ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2002 МАТЕМАТИКА № 7 (482)

УДК 512.7:514.7

К.К. МУМИНОВ

ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ ПУТЕЙ ОТНОСИТЕЛЬНО ДЕЙСТВИЯ СИМПЛЕКТИЧЕСКОЙ ГРУППЫ

Введение

Пусть V — неприводимое аффинное алгебраическое многообразие, G — алгебраическая группа, регулярно действующая на V, $\{x_i\}$ и $\{y_i\}$ — две конечные системы точек в V, $i = \overline{1,n}$. Одной из важных задач теории инвариантов является нахождение условий, при которых системы $\{x_i\}$ и $\{y_i\}$ G-эквивалентны (т. е. $y_i = x_i g$, $i = \overline{1,n}$, для некоторого $g \in G$). В [1]–[3] указывается способ решения этой задачи, для реализация которого необходимо

a) установление конечной порождаемости кольца G-инвариантных многочленов систем конечного числа точек;

b) описание рационального базиса поля G-инвариантных рациональных функций систем конечного числа точек и базисных соотношений между ними.

Решение задач a) и b) позволяет описывать условия для G-эквивалентности систем конечного числа точек в терминах G-инвариантных рациональных функций.

Аналогичная ситуация возникает и при рассмотрении следующей важной задачи дифференциальной геометрии кривых. Пусть V — гладкое многообразие, G — группа Ли, гладко действующая на V, x и y — две гладкие кривые в V. Необходимо найти условия, обеспечивающие G-эквивалентность кривых x, y. Эта задача в более общей постановке (для пары подмногообразий) была поставлена Э. Картаном в начале XX века и известна в настоящее время как проблема эквивалентности Картана. Глубокое исследование этой проблемы методом подвижного репера проведено самим Э. Картаном [4].

Развитие методов теории инвариантов позволяет активно использовать их в решении указанной задачи дифференциальной геометрии как для пары кривых, так и для конечных систем кривых. Для этой цели рассматриваются и изучаются дифференциальные поля всех дифференциальных G-инвариантных рациональных функций конечной системы кривых и для них решаются задачи типа a) и b). Этот подход рассматривался в работах [5], [6] для действия некоторых специальных групп и подробно обсуждался в [7]. В данной работе решаются аналогичные задачи для действия симплектической группы (часть результатов этой работы была анонсирована в [8]).

Далее используются терминология и обозначения из [1], [7], [9], [10].

1. Эквивалентность путей для действия симплектической группы

Пусть $V = C^{2n}$ — $2n$-мерное векторное пространство над полем комплексных чисел C. Элементы из V представляем в виде $2n$-мерных вектор-строк. Пусть $GL(2n, C)$ — группа всех обратимых линейных преобразований V, а $G = \mathrm{Sp}(2n, C) = \{g \in GL(2n, C) : gIg^T = g^TIg = I\}$

— ее симлектическая подгруппа, где

$$I=\begin{bmatrix}0 & 1 & \dots & 0 & 0\\ -1 & 0 & \dots & 0 & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1\\ 0 & 0 & \dots & -1 & 0\end{bmatrix}.$$

Рассмотрим правое действие $(g,x)\to xg$ группы G в V, т. е. обычное умножение строки на матрицу.

Путем $x(t)$, $t\in(0,1)$, назовем бесконечно дифференцируемое отображение x интервала $(0,1)$ в V.

Два пути $x(t)$ и $y(t)$ называются G-эквивалентными, если существует такой элемент $g\in G$, что $x(t)g=y(t)$ для любого $t\in(0,1)$.

Функция f от $x(t)$ и конечного числа ее производных называется G-инвариантной, если ее значения для G-эквивалентных путей совпадают.

Если $x=(x_1,x_2,\dots,x_{2n})$, $y=(y_1,y_2,\dots,y_{2n})$ — произвольные элементы из V то xIy обозначим через $[x,y]$, т. е. $[x,y]=x_1y_2-x_2y_1+x_3y_4-x_4y_3+\dots+x_{2n-1}y_{2n}-x_{2n}y_{2n-1}$ — кососимметрическое произведение векторов x, y.

В теории инвариантов при изучении G-эквивалентности конечных множеств точек важную роль играют понятия G-инвариантного многочлена и G-инвариантной рациональной функции от координат точек. Аналогичные понятия вводятся и в случае, когда координаты векторов из V являются бесконечно дифференцируемыми функциями.

Рассмотрим множество всех путей в V, т. е. множество векторов $x(t)=(x_1(t),\dots,x_{2n}(t))$, где $x_i(t)$ являются бесконечно дифференцируемыми функциями на интервале $(0;1)$, $i=1,\dots,2n$. Производной r-го порядка от пути $x(t)$ назовем вектор $\overset{(r)}{x}(t)=(\overset{(r)}{x}_1(t),\dots,\overset{(r)}{x}_{2n}(t))$.

Для каждого пути $x(t)$ можно рассмотреть $2n\times 2n$-матрицу $M(x)$, в которой r-строкой служат координаты вектора $\overset{(r-1)}{x}$. Определитель матрицы $M(x)$ будем записывать в виде $[x,x',x'',\dots,\overset{(2n-1)}{x}]$. В дальнейшем будут рассматриваться только регулярные пути, т. е. такие пути $x(t)$, для которых $[x,x',x'',\dots,\overset{(2n-1)}{x}](t)\neq 0$ при всех $t\in(0,1)$. Заметим, что два пути $x(t)$ и $y(t)$ являются G-эквивалентными в том и только том случае, когда $M(y)=M(x)g$ для некоторого $g\in G$.

Рассмотрим кольцо $C\{x\}=C\{x_1,\dots,x_{2n}\}$ всех многочленов от счетного числа переменных $x_1,\dots,x_{2n},x'_1,\dots,x'_{2n},\dots,\overset{(r)}{x}_1,\dots,\overset{(r)}{x}_{2n},\dots$, и положим $d(\overset{(r)}{x}_i)=\overset{(r+1)}{x}_i$. Ясно, что d можно однозначно продолжить до дифференцирования в кольце $C\{x\}$, наделяя это кольцо структурой дифференциального кольца (d-кольца) [10]. Элементы этого d-кольца называются d-многочленами (дифференциальными многочленами). Известно [10], что дифференцирование d на $C\{x\}$ единственным образом продолжается до дифференцирования на соответствующее поле отношений. Это поле будем называть d-полем (или дифференциальным полем) и обозначать через $C\langle x\rangle=C\langle x_1,\dots,x_{2n}\rangle$, а его элементы будем называть d-рациональными функциями и будем записывать в виде $f\langle x\rangle=f\langle x_1,\dots,x_{2n}\rangle$, где $x=(x_1,\dots,x_{2n})$ — $2n$-мерный d-переменный вектор.

Действие группы G на $2n$-мерный d-переменный вектор x ([7], с. 21) и его производные $\overset{(r)}{x}$ определим как умножение $\overset{(r)}{x}$ справа на матрицу $g\in G$: $\overset{(r)}{x}g$, где $r\in N\cup\{0\}=Z_0^+$.

d-рациональная функция $f\langle x\rangle$ называется G-инвариантной, если $f\langle xg\rangle=f\langle x\rangle$ при любом $g\in G$.

Известно, что множество всех G-инвариантных d-рациональных функций, обозначаемое через $C\langle x\rangle^G$, является дифференциальным полем относительно индуцированного дифференцирования из $C\langle x\rangle$ [3].

