ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2003 МАТЕМАТИКА № 3 (490)

УДК 517.958:533.601

В.В. СУШКОВ

АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ВЕКТОРНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ ГАЗОВ

В данной статье рассматривается граничная задача для уравнения

$$\mu\frac{\partial}{\partial x}h(x,\mu)+h(x,\mu)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\mu^2}K_0(\mu,\mu')h(x,\mu')d\mu', \tag{0.1}$$

где ядро задается как матрица-функция $K_0(\mu,\mu')=K(\mu')+2\mu\mu' L(\mu')$, причем

$$K(\mu)=\begin{bmatrix}1 & \gamma(\mu^2-1/2)\\ \gamma(\mu^2-1/2) & \gamma^2[(\mu^2-1/2)^2+2]\end{bmatrix},\quad L(\mu)=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}K(\mu),$$

относительно неизвестной вектор-функции $h(x,\mu)$ с элементами $h_1(x,\mu)$ и $h_2(x,\mu)$. Здесь величина $\gamma=\sqrt{2/5}$ — известное число Прандтля. Уравнение (0.1) является результатом линеаризации классического уравнения Больцмана с оператором столкновений в форме БГК (Бхатнагара–Гросса–Крука) для двухатомного газа (см., напр., [1]–[3]). Это уравнение имеет исключительно важное значение в прикладных задачах кинетической теории газа и плазмы, теории аэрозолей, экологии, авиационной и космической промышленности ([4], с. 185). В частности, в данной работе в качестве элементарного приложения развитой теории мы получим точное решение так называемой задачи о температурном скачке, впервые рассмотренной в [5]. Рассматривается разреженный двухатомный газ, занимающий полупространство $x>0$. Вдали от стенки, лежащей в плоскости $x=0$, в газе поддерживается стационарное температурное поле. Поведение газа описывается функцией распределения, определение которой требует решения модельного уравнения Больцмана, в процессе которого и приходим к (0.1).

Метод канонической матрицы, используемый в данной статье, впервые был применен в [1] для решения задачи Смолуховского в случае одноатомного газа. Суть метода состоит в построении матрицы канонических решений — "канонической матрицы" ([6], с. 426) уравнения (0.1) и последующем ее применении для решения конкретных краевых задач. Целью данной статьи является существенная модификация описанного метода, с тем чтобы, во-первых, его можно было использовать для решения отдельных физических задач, а во-вторых, чтобы он без труда допускал дальнейшие обобщения для решения целых классов уравнений. Подобная методика в литературе до сих пор описана не была.

1. Постановка краевой задачи

Проведя замену переменной, перепишем (0.1) в виде

$$\mu\frac{\partial}{\partial x}Y(x,\mu)+Y(x,\mu)= \\ =\frac{1}{\sqrt{\pi}}Q(\mu)\int_{-\infty}^{\infty}Q_1(\mu')Y(x,\mu')e^{-\mu'^2}d\mu'+\frac{2}{\sqrt{\pi}}\mu\int_{-\infty}^{\infty}\mu'\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}Y(x,\mu')e^{-\mu'^2}d\mu', \tag{1.1}$$

где $Q(\mu)=\begin{bmatrix}\gamma(\mu^2-1/2)&1\\ \gamma&0\end{bmatrix}$, $Q_1(\mu')=\begin{bmatrix}\gamma(\mu'^2-1/2)&2\gamma\\ 1&0\end{bmatrix}$, а $Y(x,\mu)=\begin{bmatrix}Y_1(x,\mu)\\ Y_2(x,\mu)\end{bmatrix}$ — новая неизвестная вектор-функция. Следуя Кейзу ([7], с. 74), разделяем переменные в полученном уравнении $Y_\eta(x,\mu)=$

$e^{-x/\eta}\Phi(\eta,\mu)$, $\eta \in \mathbb{C}$, $\mu \in \mathbb{R}$. Приходим, таким образом, к характеристическому уравнению

$$(\eta-\mu)\Phi(\eta,\mu) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\eta Q(\mu)n(\eta) + \frac{2}{\sqrt{\pi}}\mu\eta \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} n_1(\eta), \quad \mu \in \mathbb{R}, \quad \eta \in \mathbb{C}, \tag{1.2}$$

где векторы $n(\eta)$ и $n_1(\eta)$ определяются как моменты нулевого и первого порядка:

$$n(\eta) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\mu^2} Q_1(\mu)\Phi(\eta,\mu)d\mu \quad \text{и} \quad n_1(\eta) = \int_{-\infty}^{\infty} \mu e^{-\mu^2} Q_1(\mu)\Phi(\eta,\mu)d\mu.$$

Вектор-функции $\Phi(\eta,\mu)$ будем называть собственными функциями, а соответствующие им значения η — собственными значениями характеристического уравнения (1.2). Из условия нормировки для вектора $n(\eta)$ получаем, что $n_1(\eta)$ равен тождественному нулю. То есть, возвращаясь к (1.1), получаем

$$(\eta-\mu)\Phi(\eta,\mu) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\eta Q(\mu)n(\eta). \tag{1.3}$$

Из (1.3) при $\eta \in \mathbb{R}$ найдем собственные векторы непрерывного спектра $\Phi(\eta,\mu) = F(\eta,\mu)n(\eta)$. Здесь

$$F(\eta,\mu) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\eta \mathbf{P}\frac{1}{\eta-\mu}Q(\mu) + B(\eta)\delta(\eta-\mu) \tag{1.4}$$

