ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1998 МАТЕМАТИКА № 2 (429)

УДК 517.958:539.3

В.А. КРЫСЬКО, В.Н. КУЗНЕЦОВ, С.В. ПОЛЯКОВА

ОПЕРАТОРНЫЙ ПОДХОД В ГЕОМЕТРИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧЕ СТАТИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ПЛАСТИН И ОБОЛОЧЕК

Введение

В данной работе рассматривается задача определения допустимых значений проекций на оси функции напряжений $\sigma_x(x,y)$, $\sigma_y(x,y)$, $\tau_{xy}(x,y)$, действующих в серединной поверхности оболочки, при которой нелинейная система уравнений Маргерра-Власова-Муштари, а также система уравнений Тимошенко имеет единственное (устойчивое) решение.

Одним из распространенных приемов решения задачи устойчивости пластин и оболочек на базе нелинейной модели является применение и реализация на ЭВМ численных методов (напр., [1]–[3]). В отдельных случаях (напр., [3]–[5]) задача решается путем выбора аппроксимирующих решений соответствующих уравнений.

Авторы для решения данной задачи предлагают так называемый операторный подход, который сводит задачу устойчивости к задаче определения области параметров, при которых линейный оператор, связанный определенным образом с системой уравнений Маргерра-Власова-Муштари или с системой уравнений Тимошенко, является положительно определенным.

1. Основные положения операторного подхода в задаче устойчивости пластин и оболочек

Для удобства дальнейшего чтения кратко опишем основные положения операторного подхода, которые на примерах конкретных моделей будут подробно рассматриваться в следующих параграфах.

Запишем систему уравнений Маргерра-Власова-Муштари или систему уравнений Тимошенко в операторной форме

$$A\overline{u} = \overline{f}, \tag{1.1}$$

где $\overline{u}$, $\overline{f}$ — элементы гильбертова пространства, выделяемого в пространстве $L_2(\Omega) \times L_2(\Omega)$ граничными условиями. В качестве параметров нелинейного оператора A выступают значения функций $\sigma_x(x,y)$, $\sigma_y(x,y)$, $\tau_{xy}(x,y)$, которые в свою очередь зависят от величин нагрузок. Задача заключается в определении тех значений параметров, при которых уравнение (1.1) имеет единственное решение.

Известно [6], что единственность решения уравнения (1.1) связана со свойством положительной монотонности оператора A. А именно, если оператор A положительно монотонный, т.е. для любых $\overline{u}_1$, $\overline{u}_2$ выполняется неравенство $(A\overline{u}_1 - A\overline{u}_2,\ \overline{u}_1 - \overline{u}_2) \geq c\|\overline{u}_1 - \overline{u}_2\|^2$, то уравнение (1.1) имеет не более одного решения. Тем самым задача устойчивости сводится к нахождению области допустимых значений параметров, при которых оператор A уравнения (1.1) является положительно монотонным. Как будет показано ниже, эта задача в нашем случае сводится к задаче определения области допустимых значений параметров, при которых линейный оператор A_1, определенным образом связанный с оператором A, является положительно определенным в пространстве $\mu_0^2(\Omega)$, которое выделяется в пространстве $L_2(\Omega)$ однородными граничными условиями.

2. Применение операторного подхода в задаче устойчивости пластин и оболочек на базе модели Маргерра-Власова-Муштари

Запишем важную в теории оболочек модель Маргерра-Власова-Муштари [3] в операторной форме

$$A\overline{u} = (q, 0), \tag{2.1}$$

причем

$$A\overline{u} = \begin{cases} \frac{D}{h}\Delta^2 w - L(w, F) - \Delta_k F, \\ \frac{1}{E}\Delta^2 F + \frac{1}{2}L(w, w) + \Delta_k w, \end{cases} \tag{2.2}$$

для $\overline{u} = (W, F) \in H$, а гильбертово пространство H выделяется в пространстве $L_2(\Omega) \times L_2(\Omega)$ граничными условиями вида

$$w|_\Gamma = \varphi_0, \quad \frac{\partial w}{\partial \eta}\Big|_\Gamma = \varphi_1, \quad F|_\Gamma = F_0, \quad \frac{\partial F}{\partial \eta}\Big|_\Gamma = F_1, \tag{2.3}$$

где Γ — граница области Ω.