Дифференциальное кольцо всех G-инвариантных дифференциальных многочленов будем обозначать через $C\{x\}^G$.

Говорят, что система элементов $A = \{a_i,\ i \in T\}$ является системой образующих d-поля $C\langle x\rangle$ (d-кольца $C\{x\}$), если любой элемент $b \in C\langle x\rangle$ может быть получен из конечного числа элементов множества A применением конечного числа раз операций d-поля $C\langle x\rangle$ (d-кольца $C\{x\}$). В случае, когда в качестве системы образующих может быть выбрано конечное множество $A = \{a_1, \dots, a_m\}$, то говорят, что d-поле (d-кольцо) имеет конечное число образующих $a_1, \dots, a_m$. Элементы $a_1, \dots, a_m$ из $C\{x\}$ называются d-алгебраически зависимыми, если существует такой ненулевой многочлен $f \in C\{x\}$, что $f(a_1, \dots, a_m) = 0$. В противном случае система элементов $a_1, \dots, a_m$ называется d-алгебраически независимой.

Для d-переменных векторов x, y из V через $[x,y]'$ обозначим первую производную кососимметрического произведения $[x,y]$. Ясно, что $[x,y]' = [x',y] + [x,y']$.

Теорема 1. *В d-поле $C\langle x\rangle^G$ следующие d-многочлены являются его образующими*

$$f^{(m)}(x) = [\overset{(m-1)}{x}, \overset{(m)}{x}], \quad m = \overline{1, 2n}. \tag{1}$$

Эта система дифференциальных многочленов d-алгебраически независима, т. е. степень дифференциальной трансцендентности d-поля $C\langle x\rangle^G$ равна $2n$.

Доказательство. Известно, что любая G-инвариантная d-рациональная функция $f\langle x\rangle$ представляется в виде отношения G-инвариантных d-многочленов $Q_1\{x\}$ и $Q_2\{x\}$ ([2], гл. 1). Следовательно, для доказательства первой части теоремы достаточно доказать, что всякий G-инвариантный d-многочлен можно выразить d-рационально через d-многочлены вида (1).

В силу первой основной теоремы теории инвариантов для G ([1], гл. IV, с. 230) всякий G-инвариантный d-многочлен может быть выражен как многочлен от G-инвариантных d-многочленов вида $[\overset{(i)}{x}, \overset{(j)}{x}]$, где $i, j \in Z_0^+$.

Покажем, что всякий d-многочлен $[\overset{(i)}{x}, \overset{(j)}{x}]$, $i, j \in Z_0^+$, d-рационально выражается через d-многочлены (1).

Лемма 1. *Дифференциальные многочлены $[\overset{(k)}{x}, \overset{(k+1)}{x}]$, $k \in Z_0^+$, являются образующими дифференциального кольца $C\{x\}^G$, причем, если $r < k$, то $[\overset{(r)}{x}, \overset{(k+1)}{x}]$ выражается с помощью кольцевых операций и дифференцирования в $C\{x\}^G$ через $[\overset{(i)}{x}, \overset{(i+1)}{x}]$, $i < k$.*

Доказательство. Пусть W_m — векторное пространство, порожденное всеми d-многочленами вида $[\overset{(k)}{x}, \overset{(l)}{x}]$, где $k + l = m$. Ясно, что W_1 порождается одним элементом $[x, x']$, а W_2 порождается одним элементом $[x, x']' = [x, x'']$. Легко видеть, что размерности пространств W_{2k-1} и W_{2k} совпадают, и каждый элемент из W_k выражается цело d-рационально через элементы W_{2k-1}. Покажем, что любой элемент из W_{2k+1} выражается цело d-рационально через $[x, x'], \dots, [\overset{(k)}{x}, \overset{(k+1)}{x}]$. В силу индукции достаточно показать, что всякий элемент из W_{2k+1} выражается через элементы из W_{2k} и $[\overset{(k)}{x}, \overset{(k+1)}{x}]$. W_{2k+1} порождается элементами $[x, \overset{(2k+1)}{x}], [x', \overset{(2k)}{x}], \dots, [\overset{(k-1)}{x}, \overset{(k+2)}{x}], [\overset{(k)}{x}, \overset{(k+1)}{x}]$. Имеем $[\overset{(k-1)}{x}, \overset{(k+2)}{x}] = [\overset{(k-1)}{x}, \overset{(k+1)}{x}]' - [\overset{(k)}{x}, \overset{(k+1)}{x}]$. Далее $[\overset{(k-2)}{x}, \overset{(k+3)}{x}] = [\overset{(k-2)}{x}, \overset{(k+2)}{x}]' - [\overset{(k-1)}{x}, \overset{(k+2)}{x}] = [\overset{(k-2)}{x}, \overset{(k+2)}{x}]' - [\overset{(k-1)}{x}, \overset{(k+1)}{x}]' + [\overset{(k)}{x}, \overset{(k+1)}{x}]$.

Используя индукцию, получим, что любой элемент из W_{2k+1} выражается цело d-рационально через элементы W_{2k} и $[\overset{(k)}{x}, \overset{(k+1)}{x}]$.

Если $r < k$, то $[\overset{(r)}{x}, \overset{(k+1)}{x}]$ принадлежат W_m, где $m < 2k + 1$, и поэтому выражаются через $[\overset{(i)}{x}, \overset{(i+1)}{x}]$, $i < k$. $\square$

Лемма 2 ([1], гл. VI, с. 232). *Для любых* $2n+2$ *векторов* $x_0, y_0, x_1, x_2, \dots, x_{2n-1}, x_{2n}$ *в* V *имеет место следующее тождество*:

$$\sum \pm [x_0, y_0][x_1, x_2] \dots [x_{2n-1}, x_{2n}] = 0, \qquad (2)$$

где сумма $\sum$ *распространяется знакопеременно на все перестановки* $2n+1$ *векторов* $x_0, x_1, x_2, \dots, x_{2n-1}, x_{2n}$.

Покажем теперь, что d-многочлены (1) являются образующими d-поля $C\langle x\rangle^G$. В силу леммы 1 достаточно доказать, что $[\overset{(i)}{x}, \overset{(i+1)}{x}]$ d-рационально выражается через d-многочлены (1).

Индукцией по i покажем, что $[\overset{(i)}{x}, \overset{(i+1)}{x}]$ выражается через d-многочлены (1). При $0 \le i \le 2n$ это очевидно. Предполагая, что утверждение верно при i, докажем его справедливость для $i+1$, где $i \ge 2n$. Учитывая доказанную лемму 1 и написав тождество (2) для векторов $x, x', x'', \dots, \overset{(2n-1)}{x}, \overset{(i)}{x}, \overset{(i+1)}{x}$, получим, что в левой части этого тождества все множители, кроме $[\overset{(i)}{x}, \overset{(i+1)}{x}]$, выражаются через d-многочлены (1).

Покажем теперь, что система d-многочленов (1) является d-алгебраически независимой.

Для доказательства воспользуемся следующей известной теоремой, которая в более общей форме доказана в ([9], теорема 4, с. 105).

Теорема А. *Пусть* F, B *и* A — *дифференциальные поля характеристики нуль, причем* $F \subset B \subset A$. *Если* Δ_1 — *любой базис дифференциальной трансцендентности* B *над* F *и* Δ_2 — *любой базис дифференциальной трансцендентности* A *над* B, *то* $\Delta_1 \cap \Delta_2 = \emptyset$ *и* $\Delta_1 \cup \Delta_2$ *есть базис дифференциальной трансцендентности* A *над* F.