— собственная матрица непрерывного спектра, где символ $\mathbf{P}\frac{1}{x}$ означает распределение — главное значение интеграла по Коши от x^{-1}, $\delta(x)$ — известная дельта-функция Дирака, а $B(\eta)$ — произвольная матрица-функция, определяемая условием нормировки

$$B(\eta) = e^{\eta^2}Q_1^{-1}(\eta)\Lambda(\eta), \quad \eta \in \mathbb{R}.$$

Матрицу-функцию $\Lambda(z) = I + \frac{z}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\mu^2}\frac{Q_1(\mu)Q(\mu)}{\mu-z}d\mu$, где I — единичная матрица, будем называть дисперсионной матрицей, а ее определитель $\lambda(z)$ — дисперсионной функцией задачи. Выписав матрицу Λ в явном виде, получим

$$\Lambda(z) = \lambda_c(z)Q_1(z)Q(z) + \frac{1}{2}\gamma \begin{bmatrix} \gamma(z^2+1/2) & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \tag{1.5}$$

где $\lambda_c(z) = 1 + \frac{z}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\mu^2}\frac{d\mu}{\mu-z}$ — дисперсионная функция Черчиньяни ([4], с. 343). Используя ее разложение в окрестности бесконечно удаленной точки, заметим

$$\Lambda(z) = -\frac{1}{z^2}\begin{bmatrix} 9/10 & 1/\sqrt{10} \\ 1/\sqrt{10} & 1/2 \end{bmatrix} + o\Big(\frac{1}{z^2}\Big), \quad |z| \to \infty, \tag{1.6}$$

а дисперсионная функция $\lambda(z) + \frac{7}{20z^4} + o(\frac{1}{z^4})$, $|z| \to \infty$. Это разложение показывает, что бесконечно удаленная точка является четырехкратной точкой дискретного спектра, состоящего из нулей дисперсионного уравнения $\lambda(z) = 0$. С помощью принципа аргумента можно показать, что конечных комплексных корней дисперсионное уравнение не имеет. Для этого представим дисперсионную функцию в виде произведения

$$\lambda(z) = 2\gamma^2\Omega_1(z)\Omega_2(z), \tag{1.7}$$

где $\Omega_\alpha(z) = \lambda_c(z) + \frac{1}{8}\big[\frac{3}{2} - z^2 + (-1)^{\alpha+1}r(z)\big]$, $\alpha = 1,2$, $r(z) = \sqrt{(z^2-3/2)^2+8}$. Функции $\Omega_\alpha(z)$ испытывают разрыв на действительной оси. Выделим действительную и мнимую часть функций $\Omega_\alpha^{\pm}(\mu)$ на линии разрыва:

$$\Omega_\alpha^{\pm}(\mu) = \Omega_\alpha(\mu) \pm i\sqrt{\pi}\mu e^{-\mu^2}, \quad \mu \in \mathbb{R}.$$

Мнимые части $\Omega_\alpha^\pm(\mu)$ обращаются в нуль лишь в точке $\mu = 0$, в которой произведение $2\gamma^2\Omega_1^\pm(\mu)\Omega_2^\pm(\mu)$ нулю не равно. Следовательно, число ее нулей в комплексной плоскости с разрезом по действительной оси вычисляется посредством обобщенного принципа аргумента [8]

$$N = [\arg\lambda(z)]_C/(2\pi) - 2$$

или, учитывая (1.7), $N = \nu_1 + \nu_2 - 2$, где $\nu_\alpha = [\theta_\alpha]_C/(2\pi)$, $\theta_\alpha = \arg\Omega_\alpha^+$ — главное значение аргумента, C — замкнутый контур вокруг разреза по действительной оси, ориентированный по часовой стрелке, а выражение $[\ldots]_C$ означает приращение на C функции, стоящей в квадратных скобках. Так как $\Omega_\alpha(z) = \Omega_\alpha(-z)$ и $\overline{\Omega}_\alpha^+(\mu) = \Omega_\alpha^-(\mu)$, $\mu \in \mathbb{R}$ (черта над символом означает комплексное сопряжение), то $\nu_\alpha = \frac{2}{\pi}[\theta_\alpha(\mu)]_{(0,+\infty)}$. Исследуя поведение функций $\theta_\alpha(\mu)$, получаем $\nu_1 = 0$ и $\nu_2 = 2$. Таким образом, дисперсионное уравнение $\lambda(z) = 0$ не имеет в комплексной плоскости конечных корней. Следовательно, бесконечно удаленная точка является единственной точкой дискретного спектра характеристического уравнения, которой соответствуют четыре собственных вектора:

$$F_1(\mu) = Q(\mu)\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} = \gamma\begin{bmatrix}\mu^2 - 1/2\\1\end{bmatrix}, \qquad F_2(\mu) = Q(\mu)\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix},$$
$$F_3(x,\mu) = \gamma(\mu - x)\begin{bmatrix}\mu^2 - 1/2\\1\end{bmatrix}, \qquad F_4(x,\mu) = (\mu - x)\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}.$$

Из них первые два получаются непосредственно из уравнения (1.3), а третий и четвертый — с применением техники, разработанной Кейзом и Цвайфелем ([7], прил. F, с. 331). Исходя из физических соображений, граничные условия установим в виде

$$\begin{gathered} Y(0,\mu) = Y_0(\mu), \quad \mu > 0, \\ Y(x,\mu) = Y_{as}(x,\mu), \quad x \to \infty, \quad \mu < 0, \end{gathered} \tag{1.8}$$