Замечание 1. Геометрически нелинейную модель оболочки, определяемую операторным уравнением (2.1), часто в литературе (напр., [3]) называют моделью Кармана. Но основы геометрически нелинейной теории оболочек были заложены в [7], и свое завершение эта теория нашла в [8], [9]. Потому справедливости ради эту модель может быть следует называть моделью Маргерра-Власова-Муштари, именно такого названия модели авторы придерживаются в данной статье.

Замечание 2. Вопросы существования решений в различных банаховых пространствах для систем, подобных нашей, хорошо изучены (напр., [10], [11]). Поэтому будем считать, что граничные условия и функция q таковы, что модель Маргерра-Власова-Муштари имеет решение в пространстве $L_2(\Omega) \times L_2(\Omega)$.

Напомним хорошо известный факт [6].

Лемма 2.1. *Если оператор A вида (2.2) является положительно монотонным на множестве решений системы уравнений Маргерра-Власова-Муштари с граничными условиями (2.3), то эта система уравнений имеет единственное решение.*

Далее, рассмотрим линейный оператор A_1, действующий в пространстве

$$H_0^2(\Omega) = \left\{ w \in L_2(\Omega);\ w|_\Gamma = \frac{\partial w}{\partial \eta}\Big|_\Gamma = 0 \right\}$$

следующим образом:

$$A_1 w = \frac{D}{h}\Delta^2 w + \sigma_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \sigma_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2\tau_{xy}\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \tag{2.4}$$

где σ_x, σ_y, τ_{xy} — проекции на оси функции напряжений, действующих в серединной поверхности оболочки в результате действия нагрузок.

Справедлива

Теорема 2.1. *Пусть значения функций σ_x, σ_y, τ_{xy} таковы, что линейный оператор A_1 является положительно определенным. Тогда оператор A вида (2.2) является положительно монотонным на множестве решений модели Маргерра-Власова-Муштари.*

Доказательство. Нелинейное слагаемое оператора A вида (2.2) обозначим через B. Тогда оператор B определяется следующим образом:

$$B\overline{u} = \begin{cases} -L(w, F), \\ \frac{1}{2}L(w, w). \end{cases}$$

Пусть $\overline{u}_1$ и $\overline{u}_2$ — два решения модели Маргерра-Власова-Муштари: $\overline{u}_1 = (w_1, F_1)$, $\overline{u}_2 = (w_2, F_2)$. Обозначим $v_1 = w_1 - w_2$, $v_2 = F_1 - F_2$. Тогда легко получается тождество

$$B\overline{u}_1 - B\overline{u}_2 = \begin{cases} -L(w_1, v_2) - L(v_1, F_2), \\ \frac{1}{2}L(v_1, v_1) + L(w_1, v_1). \end{cases} \tag{2.5}$$

Для функций усилий F_1, F_2 имеем [3]

$$\frac{\partial^2 F_1}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 F_2}{\partial x^2} = -\sigma_y; \quad \frac{\partial^2 F_1}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 F_2}{\partial y^2} = -\sigma_x; \quad \frac{\partial^2 F_1}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 F_2}{\partial x \partial y} = \tau_{xy}. \tag{2.6}$$

Отсюда

$$\frac{\partial^2 v_2}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v_2}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 v_2}{\partial x \partial y} = 0 \tag{2.7}$$

и, следовательно,

$$L(w_1, w_2) = 0. \tag{2.8}$$

Рассмотрим оператор T, действующий в пространстве $H_0^2(\Omega)$,

$$Tv = T_x \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + 2T_{xy}\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + T_y \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}. \tag{2.9}$$

Как показано в [12], при выполнении условий

$$\frac{\partial T_x}{\partial x} + \frac{\partial T_{xy}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial T_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial T_y}{\partial y} = 0 \tag{2.10}$$

имеет место равенство

$$(Tv_1, v_2) = (v_1, Tv_2). \tag{2.11}$$

Преобразуем скалярное произведение (с учетом (2.5))

$$(B\overline{u}_1 - B\overline{u}_2, \overline{u}_1 - \overline{u}_2) = -(L(w_1, v_2), v_1) - (L(v_1, F_2), v_1) + \frac{1}{2}(L(v_1, v_1), v_2) + (L(w_1, v_1), v_2). \tag{2.12}$$