Ввиду того, что алгебраическая размерность (степень d-трансцендентности) d-поля $C\langle x\rangle$ над полем C есть $2n$ и $C \subset C\langle x\rangle^G \subset C\langle x\rangle$, в силу теоремы А достаточно показать, что степень d-трансцендентности d-поля $C\langle x\rangle$ над d-полем $C\langle x\rangle^G$ есть нуль, т. е. каждая координата d-переменного вектора x является d-алгебраичной над d-полем $C\langle x\rangle^G$.

Покажем сначала, что x_1 d-алгебраичен над $C\langle x\rangle^G$. Если для векторов $x_0, x, x', x'', \dots, \overset{(2n-1)}{x}, \overset{(2n)}{x}$, где $x = (x_1, x_2, \dots, x_{2n})$, $x_0 = (0, 1, 0, \dots, 0)$, напишем тождество (2), то получим

$$\sum \pm [x_0, x][x', x''] \dots [\overset{(2n-1)}{x}, \overset{(2n)}{x}] = \sum \mp x_1 [x', x''] \dots [\overset{(2n-1)}{x}, \overset{(2n)}{x}] = 0,$$

что и означает дифференциальную алгебраичность x_1 над $C\langle x\rangle^G$ (коэффициентом перед $\overset{(2n)}{x_1}$ будет определитель $[x, x', x'', \dots, \overset{(2n-1)}{x}]$, который в силу регулярности пути $x(t)$ отличен от нуля). Аналогично координаты $x_2, \dots, x_{2n}$ d-алгебраичны над $C\langle x\rangle^G$. Теорема 1 доказана.

Теорема 2. *Два пути* $x(t)$ *и* $y(t)$ *являются* G-*эквивалентными тогда и только тогда, когда* $[\overset{(m-1)}{x}, \overset{(m)}{x}](t) = [\overset{(m-1)}{y}, \overset{(m)}{y}](t)$ *для всех* $t \in (0,1)$ *и* $m = \overline{1, 2n}$.

Для доказательства теоремы понадобятся следующие две леммы.

Лемма 3. *Два пути* x, y G-*эквивалентны тогда и только тогда, когда выполнены следующие равенства*:

1) $M'(x)(M(x))^{-1} = M'(y)(M(y))^{-1}$,
2) $M(x)IM^T(x) = M(y)IM^T(y)$.

Доказательство. Пусть $x(t)$ и $y(t)$ G-эквивалентны, т. е. существует такое $g \in G$, что $y(t) = x(t)g$. Тогда справедливость соотношений 1), 2) легко проверяется, например,

$$M'(y)(M(y))^{-1} = M'(x)g(M(x)g)^{-1} = M'(x)gg^{-1}(M(x))^{-1} = M'(x)(M(x))^{-1}.$$

Обратно, пусть для путей $x(t)$, $y(t)$ выполняются соотношения 1), 2). Если $A = A(t)$ — обратимая матрица, то, очевидно, $(A^{-1})' = -A^{-1}A'A^{-1}$. Используя, это равенство, нетрудно убедиться, что соотношения 1), 2) могут быть переписаны в виде:

1′) $((M(x))^{-1}M(y))' = 0$,

2′) $(M(x))^{-1}M(y)I((M(x))^{-1}M(y))^T = I$

соответственно. Но эти равенства означают, что $(M(x))^{-1}M(y) = g \in \mathrm{Sp}(2n, C)$, т. е. $M(y) = M(x)g$. Отсюда получим требуемое равенство $y(t) = x(t)g$.

Лемма 4. *Матрицы-функции $M'(x)(M(x))^{-1}$, $M(x)IM^T(x)$ имеют следующий вид*:

$$M'(x)(M(x))^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ a_{2n}(t) & a_{2n-1}(t) & a_{2n-2}(t) & \dots & a_1(t) \end{pmatrix},$$

где

$$a_{2n}(t) = [\overset{(2n)}{x}(t)x'(t)x''(t)\cdots\overset{(2n-1)}{x}(t)]a^{-1}(t),$$

$$a_{2n-1}(t) = [x(t)\overset{(2n)}{x}(t)x''(t)\cdots\overset{(2n-2)}{x}(t)]a^{-1}(t),$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$a_1(t) = [x(t)x'(t)x''(t)\cdots\overset{(2n-2)}{x}(t)\overset{(2n)}{x}(t)]a^{-1}(t),$$

$$a(t) = [x(t)x'(t)\cdots\overset{(2n-1)}{x}(t)];$$

$$M(x)IM^T(x) = \|b_{ms}(t)\|, \quad \text{где} \quad b_{ms}(t) = [\overset{(m-1)}{x}(t), \overset{(s-1)}{x}(t)], \quad m, s = \overline{1, 2n}.$$

Доказательство состоит в непосредственном вычислении произведения матриц, и поэтому мы его опускаем.

Из леммы 4 вытекает, что компоненты левых частей равенств 1), 2) из утверждения леммы 3 как d-рациональные функции над C от d-переменного вектора x ([7], с. 21) являются G-инвариантными функциями.

Доказательство теоремы 2. Очевидно, если пути $x(t)$ и $y(t)$ G-эквивалентны, то

$$[\overset{(m-1)}{x}(t), \overset{(m)}{x}(t)] = [\overset{(m-1)}{y}(t), \overset{(m)}{y}(t)] \tag{3}$$

для любых $t \in (0, 1)$, $m = \overline{1, 2n}$.

Пусть для путей $x(t)$ и $y(t)$ верны равенства (3) при всех $t \in (0, 1)$, $m = \overline{1, 2n}$. В силу теоремы 1 и леммы 4 получим, что для любого $t \in (0, 1)$

1) $M'(x)(M(x))^{-1} = M'(y)(M(y))^{-1}$,

2) $M(x)IM^T(x) = M(y)IM^T(y)$,

где $M(x)$ и $M(y)$ — соответствующие матрицы-функции путей $x(t)$ и $y(t)$ соответственно. Отсюда и из леммы 3 получаем утверждение теоремы 2.

В силу важности леммы 3 для доказательства теоремы 2 представляется полезным выделение таких матриц $A(t)$, $B(t)$, для которых существует путь $x(t)$ такой, что выполняются равенства

a) $A = M'(x)(M(x))^{-1}$,

b) $B = M(x)IM^T(x)$.

Теорема 3. *Пусть матрицы $A = A(t)$, $B = B(t)$ удовлетворяют следующим условиям*:

(I) *матрица* $A(t)$ *имеет вид*

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ a_{2n}(t) & a_{2n-1}(t) & a_{2n-2}(t) & \dots & a_1(t) \end{pmatrix},$$

где $a_i(t)$ — *бесконечно дифференцируемые на* $(0,1)$ *функции,* $i = \overline{1, 2n}$;

(II) $B(t)$ *невырождена для всех* $t \in (0,1)$;

(III) $B^T = -B$;

(IV) $B' = AB + BA^T$.

Тогда существует единственный с точностью до G*-эквивалентности путь* $x(t) \in V$, *для которого выполняются равенства* a), b).

