, 1966. – 576 с.

[2] Алдибеков Т.М. *Аналог теоремы Ляпунова об устойчивости по первому приближению* // Дифференц. уравнения. – 2006. – Т. 42. – № 6. – С. 859–860.

[3] Далецкий Ю.Л., Крейн М.Г. *Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве.* – М.: Наука, 1970. – 534 с.

[4] Алдибеков Т.М. *О равномерных оценках роста решений системы дифференциальных уравнений* // Изв. НАН РК. Сер. физ.-матем. – 2005. – № 1. – С. 3–9.

[5] Алдибеков Т.М. *Об обобщенно-верхнем центральном показателе линейной системы с неограниченными коэффициентами* // Матем. журн. – 2004. – Т. 4. – № 3. – С. 5–11.

[6] Миллионщиков В.М. *Доказательство достижимости центральных показателей линейных систем* // Сиб. матем. журн. – 1969. – Т. 10. – № 1. – С. 99–104.

Т.М. Алдибеков

доцент, кафедра дифференциальных уравнений и математической физики,
Казахский национальный университет,
пр. Аль-Фараби, д. 71, г. Алматы, 050038, Республика Казахстан,

e-mail: tamash59@list.ru

T.M. Aldibekov

Associate Professor, Chair of Differential Equations and Mathematical Physics,
Kazakh National University,
71 Al-Farabi Ave., Almaty, 050038 Republic of Kazakhstan,

e-mail: tamash59@list.ru