Если на выражение $L(w, v)$ смотреть как на оператор вида (2.3), то легко проверить выполнение условий (2.10). Тогда в силу условий (2.1) и (2.7) получим

$$(L(w_1, v_1), v_2) + (L(v_1, v_1), v_2) = 0, \tag{2.13}$$

а в силу (2.6)

$$-L(v_1, F_2) = \sigma_x \frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2} + \sigma_y \frac{\partial^2 v_1}{\partial y^2} + 2\tau_{xy}\frac{\partial^2 v_1}{\partial x \partial y}. \tag{2.14}$$

Используя (2.8), (2.13), (2.14), запишем выражение (2.12) в виде

$$(B\overline{u}_1 - B\overline{u}_2,\ \overline{u}_1 - \overline{u}_2) = \left(\sigma_x \frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2} + \sigma_y \frac{\partial^2 v_1}{\partial y^2} + 2\tau_{xy}\frac{\partial^2 v_1}{\partial x \partial y},\ v_1\right). \tag{2.15}$$

Учитывая (2.15), получим для другого скалярного произведения выражение

$$(A\overline{u}_1 - A\overline{u}_2,\ \overline{u}_1 - \overline{u}_2) = \Bigg(\Bigg[\frac{D}{h}\Delta^2 v_1 - \Delta_k v_2 + \sigma_x \frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2} + \\ + \sigma_y \frac{\partial^2 v_1}{\partial y^2} + 2\tau_{xy}\frac{\partial^2 v_1}{\partial x \partial y}\Bigg],\ v_1\Bigg) + \frac{1}{E}(\Delta^2 v_2, v_2) + (\Delta_k v_1, v_2). \quad (2.16)$$

Воспользуемся формулой Грина для операторов Δ и Δ_k (напр., [12]) и получим два соотношения:

$$(\Delta^2 v_1, v_1) = \iint_\Omega \Delta^2 v_1 \cdot v_1 d\Omega = \iint_\Omega \Delta v_1 \cdot \Delta v_1 d\Omega + \int_\Gamma \left(v_1 \frac{\partial \Delta v_1}{\partial \eta} - \Delta v_1 \frac{\partial \Delta v_1}{\partial \eta}\right) ds = \\ = \iint_\Omega \Delta v_1 \cdot \Delta v_1 d\Omega = (\Delta v_1, \Delta v_1), \quad (2.17)$$

$$(\Delta_k v_2, v_1) = \iint_\Omega \Delta_k v_2 \cdot v_1 d\Omega = \iint_\Omega v_2 \Delta_k v_1 d\Omega + \int_\Gamma \left(v_1 \frac{\partial v_2}{\partial \eta} - v_2 \frac{\partial v_1}{\partial \eta}\right) ds = \\ = \iint_\Omega v_2 \Delta_k v_1 d\Omega = (v_2, \Delta_k v_1). \quad (2.18)$$

Учитывая (2.17), (2.18), для (2.16) будем иметь

$$(A\overline{u}_1 - A\overline{u}_2,\ \overline{u}_1 - \overline{u}_2) = (A_1 v_1, v_1) + \frac{1}{E}(\Delta^2 v_2, v_2).$$

Воспользуемся условием теоремы и тем фактом, что оператор Δ^2 является положительно определенным в пространстве $H_0^2(\Omega)$ (напр., [12]). Тогда окончательно получим

$$(A\overline{u}_1 - A\overline{u}_2,\ \overline{u}_1 - \overline{u}_2) \geq c_1\|v_1\|^2 + c_2\|v_2\|^2 \geq c\|\overline{u}_1 - \overline{u}_2\|^2,$$

что и завершит доказательство теоремы 2.1.

Как следствие теоремы 2.1 и леммы 2.1 получается

Теорема 2.2. *Пусть допустимые значения функций $\sigma_x(x,y)$, $\sigma_y(x,y)$, $\tau_{xy}(x,y)$ таковы, что линейный оператор A_1, действующий в пространстве $H_0^2(\Omega)$, является положительно определенным. Тогда модель Маргерра-Власова-Муштари имеет единственное (устойчивое) решение.*

Отметим, что задача определения области допустимых значений функций $\sigma_x(x,y)$, $\sigma_y(x,y)$, $\tau_{xy}(x,y)$, при которых оператор A_1 является положительно определенным, рассматривалась в [12], где доказана

Теорема 2.3. *Пусть функции $\sigma_x(x,y)$, $\sigma_y(x,y)$, $\tau_{xy}(x,y)$ удовлетворяют условиям*

$$\|\sigma_x\| < \frac{CD}{2h}, \quad \|\sigma_y\| < \frac{CD}{2h}, \quad \|\tau_{xy}\| < \frac{CD}{2h}, \quad (2.19)$$

где C — наибольшая из констант в неравенстве Фридрихса: для $w \in H_0^2(\Omega)$

$$(\Delta^2 w, w) \geq C \iint_\Omega \left\{\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2\right\} dx\, dy.$$

Тогда оператор A_1 является положительно определенным.