где $Y_0(\mu)$ — произвольная вектор-функция такая, что произведение

$$\mu e^{-\mu^2}[\Phi_0^-(\mu)]^T[\Lambda^-(\mu)]^{-1}Q_1(\mu)Y_0(\mu)$$

удовлетворяет условию Гёльдера на $[0, +\infty]$ (матрица-функция $\Phi_0(z)$ будет определена во втором разделе), а $Y_{as}(x,\mu)$ задается как линейная комбинация частных решений:

$$Y_{as}(x,\mu) = A_0\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} + A_1(\mu - x)\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} + A_2\begin{bmatrix}\mu^2 - 1/2\\1\end{bmatrix} + A_3(x - \mu)\begin{bmatrix}\mu^2 - 3/2\\1\end{bmatrix}. \tag{1.9}$$

Решение граничной задачи (1.1), (1.8) будем искать в классе вектор-функций $Y(x,\mu)$, непрерывных по x на множестве $0 \le x \le +\infty$ при всех $\mu \in R$, удовлетворяющих по μ условию Гёльдера на промежутке $[0, +\infty]$ при всех $0 < x < +\infty$ и непрерывно дифференцируемых по x на множестве $0 < x < +\infty$ при всех $\mu \in R$. Класс таких вектор-функций обозначим через $\mathfrak{R}$.

2. Однородная векторная краевая задача

Рассмотрим вспомогательную однородную векторную краевую задачу Римана–Гильберта с матричным коэффициентом, лежащую в основе (см. параграф 3) доказательства полноты системы собственных векторов дискретного спектра $F_\alpha(x)$, $F_\beta(x,\mu)$, $\alpha = 1, 2$, $\beta = 3, 4$, дополненной векторами непрерывного спектра $F(\eta,\mu)$, $\eta \in (0,\infty)$. Полнота системы собственных векторов понимается как возможность разложения произвольной вектор-функции, удовлетворяющей условию Гёльдера, по собственным векторам характеристического уравнения. Это разложение после подстановки собственных векторов сводится к сингулярному интегральному уравнению с ядром Коши, которое в свою очередь сводится к неоднородной краевой задаче.

Итак, рассмотрим следующую задачу: найти матрицу канонических решений $X(z)$ для краевой задачи, поставленной на берегах разреза $(0,+\infty)$:

$$X^+(\mu)=\Lambda^+(\mu)[\Lambda^-(\mu)]^{-1}X^-(\mu),\quad \mu>0, \tag{2.1}$$

т. е.

$$[X^+(\mu)]^{-1}\Lambda^+(\mu)=[X^-(\mu)]^{-1}\Lambda^-(\mu),\quad \mu>0. \tag{2.1$'$}$$

Домножив (2.1′) справа на $Q^{-1}(\mu)Q_l^{-1}(\mu)$ и введя обозначение $W(z)=\Lambda(z)Q^{-1}(z)Q_l^{-1}(z)$, получим следующую краевую задачу: $[X^+(\mu)]^{-1}W^+(\mu)=[X^-(\mu)]^{-1}W^-(\mu)$, $\mu>0$. Причем $W(z)$ можем выписать в явном виде:

$$W(z)=\lambda_C(z)I+\frac{1}{4}\Pi(z);$$

здесь $\Pi(z)=\begin{bmatrix}1 & -\gamma(z^2-5/2)\\ 1/\gamma & 1/2-z^2\end{bmatrix}$.

Таким образом, для диагонализации матрицы $W(z)$ достаточно привести к диагональному виду матрицу $\Pi(z)$. Очевидно, что диагонализирующая матрица $S(z)$ существует и имеет вид

$$S(z)=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\left(z^2+\frac{1}{2}+r(z)\right) & \frac{1}{2}\left(z^2+\frac{1}{2}-r(z)\right)\\ 1/\gamma & 1/\gamma\end{bmatrix}.$$

Теперь $S^{-1}(z)W(z)S(z)=\Omega(z)=\operatorname{diag}\{\Omega_1(z),\Omega_2(z)\}$, где по-прежнему

$$\Omega_\alpha(z)=\lambda_c(z)+\frac{1}{8}\left[\frac{3}{2}-z^2+(-1)^{\alpha+1}r(z)\right],\quad \alpha=1,2,\quad r(z)=\sqrt{(z^2-3/2)^2+8}.$$

Матрица-функция $S(z)$ является аналитической в комплексной плоскости, за исключением четырех точек ветвления $\pm a$, $\pm\overline{a}$ (здесь и далее величина $a=\sqrt{\frac{3}{4}+\frac{\sqrt{41}}{4}}+i\sqrt{-\frac{3}{4}+\frac{\sqrt{41}}{4}}$), в которых функция $r(z)$ обращается в нуль. Соединим точки a и $\overline{a}$ с $-\overline{a}$ и $-a$ соответственно, полученные разрезы обозначим через Γ_1 и Γ_2 (очевидно, разрезы не пересекают действительной оси). Теперь $S(z)$ является однозначной аналитической матрицей-функцией в плоскости C с разрезом $\Gamma=\Gamma_1\cup\Gamma_2$.