Доказательство. Пусть выполнены условия теоремы. Решим систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} M'(x)(M(x))^{-1} = A(t), \\ M(x)IM^T(x) = B(t). \end{cases} \tag{4}$$

В силу соотношения (I) первое уравнение системы (4) равносильно уравнению $M'(x) = A(t)M(x)$ или

$$\begin{pmatrix} x_1(t) & \dots & x_{2n}(t) \\ & \dots & \\ \dots & \dots & \dots \\ \overset{(2n)}{x_1}(t) & \dots & \overset{(2n)}{x_{2n}}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1(t) & \dots & x_{2n}(t) \\ & \dots & \\ \dots & \dots & \dots \\ \overset{(2n-1)}{x_1}(t) & \dots & \overset{(2n-1)}{x_{2n}}(t) \\ d_1(t) & \dots & d_{2n}(t) \end{pmatrix}, \tag{5}$$

где $d_m(t) = x_m(t)a_{2n}(t) + x'_m(t)a_{2n-1}(t) + \dots + \overset{(2n-1)}{x_m}(t)a_1(t)$, $m = \overline{1, 2n}$.

Из уравнения (5) получаем систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \overset{(2n)}{x_1}(t) - a_1(t)\overset{(2n-1)}{x_1}(t) - \dots - a_{2n-1}(t)x'_1(t) - a_{2n}(t)x_1(t) = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \overset{(2n)}{x_{2n}}(t) - a_1(t)\overset{(2n-1)}{x_{2n}}(t) - \dots - a_{2n-1}(t)x'_{2n}(t) - a_{2n}(t)x_{2n}(t) = 0. \end{cases}$$

Эта система согласно ([11], § 17) имеет фундаментальную систему решений $x_1^0(t), x_2^0(t), \dots, x_{2n}^0(t)$, при этом $\det M(x^0) \neq 0$. Очевидно, $M(x^0)$ удовлетворяет первому уравнению системы (4). Пусть $X(t) = (x_{i,j}(t))_{i,j=1}^{2n}$ — некоторое решение первого уравнения системы (4). Положим $x(t) = (x_1(t), \dots, x_{2n}(t))$, где $x_i(t) = x_{1i}(t)$, $t \in (0,1)$. Так как $X'(t) = A(t)X(t)$, то, используя вид матрицы A, получим $x_{2i}(t) = x'_{1i}(t)$, $x_{2ni}(t) = \overset{2n-1}{x_{1i}}(t)$, $i = \overline{1, 2n}$. Таким образом, $X(t) = M(x(t))$. Предположим, что существует $X^{-1}(t)$ для всех $t \in (0,1)$ (т.е. решение $X(t)$ невырожденное). Тогда, используя условие (IV) из теоремы 3, получим

$$(X^{-1}B(X^{-1})^T)' = -X^1X'X^{-1}B(X^{-1})^T + X^{-1}(B'(X^{-1})^T - B(X^{-1}X'X^{-1})^T) =$$
$$= X^{-1}(-X'X^{-1}B + B' - B(X'X^{-1})^T)(X^{-1})^T = X^{-1}(-AB + AB + BA^T - BA^T)(X^{-1})^T = 0.$$

Это означает, что $X^{-1}B(X^{-1})^T \in GL(2n, C)$. Согласно условию (III) матрица $X^{-1}B(X^{-1})^T$ является кососимметрической. Поэтому ([12], с. 183) существует такая матрица $g \in GL(2n, C)$, что $X^{-1}B(X^{-1})^T = gIg^T$, т.е. $(Xg)I(Xg)^T = B$. Следовательно, Xg удовлетворяет уравнению b). Из доказательств леммы 3 вытекает, что Xg также является решением уравнения a). Таким образом, Xg есть решение системы (4). Взяв $X = M(x_0)$, получим, что существует путь $x_0(t)$, для которого выполняются равенства a), b). Из леммы 3 следует, что такой путь единственный с точностью до G-эквивалентности. $\square$

2. Критерий эквивалентности конечной системы путей в C^{2n} для действия группы $\mathrm{SP}(2n, C)$

Рассмотрим теперь вопрос о G-эквивалентности системы путей $\{x_i(t),\ i = \overline{1,k}\} \in V^k$. Системы путей $\{x_i(t),\ i = \overline{1,k}\}$ и $\{y_i(t),\ i = \overline{1,k}\}$ называются G-эквивалентными, если существует такое $g \in G$, что $y_i(t) = x_i(t)g$ при любых $t \in (0,1)$, $i = \overline{1,k}$.

Рассмотрим кольцо $C\langle x_1, \ldots, x_k\rangle = C\langle x_{11}, \ldots, x_{12n}, \ldots, x_{k1}, \ldots, x_{k2n}\rangle$ всех многочленов от счетного числа переменных

$$x_{11}, \ldots, x_{12n}, x'_{11}, \ldots, x'_{12n}, \ldots, \overset{(r)}{x}_{11}, \ldots, \overset{(r)}{x}_{12n}, \ldots, x_{k1}, \ldots, x_{k2n}, x'_{k1}, \ldots, x'_{k2n}, \ldots, \overset{(r)}{x}_{k1}, \ldots, \overset{(r)}{x}_{k2n}, \ldots$$

и положим $d(\overset{(r)}{x}_{ij}) = \overset{(r+1)}{x}_{ij}$, $i = \overline{1,k}$, $j = \overline{1,2n}$. Тогда d можно однозначно продолжить до дифференцирования в кольце $C\langle x_1, \ldots, x_k\rangle$, наделяя это кольцо структурой d-кольца. Известно ([7], с. 69), что дифференцирование d единственным образом продолжается до дифференцирования на соответствующее поле отношений. Это поле будем обозначать через $C\langle x_1, \ldots, x_k\rangle$, а его элементы будем называть d-рациональными функциями и будем записывать в виде $f\langle x_1, \ldots, x_k\rangle$. Говорят, что d-рациональная функция $f\langle x_1, \ldots, x_k\rangle$ G-инвариантна, если $f\langle x_1 g, \ldots, x_k g\rangle = f\langle x_1, \ldots, x_k\rangle$ для любых $g \in G$.

Множество всех G-инвариантных d-рациональных функций обозначим через $C\langle x_1, \ldots, x_k\rangle^G$. Известно ([7], с. 22), что оно является дифференциальным подполем в $C\langle x_1, \ldots, x_k\rangle$ относительно d.

В следующей теореме описываются образующие этого дифференциального поля.

Теорема 4. *В d-поле $C\langle x_1, \ldots, x_k\rangle^G$ следующие d-многочлены являются его образующими:*
a) *в случае $1 < k < n$*

$$\begin{aligned}
f_{ij}^{(l)}\langle x_1, \ldots, x_k\rangle &= [\overset{(l-1)}{x_i}, \overset{(l)}{x_j}], \quad 1 \le l \le n, \quad i \le j, \quad j = 1,2,\\
\varphi_{12}^{(l)}\langle x_1, \ldots, x_k\rangle &= [\overset{(l-1)}{x_1}, \overset{(l-1)}{x_2}], \quad 1 \le l \le n,\\
\psi_{ij}^{(l)}\langle x_1, \ldots, x_k\rangle &= [\overset{(l-1)}{x_i}, \overset{(l-1)}{x_j}], \quad 3 \le j \le k, \quad i = 1,2, \quad 1 \le l \le [\tfrac{n+1}{2}],\\
\tau_{ij}^{(l)}\langle x_1, \ldots, x_k\rangle &= [\overset{(l-1)}{x_i}, \overset{(l)}{x_j}], \quad 3 \le j \le k, \quad i = 1,2, \quad 1 \le l \le [\tfrac{n}{2}],
\end{aligned} \tag{6}$$

где $[c]$ — целая часть числа c;
b) *в случае $k \ge n$*

$$\begin{aligned}
f_{ij}\langle x_1, \ldots, x_k\rangle &= [x_i, x_j], \quad 1 \le i \le n, \quad i < j \le k,\\
\varphi_{ij}\langle x_1, \ldots, x_k\rangle &= [x_i, x'_j], \quad 1 \le i \le n, \quad i \le j \le k,\\
\psi_j\langle x_1, \ldots, x_k\rangle &= [x'_i, x_j], \quad 1 \le i \le n-1, \quad i < j \le n,\\
\tau_{ij}\langle x_1, \ldots, x_k\rangle &= [x'_i, x''_j], \quad 1 \le i \le n, \quad i \le j \le n.
\end{aligned} \tag{7}$$

Эта система d-многочленов является дифференциально-алгебраически независимой, и степень дифференциальной трансцендентности d-поля $C\langle x_1, \ldots, x_k\rangle^G$ равна $2nk$.