Отметим, что оценки (2.19) достаточно грубы. Задача более точного описания области положительной определенности оператора A_1 сводится к случаю, когда $\sigma_x(x,y)$, $\sigma_y(x,y)$, $\tau_{xy}(x,y)$ — постоянные функции. В этой ситуации при наличии полной ортонормированной системы собственных функций оператора A_1 удается получить точное описание области положительной определенности этого оператора. С этой целью докажем следующую лемму.

Лемма 2.2. *Если линейный симметричный оператор A имеет полную ортонормированную систему $\{U_n\}$ в качестве системы собственных функций с собственными значениями $\{\lambda_n\}$ и $\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_n < \cdots$, то оператор A является положительно определенным тогда и только тогда, когда $\lambda_1 > 0$.*

Доказательство. Известно [12], что все собственные значения положительно определенного оператора A являются положительными.

Обратно (в предположении положительности собственных значений λ_n, $n = 1, 2, \dots$) имеем для

$$u = \sum_1^\infty (u, u_n) u_n$$

соотношение

$$Au = \sum_1^\infty (Au, u_n) u_n = \sum_1^\infty (u, Au_n) u_n = \sum_1^\infty \lambda_n (u, u_n) u_n,$$

откуда

$$(Au, u) = \sum_1^\infty \lambda_n (u, u_n)^2 \geq \lambda_1 \sum_1^\infty (u, u_n)^2 = \lambda_1 \|u\|^2. \quad \square$$

Как следствие леммы 2.2 получается

Лемма 2.3. *Пусть оба линейных положительно определенных оператора A_1 и A_2 имеют одну и ту же полную ортонормированную систему функций $\{u_n\}$ в качестве системы собственных функций с собственными значениями $\{\lambda_n^i\}$, $i = 1, 2$, причем*

$$0 < \lambda_1^1/\lambda_1^2 \leq \cdots \leq \lambda_n^1/\lambda_n^2 \leq \cdots \tag{2.20}$$

и

$$0 < \lambda_1^1 - \lambda_1^2 < \cdots < \lambda_n^1 - \lambda_n^2 < \cdots \tag{2.21}$$

Тогда область положительной определенности оператора

$$A = A_1 - \lambda A_2 \tag{2.22}$$

совпадает с множеством

$$\lambda < \lambda_1^1/\lambda_1^2.$$

Доказательство. Легко видеть, что при условиях леммы 2.3 система $\{u_n\}$ будет системой собственных функций оператора A вида (2.22) с собственными значениями $\lambda_n = \lambda_n^1 - \lambda\lambda_n^2$. В силу (2.20) и (2.21) для собственных значений λ_n выполняются условия леммы 2.2, что и завершает доказательство леммы 2.3.

Замечание. Результат леммы 2.2 позволяет описать область положительной определенности оператора

$$A = A_0 - \lambda A_1 - \mu A_2 - \eta A_3,$$

где A_0, A_1, A_2, A_3 — положительно определенные операторы, а λ, μ, η — числовые параметры.

3. Применение операторного подхода в задаче устойчивости пластин и оболочек на базе модели Тимошенко

Модель Тимошенко является уточнением модели Маргерра-Власова-Муштари, записанной в перемещениях: наряду с функциями u, v, w рассматриваются еще уточняющие функции ψ_x, ψ_y. Вывод уравнений Тимошенко приводится в [5] и там же рассматривается подстановка

$$\psi_x = -\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\theta}{\partial y}\right), \quad \psi_y = \frac{\partial\theta}{\partial x} - \frac{\partial\varphi}{\partial y},$$