Матричный коэффициент задачи (2.1) обозначим через

$$G(\mu)=\Lambda^+(\mu)[\Lambda^-(\mu)]^{-1},\quad \mu>0.$$

Кроме того, для однозначности матрицы-функции $X(\tau)$ необходимо потребовать, чтобы на дополнительных разрезах

$$X^+(\tau)=X^-(\tau),\quad \tau\in\Gamma. \tag{2.2}$$

Будем искать решение задачи в виде

$$X(z)=S(z)U(z)S^{-1}(z), \tag{2.3}$$

где $U(z)=\operatorname{diag}\{U_1(z),U_2(z)\}$ — новая неизвестная диагональная матрица-функция. Тогда (2.1) перепишется следующим образом:

$$U^+(\mu)=\Omega^+(\mu)[\Omega^-(\mu)]^{-1}U^-(\mu),\quad \mu>0. \tag{2.4}$$

Нетрудно заметить, что задача (2.4) в силу диагональности матриц $U(\mu)$ и $\Omega(\mu)$ эквивалентна двум скалярным краевым задачам:

$$U_\alpha^+(\mu)=\Omega_\alpha^+(\mu)[\Omega_\alpha^-(\mu)]^{-1}U_\alpha^-(\mu),\quad \mu>0,\quad \alpha=1,2. \tag{2.5}$$

Обратимся теперь к условию (2.2). Из формулы (2.3) следует, что условие однозначности для матрицы $U(z)$ формулируется в виде $U^+(\tau)T(\tau)=T(\tau)U^-(\tau)$, $\tau\in\Gamma$, где $T(\tau)=\left[\begin{smallmatrix}0&1\\1&0\end{smallmatrix}\right]$, т. е.

$$U_1^+(\tau)=U_2^-(\tau),\quad U_1^-(\tau)=U_2^+(\tau),\quad \tau\in\Gamma, \tag{2.6}$$

где $U_1(\tau)$ и $U_2(\tau)$ — соответствующие диагональные элементы матрицы-функции $U(\tau)$.

Таким образом, матричная краевая задача (2.1), (2.2) эквивалентна векторной краевой задаче (2.5), (2.6), если рассматривать функции $U_1(\tau)$ и $U_2(\tau)$ как элементы некоторой векторной функции. Метод решения таких задач изложен в [1]. Тогда окончательно находим

$$U_\alpha(z) = (z - \mu_1)U_\alpha^{(0)}(z), \quad \theta = 1, 2, \tag{2.7}$$

где

$$U_{1,2}^{(0)}(z) = \exp[A(z) \mp r(z)(b(z) - R(z))], \tag{2.8}$$

причем здесь $A(z) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^\infty a(x)\frac{dx}{x-z}$, $B(z) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^\infty b(x)\frac{dx}{r(x)(x-z)}$, $R(z) = \int\limits_0^{\mu_1}\frac{dx}{r(x)(x-z)}$, где $a(x) = \theta_1(x) + \theta_2(x) - 2\pi$, $b(x) = \theta_2(x) - \theta_1(x)$. Величина μ_1 выбирается таким образом, чтобы функции $U_\alpha(z)$ имели конечный предел при $|z| \to \infty$. Для этого разложим $B(z)$ и $R(z)$ в ряд Лорана в окрестности бесконечно удаленной точки и потребуем выполнения условия

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \frac{b(x)}{r(x)}dx = \int_0^{\mu_1}\frac{dx}{r(x)}.$$

Иными словами, величина μ_1 определяется из задачи обращения Якоби для эллиптических интегралов.

Таким образом, неизвестная матрица-функция $U(z)$ полностью построена. Следовательно, в силу (2.3) найдена и фактор-матрица $X(z)$. Однако очевидно, что она не является канонической, поскольку ее определитель $\det X(z) = (z - \mu_l)^2 e^{2A(z)}$ имеет нули второго порядка в точках $z = 0$ и $z = \mu_1$. Но тогда каноническая матрица $\Phi(z)$ с нормальной формой на бесконечности должна иметь вид

$$\Phi(z) = \frac{1}{z^2(z-\mu_1)^2}X(z)P_0(z), \tag{2.9}$$

где $P_0(z)$ — некоторая полиномиальная матрица такая, что $\det P_0(z) \propto z^2(z-\mu_1)^2$. При этом в силу (2.9) должны выполняться условия

$$X(\xi)P_0(\xi) = 0 \ \text{ при } \xi = 0 \text{ и } \xi = \mu_1 \tag{2.10$'$}$$

и

$$\frac{d}{d\xi}[X(\xi)P_0(\xi)] = 0 \ \text{ при } \xi = 0 \text{ и } \xi = \mu_1. \tag{2.10$''$}$$

Следуя Мусхелишвили ([6], с. 427), запишем $\Phi(z) \to K\,\mathrm{diag}\{z^{-\varkappa_1}, z^{-\varkappa_2}\}$, $\det K \neq 0$, при $|z| \to \infty$, где $\varkappa_1$ и $\varkappa_2 \geq \varkappa_1$ — частные индексы задачи факторизации.

Лемма 1. *Частные индексы задачи факторизации* (2.1), *где матрица-функция* $\Lambda(z)$ *вычисляется по формуле* (1.5), *равны единице.*

Доказательство. Покажем, что $\varkappa_1 = \varkappa_2 = 1$. Во-первых, заметим, что $\varkappa_1 + \varkappa_2 = \varkappa$, причем $\varkappa$ определяется исключительно матричным коэффициентом задачи [6]. С помощью формулы Мусхелишвили и (2.9) непосредственно вычисляется $\varkappa = 2$.