Доказательство. В ([7], с. 114) показано, что любая G-инвариантная d-рациональная функция $P\langle x_1, \ldots, x_k\rangle$ представима в виде отношения G-инвариантных d-многочленов $Q_1\{x_1, \ldots, x_k\}$ и $Q_2\{x_1, \ldots, x_k\}$. Следовательно, для доказательства первой части теоремы достаточно показать, что всякий G-инвариантный d-многочлен выражается d-рационально через d-многочлены (6), (7).

Из первой основной теоремы теории инвариантов для G ясно, что в качестве образующих кольца $C\{x_1,\dots,x_k\}^G$ можно взять

$$[\overset{(s)}{x}_i, \overset{(m)}{x}_j], \tag{8}$$

где $i,j=\overline{1,k}$, $m,s\in Z_0^+$. Покажем, что всякий d-многочлен вида (8) d-рационально выражается через систему d-многочленов (6) и (7).

Рассмотрим сначала случай а) $1<k<n$.

Лемма 5. *Дифференциальные многочлены* $[\overset{(r)}{x}_i, \overset{(r+1)}{x}_j]$, $[\overset{(r)}{x}_m, \overset{(r)}{x}_s]$, $i,j=\overline{1,k}$, $i\le j$, $1\le m<s$, $s=\overline{2,k}$, $r\in Z_0^+$, *являются образующими дифференциального кольца* $C\{x_1,\dots,x_k\}^G$, *причем, если* $p+q<2n+1$, $p'+q'<2r$, *то* $[\overset{(p)}{x}_i,\overset{(q)}{x}_j]$, $[\overset{(p')}{x}_m,\overset{(q')}{x}_s]$ *выражаются цело d-рационально через d-многочлены* $[\overset{(l)}{x}_i, \overset{(l+1)}{x}_j]$, $[\overset{(l)}{x}_m,\overset{(l)}{x}_s]$, *где* $l<r$.

Доказательство этой леммы аналогично доказательству леммы 1.

Лемма 6. *Пусть* $n=2v$, $v\in N$. *Дифференциальные многочлены вида* $[\overset{((n+1)+r)}{x}_1, \overset{((n-1)+r)}{x}_2]$, $[\overset{((n-1)+r)}{x}_i, \overset{(n+r)}{x}_j]$, *где* $i,j=1,2$, $i\le j$, $r\in N$, *выражаются d-рационально через d-многочлены* (6).

Доказательство проведем индукцией по r. Из тождества (2) для векторов $x_1,x_1',\dots,\overset{(n-1)}{x}_1$, $x_2,x_2',\dots,\overset{(n-1)}{x}_2,\overset{(n)}{x}_1,\overset{(n)}{x}_2$ и леммы 5 следует, что дифференциальный многочлен $[\overset{(n)}{x}_1,\overset{(n)}{x}_2]$ выражается d-рационально через d-многочлены (6). Отсюда и из тождества (2) для векторов $x_1,x_1',\dots,\overset{(n-1)}{x}_1$, $x_2,x_2',\dots,\overset{(n-1)}{x}_2,\overset{(n)}{x}_i,\overset{(n+1)}{x}_i$ и леммы 5 следует, что d-многочлены вида $[\overset{(n)}{x}_1,\overset{(n)}{x}_2]$, $i=\overline{1,2}$, выражаются d-рационально через d-многочлены (6). Аналогично показывается, что дифференциальный многочлен $[\overset{(n)}{x}_1, \overset{(n+1)}{x}_2]$ выражается d-рационально через d-многочлены (6). Лемма доказана для $r=1$.

Предположим, что лемма верна для некоторого r и докажем ее для $r+1$. В силу предположения индукции из тождества (2) для векторов $x_1,x_1',\dots,\overset{(n-1)}{x}_1,x_2,x_2',\dots,\overset{(n-1)}{x}_2,\overset{((n-1)+r+1)}{x}_1,\overset{((n-1)+r+1)}{x}_2$ и $x_1,x_1',\dots,\overset{(n-1)}{x}_1,x_2,x_2',\dots,\overset{(n-1)}{x}_2,\overset{((n-1)+r+1)}{x}_i,\overset{((n-1)+r+1)}{x}_j$ и из леммы 5 следует, что d-многочлены вида $[\overset{((n-1)+r+1)}{x}_1,\overset{((n-1)+r+1)}{x}_2]$, $[\overset{((n-1)+r+1}{x}_i,\overset{(n+r+1)}{x}_j]$, где $i,j=1,2$, $i\le j$, $r\in N$, выражаются d-рационально через d-многочлены (6). $\square$

Лемма 7. *Дифференциальные многочлены* $[\overset{((v-1)+r)}{x}_i,\overset{((v-1)+r)}{x}_s]$, $[\overset{((v-1)+r)}{x}_i,\overset{(v+r)}{x}_s]$, *где* $i,j=1,2$, $s=\overline{3,k}$, $r\in N$, *выражаются d-рационально через d-многочлены* (6).

Доказательство. Проведем индукцию по r. Напишем тождества (2) для векторов $x_1,x_1',\dots,\overset{(n-1)}{x}_1,x_2,x_2',\dots,\overset{(n-1)}{x}_2,\overset{(n)}{x}_1,x_s$ и $x_1,x_1',\dots,\overset{(n-1)}{x}_1,x_2,x_2',\dots,\overset{(n-1)}{x}_2,\overset{(n)}{x}_i,x_s'$. Из этих тождеств следует, что $[\overset{(n)}{x}_i,x_s]$ выражается d-рационально через d-многочлены (6). С другой стороны, $[\overset{(n)}{x}_i,x_s]$ выражается цело d-рационально через $[\overset{(p)}{x}_i,\overset{(q)}{x}_s]$, где $p+q\le 2v-1$ и $[\overset{(v)}{x}_i,\overset{(v)}{x}_s]$, причем в этом выражении d-многочлены $[\overset{(v)}{x}_i,\overset{(v)}{x}_s]$ участвуют в первой степени и коэффициент отличен от нуля. Из этого выражения следует, что $[\overset{(v)}{x}_i,\overset{(v)}{x}_s]$ выражается d-рационально через d-многочлены (6). Аналогично $[\overset{(n)}{x}_i,x_s]$ выражается цело d-рационально через $[\overset{(m)}{x}_i,\overset{(r)}{x}_j]$, где $m+r\le 2v$, и $[\overset{(v)}{x}_i,\overset{(v+1)}{x}_s]$. Тогда из этих тождеств следует, что $[\overset{(v)}{x}_i,\overset{(v)}{x}_s]$ и $[\overset{(v)}{x}_i,\overset{(v+1)}{x}_s]$, $i,s=1,2$, $v=\overline{3,k}$, выражаются d-рационально через d-многочлены (6). Следовательно, лемма для $r=1$ доказана.