которая позволяет систему уравнений Тимошенко привести к более простому виду относительно функций u, v, w, θ, φ. В этом случае систему уравнений Тимошенко удается записать в удобной для дальнейших исследований приведенной форме относительно функций w, F, θ, φ, где F — функция усилий. Запишем эту систему уравнений в операторной форме

$$A\overline{u} = (q, 0, 0, 0),$$

где оператор A действует в пространстве H, выделенном из $L_2(\Omega) \times L_2(\Omega) \times L_2(\Omega) \times L_2$ граничными условиями вида

$$w|_\Gamma = w_1, \quad F|_\Gamma = F_1, \quad \frac{\partial F}{\partial\eta}\Big|_\Gamma = F_2, \quad \theta|_\Gamma = \theta_1, \quad \varphi|_\Gamma = \varphi_1, \tag{3.1}$$

следующим образом: для $\overline{u} = (w, F, \theta, \varphi) \in H$

$$A\overline{u} = \begin{cases} -\Delta w - \frac{2}{k_0^2(1-\mu)}L(w,F) - \frac{2}{k_0^2(1-\mu)}\Delta_k F - \frac{6k_0^2(1-\mu)}{h^2}(w-\varphi), \\ \frac{2}{k_0^2(1-\mu)}\Delta^2 F + \frac{1}{k_0^2(1-\mu)}L(w,w) + \frac{2}{k_0^2(1-\mu)}\Delta_k w, \\ -\Delta\theta + \frac{12k_0^2}{h^2}\theta, \\ -\Delta\varphi - \frac{6k_0^2(1-\mu)}{h^2}(w-\varphi). \end{cases} \tag{3.2}$$

Повторяя рассуждения, приведенные при доказательстве теоремы 2.1 и теоремы 2.2 из § 2, получим два утверждения.

Теорема 3.1. *Пусть допустимые значения функций $\sigma_x(x,y)$, $\sigma_y(x,y)$, $\tau_{xy}(x,y)$ таковы, что линейный оператор A_1, действующий в пространстве $H_0^2(\Omega) = \{w \in L_2(\Omega);\ w|_\Gamma = 0\}$,*

$$A_1 w = -\Delta w - \frac{6k_0^2(1-\mu)}{h^2}w + \frac{1}{k_0^2(1-\mu)}\left(\sigma_x\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \sigma_y\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2\tau_{xy}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right),$$

является положительно определенным. Тогда оператор A вида (3.2) *является положительно монотонным на множестве решений модели Тимошенко.*

Теорема 3.2. *В условиях теоремы* 3.1 *система уравнений Тимошенко при граничных условиях* (3.1) *имеет единственное* (*устойчивое*) *решение.*

В заключение отметим, что в данной работе рассматривались модели изотропных оболочек, что является несущественным с точки зрения применения операторного подхода. Кроме того, можно получить условия на функцию усилий F, при которых соответствующая модель имеет единственное решение.

Литература

1. Григолюк Э.И., Кабанов В.В. *Устойчивость оболочек.* – М.: Наука, 1978. – 360 с.
2. Крысько В.А. *Нелинейная статика и динамика неоднородных оболочек.* – Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1976. – 212 с.
3. Вольмир А.С. *Устойчивость деформируемых систем.* - М.: Наука, 1967. – 984 с.
4. Вольмир А.С. *Гибкие пластины и оболочки.* – М.: Гостехиздат, 1949. – 784 с.
5. Вольмир А.С. *Нелинейная динамика пластин и оболочек.* – М.: Наука, 1972. – 437 с.

6. Лионс Ж.-Л. *Некоторые методы решения нелинейных краевых задач.* – М.: Мир, 1972. – 588 с.
7. Marguerre K. *Theorie der gekrümmten Platte grosser Formänderung* // Luftfahrforschung (Berlin). – 1939. – Bd. 1. – S. 413–426.
8. Власов В.З. *Основы дифференциальных уравнений общей теории оболочек* // ПММ. – 1944. – Т. 8. – № 2. – С. 109–140.
9. Муштари Х.М., Галимов К.З. *Нелинейная теория упругих оболочек.* – Казань: Таткнигоиздат, 1957.
10. Ворович И.И. *О существовании решений в нелинейной теории оболочек* // Изв. АН СССР. Сер. матем. – 1955. – Т. 19. – № 4. – С. 173–186.
11. Морозов Н.Ф. *О нелинейных колебаниях тонких пластин с учетом инерции вращения* // ДАН СССР. – 1967. – Т. 176. – № 3 – С. 522–525.
12. Михлин С.Г. *Вариационные методы в математической физике.* – 2-е изд. – М.: Наука, 1970. – 512 с.

Саратовский технический университет

Поступила 13.03.1995