Далее, используя равенство (2.9) наряду с точным выражением для $S(z)$ и $U_\alpha(z)$, можем утверждать, что при $|z| \to \infty$

$$P_0(z) \to z^3\begin{bmatrix} a_{11}z^{-\varkappa_1} & a_{12}z^{-\varkappa_2} \\ a_{21}z^{-\varkappa_1} & a_{22}z^{-\varkappa_2}\end{bmatrix},$$

откуда очевидно, что $\varkappa_1 > -2$, поскольку в противном случае вторая колонка $P(z)$ необходимо должна тождественно равняться нулю, что невозможно. Кроме того, из формул (2.7), (2.8) видно, что $U_2(z)$ имеет в точке $z = 0$ нуль второго порядка, т. е. (2.10) переписывается в виде

$\left[\begin{smallmatrix}\delta & 1\\ 0 & 0\end{smallmatrix}\right] P_0(0) = \mathbf{0}$ и $\left[\begin{smallmatrix}\delta & 1\\ 0 & 0\end{smallmatrix}\right] \frac{d}{d\xi} P_0(\xi) = \mathbf{0}$ при $\xi = 0$ и $\left[\begin{smallmatrix}0 & 0\\ 1 & \alpha\end{smallmatrix}\right] P_0(\mu_l) = \mathbf{0}$ для формулы (2.10′) в точке $\xi = \mu_1$, где величина $\alpha = -\frac{\gamma}{2}\left(r(\mu_1) + \mu_1^2 + \frac{1}{2}\right)$, а $\delta = \frac{2}{\gamma}\left(r(0) - \frac{1}{2}\right)^{-1}$. Нетрудно проверить, что $\delta > 0$, в то время как $\alpha < 0$. Если предположить, что элементы второй колонки $P_0(z)$ линейны по z, то из равенств, полученных для $\xi = 0$, автоматически следует отношение $P_{12}^{(0)}(z)/P_{22}^{(0)}(z) = -\delta^{-1}$. Но это противоречит третьему выписанному равенству, полученному для $\xi = \mu_l$, т. к. $\alpha \neq \delta^{-1}$. Следовательно, вторая колонка $P_0(z)$ должна быть как минимум квадратична по z, т. е. $\varkappa_2 \leq 1$. Таким образом, и $\varkappa_1 \leq 1$, откуда окончательно получаем $\varkappa_1 = \varkappa_2 = 1$. □

Прежде чем перейти к непосредственному вычислению канонической матрицы задачи (2.1), сформулируем некоторые свойства, которым она в случае существования должна необходимо удовлетворять.

Лемма 2. *Существует матрица канонических решений* $\Phi_0(z)$ *задачи* (2.1), *осуществляющая следующую факторизацию дисперсионной матрицы*:

$$\Lambda(z) = \Phi_0(z)\Phi_0^{-T}(-z). \tag{2.11}$$

Доказательство. Пусть $\Phi(z)$ — некоторое каноническое решение задачи (2.1). Введем новую функцию $\Psi(z) = \Lambda(z)\Phi^{-T}(z)$, где символ $\Phi^{-T}(z)$ означает $[\Phi^T(z)]^{-1}$. Тогда, рассмотрев $\Psi(-z)$ и воспользовавшись четностью матрицы $\Lambda(z)$, можем утверждать, что граничные значения

$$\begin{aligned}\Psi^-(-\mu) &= \Lambda^+(\mu)[\Phi^+(\mu)]^{-T},\\ \Psi^+(-\mu) &= \Lambda^-(\mu)[\Phi^-(\mu)]^{-T},\end{aligned} \qquad \mu > 0,$$

равны между собой. Действительно, $\Lambda(z) = \Lambda^T(z)$, а из равенства (2.1′) следует $\Psi^-(-z) = \Psi^+(-z)$, $\mu > 0$. Таким образом, $\Psi(z)$ аналитична во всей комплексной плоскости, за исключением положительной действительной полуоси, имеет конечный порядок на бесконечности и удовлетворяет условию (2.11). Следовательно, $\Psi(z) = \Phi(z)\mathbf{P}(z)$, где $\mathbf{P}(z)$ — некоторая полиномиальная матрица. Возвращаясь к определению $\Psi(z)$, легко получаем факторизацию дисперсионной матрицы

$$\Lambda(z) = \Phi(z)\mathbf{P}(z)\Phi^T(z). \tag{2.12}$$

Здесь $\Phi(z)$ — произвольная каноническая матрица задачи (2.11), а $\mathbf{P}(z)$ — матричный полином, определяемый частными индексами задачи [8].

Поскольку любая матрица канонических решений задачи (2.1) $\Phi(z)$ должна удовлетворять условию (2.9), то для нее будет выполняться

$$\Phi(z) = \overline{\Phi(\overline{z})}.$$

Применяя ее для факторизации дисперсионной матрицы $\Lambda(z)$ аналогично (2.12) и учитывая то, что $\Lambda(z) = \overline{\Lambda(\overline{z})}$ и $\Lambda(z) = \Lambda(-z) = \Lambda^T(z)$, для соответствующей полиномиальной матрицы получим $\mathbf{P}(z) = \mathbf{P}^T(z)$ и $\mathbf{P}(z) = \overline{\mathbf{P}(\overline{z})}$. Кроме того, по определению канонической матрицы $\Phi(z) \to K \operatorname{diag}\{z^{-\varkappa_1}, z^{-\varkappa_2}\}$, $\det K \neq 0$, при $|z| \to \infty$, т. е. из равенства (2.12) с учетом (1.6) получаем соотношение

$$\mathbf{P}(z) \to -\frac{1}{z^2}\begin{bmatrix} z^{\varkappa_1} & 0 \\ 0 & z^{\varkappa_2}\end{bmatrix} K^{-1} \begin{bmatrix} \frac{9}{10} & \frac{1}{\sqrt{10}} \\ \frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{1}{2}\end{bmatrix} K \begin{bmatrix} (-z)^{\varkappa_1} & 0 \\ 0 & (-z)^{\varkappa_2}\end{bmatrix}.$$