Предположим, что лемма верна для некоторого r и докажем для $r+1$. В силу предположения индукции из тождества (2) для векторов $x_1,x_1',\dots,\overset{(n-1)}{x}_1,x_2,x_2',\dots,\overset{(n-1)}{x}_2,\overset{((v-1)+r+1)}{x}_i,\overset{((v-1)+r+1)}{x}_s$ и $x_1,x_1',\dots,\overset{(n-1)}{x}_1,x_2,x_2',\dots,\overset{(n-1)}{x}_2,\overset{((v-1)+r+1)}{x}_i,\overset{(v+r+1)}{x}_s$ следует, что d-многочлены вида $[\overset{((v-1)+r+1)}{x}_i$,

$\overset{((v-1)+r+1)}{x_s}]$, $[\overset{((v-1)+r+1)}{x_i}, \overset{(v+r+1)}{x_s}]$, где $i = 1, 2$, $s = \overline{3, k}$, выражаются d-рационально через d-многочлены (6). $\square$

Лемма 8. *d-многочлены $[\overset{(r-1)}{x_m}, \overset{(r)}{x_m}]$, $[\overset{(r-1)}{x_i}, \overset{(r)}{x_j}]$, $[\overset{(r-1)}{x_i}, \overset{(r-1)}{x_j}]$, где $m = \overline{3, k}$, $i < j$, $i = \overline{3, k-1}$, выражаются d-рационально через d-многочлены* (6).

Доказательство проведем индукцией по r. Из тождества (2) для векторов $x_1, x_1', \ldots, \overset{(n-1)}{x_1}$, $x_2, x_2', \ldots, \overset{(n-1)}{x_2}, x_i, x_j'$ и $x_1, x_1', \ldots, \overset{(n-1)}{x_1}, x_2, x_2', \ldots, \overset{(n-1)}{x_2}, x_m, x_m'$, а также $x_1, x_1', \ldots, \overset{(n-1)}{x_1}, x_2, x_2', \ldots, \overset{(n-1)}{x_2}, x_i, x_j$ последовательно получим, что d-многочлены $[x_i, x_j']$, $[x_m, x_m']$ и $[x_i, x_j]$, где $m = \overline{3, k}$, $i < j$, $i = \overline{3, k-1}$, $j = \overline{4, k}$, выражаются d-рационально через d-многочлены (6). Следовательно, лемма для $r = 1$ доказана.

Предположим, что лемма верна для некоторого r и докажем для $r + 1$. В силу предположения индукции из тождества (2) для векторов $x_1, x_1', \ldots, \overset{(n-1)}{x_1}, x_2, x_2', \ldots, \overset{(n-1)}{x_2}, \overset{(r)}{x_m}, \overset{(r+1)}{x_m}$ и $x_1, x_1', \ldots, \overset{(n-1)}{x_1}, x_2, x_2', \ldots, \overset{(n-1)}{x_2}, \overset{(r)}{x_i}, \overset{(r+1)}{x_j}$, а также $x_1, x_1', \ldots, \overset{(n-1)}{x_1}, x_2, x_2', \ldots, \overset{(n-1)}{x_2}, \overset{(r)}{x_i}, \overset{(r)}{x_j}$ последовательно получим, что d-многочлены $[\overset{(r)}{x_m}, \overset{(r+1)}{x_m}]$, $[\overset{(r)}{x_i}, \overset{(r+1)}{x_j}]$, $[\overset{(r)}{x_i}, \overset{(r)}{x_j}]$, где $m = \overline{3, k}$, $i < j$, $i = \overline{3, k-1}$, $j = \overline{4, k}$, выражаются d-рационально через d-многочлены (6). $\square$

Из лемм 5–8 получим доказательство первой части теоремы в случае $1 < k < n$, когда n четно. Аналогичными рассуждениями утверждение доказывается, когда n нечетно.

b) Докажем теорему в случае $k \geq n$. Рассмотрим сначала случай $k = n$. Написав тождество (2) для векторов $x_1, x_2, \ldots, x_n, x_1', x_2', \ldots, x_n', x_i'', x_j''$, получим, что d-многочлены $[x_i'', x_j'']$, где $i < j$, $j = \overline{2, n}$, $i = \overline{1, n-1}$, выражаются d-рационально через d-многочлены (7).

Также, написав тождество (2) для векторов $x_1, x_2, \ldots, x_n, x_1', x_2', \ldots, x_n', x_i'', x_j'''$, получим, что d-многочлены $[x_i'', x_j''']$, $i < j$, $i, j = \overline{1, n}$, выражаются d-рационально через d-многочлены (7). Предположим, что утверждение доказано для всех $i < r$, и докажем его для $i = r$. В силу предположения индукции из тождества (2) для векторов $x_1, x_2, \ldots, x_n, x_1', x_2', \ldots, x_n', \overset{(r)}{x_i}, \overset{(r)}{x_j}$ и $x_1, x_2, \ldots, x_n, x_1', x_2', \ldots, x_n', \overset{(r)}{x_s}, \overset{(r+1)}{x_m}$ следует, что d-многочлены $[\overset{(r)}{x_i}, \overset{(r)}{x_j}]$, $[\overset{(r)}{x_s}, \overset{(r+1)}{x_m}]$, где $i < j$, $s \leq m$, $j = \overline{2, n}$, $i = \overline{1, n-1}$, $s, m = \overline{1, n}$, выражаются d-рационально через d-многочлены (7). В силу леммы 5 любой элемент d-кольца $C\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}^G$ выражается d-рационально через d-многочлены (7).

Следовательно, утверждение b) в случае $k = n$ доказано.

Теперь рассмотрим случай $k > n$. Из тождества (2) для векторов $x_1, x_2, \ldots, x_n, x_1', x_2', \ldots, x_n'$, x_i, x_j и равенства $[x_i, x_j'] = [x_i, x_j] - [x_i', x_j]$ следует, что многочлены $[x_i, x_j]$, где $i < j$, $j = \overline{n+2, k}$, $i = \overline{n+1, k-1}$, выражаются d-рационально через d-многочлены (7). Также из тождества (2) для векторов $x_1, x_2, \ldots, x_n, x_1', x_2', \ldots, x_n', x_i'', x_j$, учитывая тождества $[x_i'', x_j'] = [x_i', x_j]' - [x_i', x_j']$ и равенства $[x_i, x_j'] = [x_i, x_j]' - [x_i', x_j]$, получим, что d-многочлены $[x_i', x_j']$, $i = \overline{1, n}$, $j = \overline{n+1, k}$, выражаются d-рационально через d-многочлены (7). Из тождества (2) для векторов $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots, x_1', x_2', \ldots, x_n', x_i', x_j'$ следует, что d-многочлены $[x_i', x_j']$, где $i < j$, $j = \overline{n+2, k}$, $i \geq n + 1$, выражаются d-рационально через d-многочлены (7). Также из тождества (2) для $x_1, x_2, \ldots, x_n, x_1', x_2', \ldots, x_n', x_i', x_j$, учитывая $[x_i', x_j] = [x_i, x_j]' - [x_i, x_j']$, получим, что $[x_i, x_j']$, где $i < j$, $j = \overline{n+1, k}$, $i \geq n + 1$, выражаются d-рационально через d-многочлены (7). Из тождества (2) для векторов $x_1, x_2, \ldots, x_n, x_1', x_2', \ldots, x_n', x_i'', x_j'$, учитывая тождества $[x_i'', x_j'] = [x_i', x_j']' - [x_i', x_j'']$, получим, что $[x_i', x_j'']$, где $i = \overline{1, n}$, $j = \overline{n+1, k}$, выражаются d-рационально через d-многочлены (7). Аналогично, из тождества (2) для векторов $x_1, x_2, \ldots, x_n, x_1', x_2', \ldots, x_n', x_i'', x_j'$, учитывая, что $[x_i'', x_j'] = [x_i', x_j']' - [x_j', x_j'']$, получим, что d-многочлены $[x_i', x_j'']$, где $i \leq j$, $j = \overline{n+1, k}$, выражаются d-рационально через d-многочлены (7). Таким образом, для $r = 1$ доказали что d-многочлены $[\overset{(r)}{x_i}, \overset{(r)}{x_j}]$ и $[\overset{(r)}{x_s}, \overset{(r-1)}{x_m}]$ d-рационально выражаются через d-многочлены (7). Предположим, что это утверждение доказано для всех чисел, меньших r. Докажем, что это утверждение верно для r.