Положим

$$\Phi_0(z) = \Phi(z)K^{-1}\begin{bmatrix}\sqrt{\frac{7}{10}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix};$$

здесь $\Phi_0(z)$ — каноническое решение задачи (2.11), причем $\Phi_0(z) = \overline{\Phi_0(\overline{z})}$. Но $\varkappa_1 = \varkappa_2 = 1$ в силу леммы 1, следовательно, факторизация (2.12) для матрицы $\Phi_0(z)$ перепишется в виде (2.11). □

Таким образом, мы показали, что существует некоторая каноническая матрица $\Phi_0(z)$ краевой задачи (2.1), удовлетворяющая условиям

$$\Lambda(z) = \Phi_0(z)\Phi_0^{-T}(-z) \quad \text{и} \quad \lim_{|z|\to\infty} z\Phi_0(z) = \begin{bmatrix} \sqrt{\frac{7}{10}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}. \tag{2.13}$$

Сохраним и далее обозначение $\Phi_0(z)$ для такого канонического решения, существование и свойства которого обоснованы выше. Тогда, как было показано, матрица-функция $\Phi_0(z)$ представляется в виде

$$\Phi_0(z) = \frac{1}{z^2(z-\mu_1)^2} X(z) P_0(z); \tag{2.14}$$

здесь $X(z)$ — фактор-матрица, построенная ранее, а $P_0(z)$ — соответствующая полиномиальная матрица. Заметим, что из поведения $P_0(z)$ на бесконечности следует $P_0(z) = A + Bz + Cz^2$, где A, B, C — числовые действительные матрицы 2×2, причем матрица C находится из формулы (2.13)

$$C = \begin{bmatrix} c_{11}q_0 & c_{12}p_0 \\ 0 & c_{22}p_0 \end{bmatrix}, \quad p_0 = U_1^{(0)}(\infty), \quad q_0 = U_2^{(0)}(\infty);$$

здесь и далее $c_{11} = \sqrt{\frac{7}{10}}$, $c_{12} = \frac{1}{\sqrt{5}}$, $c_{22} = \frac{1}{\sqrt{2}}$. В новых обозначениях формулы (2.10′), (2.10″) перепишутся в виде

$$\begin{bmatrix} 1/\gamma & \frac{1}{2}(r(0)-\frac{1}{2}) \\ 0 & 0 \end{bmatrix} A = \mathbf{0}, \qquad \begin{bmatrix} 1/\gamma & \frac{1}{2}(r(0)-\frac{1}{2}) \\ 0 & 0 \end{bmatrix} B = \mathbf{0} \tag{2.15}$$

в точке $z=0$ и

$$\begin{gathered} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & \alpha \end{bmatrix} (A + B\mu_1) = -\mu_1^2 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ c_{11}q_0 & (c_{12}+\alpha c_{22})p_0 \end{bmatrix}, \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & \alpha \end{bmatrix} B + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \beta \end{bmatrix} (A + B\mu_1) = -2\mu_l \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \sqrt{\frac{7}{10}}q_0 & (c_{12}+\alpha c_{22} + \frac{c_{22}}{2}\beta\mu_1)p_0 \end{bmatrix} \end{gathered} \tag{2.16}$$

в точке $z=\mu_1$. Здесь и далее величины

$$\alpha = -\frac{\gamma}{2}\Big(r(\mu_1) + \mu_1^2 + \frac{1}{2}\Big), \quad \beta = -\frac{\gamma}{2}\Big(\frac{2\mu_1^3 - 3\mu_1}{r(\mu_1)} + 2\mu_1\Big). \tag{2.17}$$

Введем обозначение $\frac{\gamma}{2}(r(0)-\frac{1}{2}) = \frac{1}{\delta}$. Нетрудно проверить, что $\delta > 0$. Тогда решение уравнений (2.15), (2.16) запишется в виде

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ -\delta a_{11} & -\delta a_{12} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ -\delta b_{11} & -\delta b_{12} \end{bmatrix};$$

здесь

$$\begin{aligned} a_{11} &= \frac{\mu_1^3}{1-\alpha\delta}\Big[\frac{\beta\delta}{1-\alpha\delta} + \frac{1}{\mu_1}\Big] c_{11}q_0, \\ b_{11} &= -\frac{\mu_1^2}{1-\alpha\delta}\Big[\frac{\beta\delta}{1-\alpha\delta} + \frac{2}{\mu_1}\Big] c_{11}q_0, \\ a_{12} &= \frac{\mu_1^3}{1-\alpha\delta}\Big[\frac{c_{12}-\alpha c_{22}}{1-\alpha\delta}\beta\delta + \frac{c_{12}+(\alpha+\beta)c_{22}}{\mu_1}\Big] p_0, \\ b_{12} &= -\frac{\mu_1^2}{1-\alpha\delta}\Big[\frac{c_{12}+\alpha c_{22}}{1-\alpha\delta}\beta\delta + \frac{2(c_{12}+(\alpha+\frac{\beta}{2})c_{22})}{\mu_1}\Big] p_0, \end{aligned} \tag{2.18}$$

где α, β определяются по формулам (2.17), а μ_1 — из задачи обращения Якоби для эллиптических интегралов.

Таким образом, искомая полиномиальная матрица найдена. В силу (2.14) можем утверждать, что окончательно построена и каноническая матрица решений краевой задачи (2.1).

3. Теорема о полноте

Здесь докажем теорему о разложении решения краевой задачи по собственным векторам характеристического уравнения (или, иначе, теорему о полноте системы собственных векторов характеристического уравнения).

Теорема. *Задача* (1.1) *с граничными условиями* (1.8) *имеет единственное решение, представляемое в виде разложения по собственным функциям соответствующего характеристического уравнения*

$$Y(x,\mu) = Y_{as}(x,\mu) + \int_0^\infty F(\eta,\mu)a(\eta)e^{-x/\eta}d\eta; \tag{3.1}$$

здесь коэффициент непрерывного спектра $a(\eta)$ *— векторная функция, непосредственно вычисляемая на основании формул* (3.5), (3.7), (3.8), $F(\eta,\mu)$ *определяется формулой* (1.4), *а* $Y_{as}(x,\mu)$ *— соотношением* (1.9), *где* A_1, A_3 *— некоторые заданные коэффициенты дискретного спектра, а* A_0, A_2 *задаются формулами* (3.9).

Доказательство. Положив в формуле (3.1) $x = 0$, при помощи граничных условий (1.8) можем записать

$$Y_0(\mu) = Y_{as}(0,\mu) + \int_0^\infty F(\eta,\mu)a(\eta)d\eta, \quad \mu > 0.$$

Воспользовавшись (1.4), после очевидных преобразований получим

$$\mu e^{-\mu^2}Q_1(\mu)Y_0(\mu) = \mu e^{-\mu^2}Q_1(\mu)Y_{as}(0,\mu) + \frac{1}{\sqrt{\pi}}\mu e^{-\mu^2}Q_1(\mu)Q(\mu)\int_0^\infty \frac{\eta a(\eta)}{\eta-\mu}d\eta + \Lambda(\mu)\mu a(\mu) \tag{3.2}$$

при $\mu > 0$. Введя новую вектор-функцию

$$A(z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty \frac{\eta a(\eta)}{\eta - z}d\eta \tag{3.3}$$

и применяя к ней и к дисперсионной матрице $\Lambda(z)$ формулы Сохоцкого–Племеля, перепишем (3.2) в виде

$$\Lambda^+(\mu)A^+(\mu) - \Lambda^-(\mu)A^-(\mu) + 2i\sqrt{\pi}\mu e^{-\mu^2}Q_1(\mu)Y_{as}(0,\mu) = 2i\sqrt{\pi}\mu e^{-\mu^2}Q_1(\mu)Y_0(\mu),$$

т. е.

$$\Lambda^+(\mu)[A^+(\mu) + Q^{-1}(\mu)Y_{as}(0,\mu)] - \Lambda^-(\mu)[A^-(\mu) + Q^{-1}(\mu)Y_{as}(0,\mu)] = 2i\sqrt{\pi}\mu e^{-\mu^2}Q_1(\mu)Y_0(\mu)$$

при $\mu > 0$. Воспользовавшись результатами предыдущего параграфа, после очевидной подстановки получаем

$$\begin{aligned}[\Phi_0^+(\mu)]^T[A^+(\mu) + Q^{-1}(\mu)Y_{as}(0,\mu)] - [\Phi_0^-(\mu)]^T[A^-(\mu) + Q^{-1}(\mu)Y_{as}(0,\mu)] = \\ = 2i\sqrt{\pi}\mu e^{-\mu^2}[\Phi_0^-(\mu)]^T[\Lambda^-(\mu)]^{-1}Q_1(\mu)Y_0(\mu), \quad \mu > 0.\end{aligned} \tag{3.4}$$

Учитывая поведение на бесконечности матриц и векторов, входящих в краевое условие (3.4), можем записать общее решение неоднородной задачи

$$A(z) = -Q^{-1}(z)Y_{as}(0,z) + \Phi_0^{-T}(z)\left[\Delta(z) + \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix}\right], \quad \mu > 0. \tag{3.5}$$

Здесь $\Delta(z)$ записывается как интеграл типа Коши:

$$\Delta(z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^\infty \mu e^{-\mu^2}[\Phi_0^-(\mu)]^T[\Lambda^-(\mu)]^{-1}Q_1(\mu)Y_0(\mu)\frac{d\mu}{\mu - z}.$$

Вычислим первое слагаемое в формуле (3.5)

$$Q^{-1}(z)Y_{as}(x,z) = (A_0 + A_1 z)\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} + \frac{A_2}{\gamma}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} + A_3 z\begin{bmatrix}-1/\gamma\\1\end{bmatrix}. \tag{3.6}$$

Построив матрицу, обратную к найденной полиномиальной, можем записать

$$\Phi_0^{-T}(z) = \frac{1}{c_{11}c_{22}} X^{-T}(z)\Xi(z), \tag{3.7}$$

где матрица $\Xi(z) = \begin{bmatrix} -\delta(a_{12}+b_{12}z)+c_{22}p_0 z^2 & \delta(a_{11}+b_{11}z) \\ -a_{12}-b_{12}z-c_{12}p_0 z^2 & a_{11}+b_{11}z+c_{11}q_0 z^2 \end{bmatrix}$.