Из тождества (2) для векторов $x_1, x_2, \dots, x_n, x'_1, x'_2, \dots, x'_n, \overset{(r)}{x_i}, \overset{(r)}{x_j}$ и $x_1, x_2, \dots, x_n, x'_1, x'_2, \dots, x'_n, \overset{(r)}{x_s}, \overset{(r+1)}{x_m}$ по предположению индукции последовательно получим, что d-многочлены $[\overset{(r)}{x_i}, \overset{(r)}{x_j}]$, $[\overset{(r)}{x_s}, \overset{(r+1)}{x_m}]$, где $i < j$, $s \leq m$, $j = \overline{2,k}$, $i = \overline{1,k-1}$, $s,m = \overline{1,k}$, выражаются d-рационально через d-многочлены (7). Значит, в силу леммы 5 любой элемент d-кольца $C\{x_1, \dots, x_k\}^G$ выражается d-рационально через d-многочлены (7).

Покажем теперь, что система d-многочленов (6), (7) является дифференциально алгебраически независимой.

Ввиду того, что степень d-трансцендентности d-поля $C\langle x_1, \dots, x_k\rangle$ над полем C есть $2nk$ и $C \subset C\langle x_1, \dots, x_k\rangle^G \subset C\langle x_1, \dots, x_k\rangle$, в силу теоремы A достаточно показать, что степень d-трансцендентности d-поля $C\langle x_1, \dots, x_k\rangle$ над d-полем $C\langle x_1, \dots, x_k\rangle^G$ есть нуль, т. е. каждая координата d-переменных ([7], с. 21) векторов x_i, где $i = \overline{1,k}$, является d-алгебраичной над d-полем $C\langle x_1, \dots, x_k\rangle^G$. В случае $k = 1$ этот факт установлен в теореме 1.

Утверждение для любого k следует из того, что для каждого из d-неизвестных векторов x_i, где $i = \overline{1,k}$, d-поле $C\langle x_i\rangle^G$ содержится в d-поле $C\langle x_1, \dots, x_k\rangle^G$, и поэтому каждая координата d-неизвестного вектора x_i является d-алгебраической над d-полем $C\langle x_1, \dots, x_k\rangle^G$. Теорема 4 доказана.

Замечание. В [7] построены другие $2nk$ d-многочлены, которые также являются образующими d-поля $C\langle x_1, \dots, x_k\rangle^G$.

Теорема 5. *Системы $\{x_i(t),\ i = \overline{1,k}\}$ и $\{y_i(t),\ i = \overline{1,k}\}$ путей G-эквивалентны тогда и только тогда, когда $F_v\{x_1(t), \dots, x_k(t)\} = F_v\{y_1(t), \dots, y_k(t)\}$, где F_v — образующие d-поля $C\langle x_1, x_2, \dots, x_k\rangle^G$, $v = \overline{1,2nk}$.*

Сначала докажем следующие леммы.

Лемма 9. *Две системы путей $\{x_i(t),\ i = \overline{1,k}\}$ и $\{y_i(t),\ i = \overline{1,k}\}$ G-эквивалентны тогда и только тогда, когда существует такой индекс i_0, что выполнены следующие равенства:*
1) $M'(x_{i_0})(M(x_{i_0}))^{-1} = M'(y_{i_0})(M(y_{i_0}))^{-1}$,
2) $M(x_{i_0})IM^T(x_{i_0}) = M(y_{i_0})IM^T(y_{i_0})$,
3) $x_i(M(x_{i_0}))^{-1} = y_i(M(y_{i_0}))^{-1}$, $i \neq i_0$.

Доказательство. Необходимость. Пусть $\{x_i(t),\ i = \overline{1,k}\}$ и $\{y_i(t),\ i = \overline{1,k}\}$ G-эквивалентны, т. е. существует такое $g \in G$, что $y_i(t) = x_i(t)g$ для всех $i = \overline{1,k}$. Тогда справедливость соотношений 1), 2) следует из леммы 3, а равенства 3) легко проверяются:

$$y_i(M(y_{i_0}))^{-1} = x_i g(M(x_{i_0})g)^{-1} = x_i g g^{-1}(M(x_{i_0}))^{-1} = x_i(M(x_{i_0}))^{-1}.$$

Достаточность. Пусть для путей $\{x_i(t),\ i = \overline{1,k}\}$ и $\{y_i(t),\ i = \overline{1,k}\}$ выполняются соотношения 1)–3) для некоторого i_0. Из леммы 3 следует, что $(M(x_{i_0}))^{-1}(M(y_{i_0})) \in \mathrm{Sp}(2n, C)$, т. е. $M(y_{i_0}) = M(x_{i_0})g$ для некоторого $g \in \mathrm{Sp}(2n, C)$. В частности, получим, что $y_{i_0} = x_{i_0}g$, и из равенства 3) вытекает, что $x_i(M(x_{i_0}))^{-1} = y_i(M(y_{i_0}))^{-1} = y_i g^{-1}(M(x_{i_0}))^{-1}$, т. е. $y_i = x_i g$ при $i \neq i_0$. $\square$

Лемма 10. *Для конечной системы путей $\{x_i(t),\ i{=}\overline{1,k}\}$ матрицы-функции $M'(x_i)(M(x_i))^{-1}$, $M(x_i)IM^T(x_i)$, $x_i(M(x_{i_0}))^{-1}$ имеют вид*

$$M'(x_i)(M(x_i))^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ a_{2ni}(t) & a_{(2n-1)i}(t) & a_{(2n-2)i}(t) & \dots & a_{1i}(t) \end{pmatrix},$$