Разложим в ряд Лорана функции $A(z)$, $B(z)$, $R(z)$, $U_1(z)$, $U_2(z)$ в окрестности бесконечно удаленной точки:

$$\frac{1}{U_1(z)} = \frac{1}{p_0} + p_{-1}\frac{1}{z} + \cdots, \quad \frac{1}{U_2(z)} = \frac{1}{q_0} + q_{-1}\frac{1}{z} + \cdots, \quad |z| \to \infty;$$

здесь $q_0 = e^{B_{-2}-R_{-2}}$, $q_0 q_{-1} = e^{-A_{-1}-B_{-3}+R_{-3}}$, $p_0 = e^{-B_{-2}+R_{-2}}$, $q_0 q_{-1} = e^{-A_{-1}+B_{-3}-R_{-3}}$, где A_k, B_k, R_k — соответствующие коэффициенты разложения в ряд Лорана функций $A(z)$, $B(z)$ и $R(z)$. Используя формулы (3.6) и (3.7), выпишем лорановское разложение в окрестности точки $z = \infty$ правой части равенства (3.5). Приравнивая к нулю коэффициенты при z и z^2 в верхней и нижней строках, как результат получим

$$C_1 = -\frac{c_{11}}{\gamma}A_3, \quad C_2 = c_{22}A_1,$$

т. е.

$$C_1 = -\frac{\sqrt{7}}{2}A_3, \quad C_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}A_1; \tag{3.8}$$

$$A_0 = A_1\Big[\mu_1 + q_0 q_{-1} + \frac{b_{11}}{c_{11}}(p_0(1+\delta\gamma) - q_0\delta\gamma)\Big] + A_3\Big[\mu_1 + p_0 p_{-1} + \frac{b_{12}}{c_{12}}(p_0(1+\delta\gamma) - q_0\delta\gamma)\Big],$$

$$A_2 = A_1\frac{b_{11}}{c_{11}}q_0\delta\gamma - A_3\Big[\mu_1 + p_0 p_{-1} - \frac{b_{12}}{c_{12}}q_0\delta\Big]. \tag{3.9}$$

Здесь

$$q_0 = \exp\left[\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \frac{\tau b(\tau)}{r(\tau)}d\tau - \int_0^{\mu_1}\frac{\tau\, d\tau}{r(\tau)}\right], \quad p_0 = \exp\left[-\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \frac{\tau b(\tau)}{r(\tau)}d\tau + \int_0^{\mu_1}\frac{\tau\, d\tau}{r(\tau)}\right],$$

$$q_0 q_{-1} = \exp\left[-\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \Big(a(\tau) + \frac{\tau^2 b(\tau)}{r(\tau)}\Big)d\tau + \int_0^{\mu_1}\frac{\tau^2 d\tau}{r(\tau)}\right],$$

$$p_0 p_{-1} = \exp\left[\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \Big(-a(\tau) + \frac{\tau^2 b(\tau)}{r(\tau)}\Big)d\tau - \int_0^{\mu_1}\frac{\tau^2 d\tau}{r(\tau)}\right],$$

а b_{11}, b_{12} определяются по формулам (2.18). Коэффициенты непрерывного спектра разложения (3.1) также находятся однозначно на основании формул Сохоцкого для функции (3.3). □

Как следует из формулы (3.1), решение граничной задачи принадлежит классу $\mathfrak{R}$, введенному в конце § 1.

Замечание. Нетрудно заметить, что метод, описанный в данной статье, может быть естественным образом обобщен на классы уравнений, аналогичных (0.1), где ядро задается как матрица-функция с полиномиальными элементами, допускающая разделение переменных.

Литература

1. Латышев А.В. *Применение метода Кейза к решению линеаризованного кинетического БГК-уравнения в задаче о температурном скачке* // Прикл. матем. и механ. – 1990. – Т. 54. – Вып. 4. – С. 581–586.
2. Латышев А.В., Юшканов А.А. *Точное решение уравнения Больцмана с оператором столкновений в форме БГК в задаче о слабом испарении* // Матем. моделир. – 1990. – Т. 1. – № 6. – С. 53–64.
3. Latyshev A. V., Yushkanov A.A. *The temperature jump and slow evaporation in molecular gases* // J. of experimental and theoretical physics. – 1998. – V. 87. – № 3. – P. 518–526. In book: "Mathematical Models of Non-Linear Excitations, Transfer, Dynamics and Control in Condensed Systems, and Other Media". – Kluwer Academic / Plenum Publishers. – New York. – 1999. – P. 3–16.
4. Черчиньяни К. *Теория и приложения уравнения Больцмана.* – М.: Мир, 1978. – 496 с.
5. Smoluchowski V. *Über Wärmeleitung in verdünnten Gasen* // Ann. Phys. Chem. – 1898. – V. 64. – P. 101.
6. Мусхелишвили Н.И. *Сингулярные интегральные уравнения.* – 3-е изд. – М.: Наука, 1968. – 512 с.
7. Кейз К., Цвайфель П. *Линейная теория переноса.* – М.: Мир, 1972. – 384 с.
8. Гахов Ф.Д. *Краевые задачи.* – 3-е изд. – М.: Наука, 1977. – 640 с.

Российский государственный педагогический университет

Поступила 28.06.2001