где

$$a_{2ni}(t) = [\overset{(2n)}{x_i}(t)x_i'(t)x_i''(t)\cdots\overset{(2n-1)}{x_i}(t)](a_i(t))^{-1},$$

$$a_{(2n-1)i}(t) = [x_i(t)\overset{(2n)}{x_i}(t)x_i''(t)\cdots\overset{(2n-1)}{x_i}(t)](a_i(t))^{-1},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$a_{1i}(t) = [x_i(t)x_i'(t)x_i''(t)\cdots\overset{(2n-2)}{x_i}(t)\overset{(2n)}{x_i}(t)](a_i(t))^{-1},$$

$$a_i(t) = [x_i(t)x_i'(t)x_i''(t)\cdots\overset{(2n-1)}{x_i}(t)], \quad i=\overline{1,k}.$$

$$M(x_i)IM^T(x_i) = [\overset{(m-1)}{x_i}(t)\overset{(s-1)}{x_i}(t)], \quad \textit{где} \quad m,s=\overline{1,2n}, \quad i=\overline{1,k},$$

$$x_i(M(x_{i_0}))^{-1} = \|c_{2ni}(t)c_{(2n-1)i}(t)\ldots c_{1i}(t)\|, \quad \textit{где}$$

$$c_{2ni}(t) = [x_i(t)x_{i_0}'(t)x_{i_0}''(t)\cdots\overset{(2n-1)}{x_{i_0}}(t)](a_{i_0}(t))^{-1},$$

$$c_{(2n-1)i}(t) = [x_{i_0}(t)x_i(t)x_{i_0}''(t)\cdots\overset{(2n-1)}{x_{i_0}}(t)](a_{i_0}(t))^{-1},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$c_{1i}(t) = [x_{i_0}(t)x_{i_0}'(t)x_i''(t)\cdots\overset{(2n-2)}{x_{i_0}}(t)x_i(t)](a_{i_0}(t))^{-1}, \quad i\neq i_0.$$

Доказательство состоит в непосредственном вычислении произведения матриц, и поэтому мы его опускаем.

Из леммы 10 получим, что компоненты левых частей равенств 1)–3) (лемма 9) как дифференциальные рациональные функции над C от переменного вектора x_i, $i=\overline{1,k}$, являются G-инвариантными функциями.

Доказательство теоремы 5. Очевидно, если конечные системы $\{x_i(t),\ i=\overline{1,k}\}$ и $\{y_i(t),\ i=\overline{1,k}\}$ путей в C^{2n} G-эквивалентны, то

$$F_v\{x_1(t),\ldots,x_k(t)\} = F_v\{y_1(t),\ldots,y_k(t)\} \tag{9}$$

для любых $t\in(0,1)$, где F_v, $v=\overline{1,2nk}$, — образующие d-поля $C\langle x_1,x_2,\ldots,x_k\rangle^G$.

Пусть $\{x_i(t),\ i=\overline{1,k}\}$ и $\{y_i(t),\ i=\overline{1,k}\}$ — конечные системы регулярных путей в C^{2n} и верны равенства (9) при всех $t\in(0,1)$, $v=\overline{1,2nk}$. В силу теоремы 4 и леммы 10 получим, что для любого $t\in(0,1)$

$$M'(x)(M(x))^{-1} = M'(y)(M(y))^{-1}, \quad M(x)IM^T(x) = M(y)IM^T(y),$$

$x_i(M(x_{i_0}))^{-1} = y_i(M(y_{i_0}))^{-1}$, где $i\neq i_0$, i_0 — некоторый фиксированный индекс.

Отсюда в силу леммы 9 получим доказательство теоремы 5.

Приведем теперь вариант теоремы 3 для конечной системы путей.

Теорема 6. *Пусть для матриц* $A(t),B(t)\in\mathrm{Mat}(2n,C)$ *выполнена система равенств* (I)–(IV) (*см. теорему* 3) *и* $D_i=(d_{i1}(t),\ldots,d_{i2n}(t))$, *где* $d_{ij}(t)$ *— бесконечно дифференцируемые функции на* $(0,1)$, $i=\overline{1,k}$, $i\neq i_0$, $j=\overline{1,2n}$, i_0 *— некоторый фиксированный индекс. Тогда существует единственная, с точностью до G-эквивалентности, система путей* $\{x_i,\ i=\overline{1,k}\}$, *для которой выполняются равенства*

а) $M'(x_{i_0})M^{-1}(x_{i_0})=A$,

б) $M(x_{i_0})IM^T(x_{i_0})=B$,

в) $x_iM^{-1}(x_{i_0})=D_i$, $i\neq i_0$.

Доказательство. Повторяя рассуждения из доказательства теоремы 3, получим, что система уравнений

$$\begin{cases} X'X^{-1}=A,\\ XIX=B\end{cases}$$

имеет решение $M(x_{i_0})$ и любое другое решение имеет вид $X = M(x_{i_0})g$, где $g \in \mathrm{Sp}(2n, C)$. Положим $x_i = D_i M(x_{i_0})$, $i \neq i_0$. Тогда $\{x_i,\ i = \overline{1,k}\}$ удовлетворяет условию в). Пусть $\{y_i,\ i = \overline{1,k}\}$ — произвольная другая система путей, удовлетворяющая условиям а), б), в). Поскольку $M(y_{i_0}) = M(x_{i_0})g$ для некоторого $g \in \mathrm{Sp}(2n, C)$, то $D_i = y_i(M(y_{i_0}))^{-1} = y_i(M(x_{i_0})g)^{-1} = y_i g^{-1}(M(x_{i_0}))^{-1} = x_i(M(x_{i_0}))^{-1}$. Отсюда $y_i = x_i g$. $\square$

Литература

1. Вейль Г. *Классические группы, их инварианты и представления.* – М.: Ин. лит., 1947. – 408 с.
2. Дьёдонне Ж., Керрол Дж., Мамфорд Д. *Геометрическая теория инвариантов.* – М.: Мир, 1974. – 280 с.
3. Винберг Э.Б., Попов В.Л. *Теория инвариантов* // Итоги науки и техн. Современ. пробл. матем. – М.: ВИНИТИ, 1989. – Т. 55. – С. 137–309.
4. Картан Э. *Теория конечных непрерывных групп и дифференциальная геометрия, изложенные методом подвижного репера.* – Волгоград: ПЛАТОН, 1998. – 367 с.
5. Арипов Р.Г. *Эквивалентность путей в n-мерном комплексном векторном пространстве относительно действия группы $SO(n, R)$* // ДАН УзССР. – 1986. – № 6. – С. 8–10.
6. Суктаева А.М. *Об эквивалентности кривых в C^n и восстановлении кривых с точностью до G-эквивалентности по их дифференциальным инвариантам относительно действия групп $SL(n, c)$ и $GL(n, C)$* // ДАН УзССР. – 1987. – № 6. – С. 11–13.
7. Хаджиев Дж. *Приложение теории инвариантов к дифференциальной геометрии кривых.* – Ташкент: ФАН, 1988. – 136 с.
8. Муминов К.К. *Рациональность поля дифференциальных инвариантов конечного числа путей для действия группы* $\mathrm{Sp}(2n, C)$ *в C^{2n}, образующие этого поля и разделение регулярных орбит дифференциальными инвариантами* // ДАН УзССР. – 1987. – № 5. – С. 7–9.
9. Kolchin E.R. *Differential algebra and algebraic groups.* – New York–London: Academic Press, 1973. – 448 p.
10. Капланский И. *Введение в дифференциальную алгебру.* – М.: Ин. лит., 1959. – 88 с.
11. Понтрягин Л. С. *Обыкновенные дифференциальные уравнения.* – М.: Наука, 1982. – 331 с.
12. Кострикин А.И., Манин Ю.И. *Линейная алгебра и геометрия.* Учеб. пособие. – М.: Наука, 1986. – 303 с.

Ташкентский государственный университет

Поступила 16.05.2000