ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2006 МАТЕМАТИКА № 3 (526)

УДК 512.8

*А.Г. ПИНУС*

# О ФОРМУЛЬНОСТИ ПРОИЗВОДНЫХ ОБЪЕКТОВ НА УНИВЕРСАЛЬНЫХ АЛГЕБРАХ

Известна роль производных структур (решеток подалгебр и конгруэнций, групп автоморфизмов, полугрупп эндоморфизмов, внутренних изоморфизмов, внутренних гомоморфизмов и др.) при изучении строения универсальных алгебр. Естественен интерес к тем производным объектам (подалгебрам, конгруэнциям, автоморфизмам, эндоморфизмам и пр.) универсальной алгебры, которые могут быть определены средствами самой алгебры: ее термами, условными термами, формулами первого порядка и т. д. Этим вопросам, в частности, были посвящены работы [1], [2]. Напомним некоторые определения из них.

Автоморфизм $\varphi$ алгебры $\mathcal{A}$ называется термальным (условно термальным), если существует терм (условный терм) $t(x)$ сигнатуры алгебры $\mathcal{A}$ такой, что для любого $a \in \mathcal{A}$ имеет место равенство $\varphi(a) = t(a)$. Аналогично определяется термальность (условная термальность) эндоморфизма алгебры $\mathcal{A}$. Напомним, что внутренним изоморфизмом (внутренним гомоморфизмом) алгебры $\mathcal{A}$ называется любой изоморфизм между подалгебрами алгебры $\mathcal{A}$ (любой гомоморфизм между подалгебрами алгебры $\mathcal{A}$). Внутренний изоморфизм (внутренний гомоморфизм) $\varphi$ алгебры $\mathcal{A}$ назовем термальным, если для некоторого терма $t(x)$ и для любого $a \in \operatorname{Dom}\varphi$ имеет место равенство $\varphi(a) = t(a)$. Аналогично определяется условная термальность внутренних изоморфизмов и гомоморфизмов.

В работах автора помимо понятия условного терма определены также понятия позитивно-условного, элементарно-условного и $\exists^+$-условного термов (см., к примеру, [3], [4]) отличающиеся друг от друга варьированием понятия условия. В условном терме условие — это бескванторные формулы, в позитивно-условном — позитивные бескванторные, в элементарно-условном — элементарные, $\exists^+$-условном — позитивные $\exists$-формулы. Аналогично термальным и условно термальным определяются позитивно-условные, элементарно-условные, $\exists^+$-условные автоморфизмы, эндоморфизмы, внутренние изоморфизмы и т.д.

Так как суперпозиция условных (позитивно-условных, элементарно-условных, $\exists^+$-условных) термов и сама является условным (позитивно-условным, элементарно-условным, $\exists^+$-условным) термом, то совокупности термальных (условно, позитивно-условно, элементарно-условно, $\exists^+$-условно термальных) автоморфизмов, эндоморфизмов, внутренних изоморфизмов и внутренних гомоморфизмов любой универсальной алгебры образуют полугруппы. В случае же конечности универсальной алгебры совокупности соответствующих автоморфизмов образуют группы.

Введем следующие обозначения:

группу условно (позитивно-условно, элементарно-условно, $\exists^+$-условно) термальных автоморфизмов конечной алгебры $\mathcal{A}$ обозначим как $CPS\operatorname{Aut}\mathcal{A}$ (соответственно $C^+PS\operatorname{Aut}\mathcal{A}$, $EPS\operatorname{Aut}\mathcal{A}$, $\exists^+PS\operatorname{Aut}\mathcal{A}$);

полугруппу условно (позитивно-условно, элементарно-условно, $\exists^+$-условно) термальных эндоморфизмов алгебры $\mathcal{A}$ обозначим как $CPS\operatorname{End}\mathcal{A}$ (соответственно $C^+PS\operatorname{End}\mathcal{A}$, $EPS\operatorname{End}\mathcal{A}$, $\exists^+PS\operatorname{End}\mathcal{A}$);

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 02-01-00258).

полугруппу условно (позитивно-условно, элементарно-условно, $\exists^+$-условно) термальных внутренних изоморфизмов алгебры $\mathcal{A}$ обозначим как $CPS\operatorname{Iso}\mathcal{A}$ (соответственно $C^+PS\operatorname{Iso}\mathcal{A}$, $EPS\operatorname{Iso}\mathcal{A}$, $\exists^+PS\operatorname{Iso}\mathcal{A}$);

полугруппу условно (позитивно-условно, элементарно-условно, $\exists^+$-условно) термальных внутренних гомоморфизмов алгебры $\mathcal{A}$ обозначим как $CPS\operatorname{Hom}\mathcal{A}$ (соответственно $C^+PS\operatorname{Hom}\mathcal{A}$, $EPS\operatorname{Hom}\mathcal{A}$, $\exists^+PS\operatorname{Hom}\mathcal{A}$).

Подалгебру $\mathcal{B} = \langle B;\sigma\rangle$ алгебры $\mathcal{A} = \langle A;\sigma\rangle$ назовем открыто- (позитивно-открыто-, элементарно-, $\exists^+$-) формульной, если существует бескванторная (соответственно позитивная бескванторная, элементарная, позитивная $\exists$-) формула $\phi(x)$ такая, что $B = \{a \in A \mid \mathcal{A} \models \phi(a)\}$. Очевидно, совокупность всех формульных подалгебр каждого из указанного выше типов образует 0-1-нижнюю подполурешетку решетки $\operatorname{Sub}\mathcal{A}$ всех подалгебр алгебры $\mathcal{A}$. Обозначим далее

полурешетку всех открыто-формульных подалгебр алгебры $\mathcal{A}$ как $P\operatorname{Sub}\mathcal{A}$;

полурешетку всех позитивно-открыто-формульных подалгебр как $P_+\operatorname{Sub}\mathcal{A}$;

полурешетку всех элементарно-формульных подалгебр как $E\operatorname{Sub}\mathcal{A}$;

полурешетку всех $\exists^+$-формульных подалгебр алгебры $\mathcal{A}$ как $\exists^+\operatorname{Sub}\mathcal{A}$.

Очевидно, для любой универсальной алгебры $\mathcal{A}$ имеют место включения

$$C^+PS\operatorname{Aut}\mathcal{A} \begin{array}{c}\subseteq CPS\operatorname{Aut}\mathcal{A} \subseteq\\ \subseteq \exists^+PS\operatorname{Aut}\mathcal{A} \subseteq\end{array} EPS\operatorname{Aut}\mathcal{A} \subseteq Z(\operatorname{Aut}\mathcal{A}), \tag{$*$}$$

где $Z(G)$ обозначает центр группы $G$.

Также очевидны включения

$$C^+PS\operatorname{End}\mathcal{A} \begin{array}{c}\subseteq CPS\operatorname{End}\mathcal{A} \subseteq\\ \subseteq \exists^+PS\operatorname{End}\mathcal{A} \subseteq\end{array} EPS\operatorname{End}\mathcal{A} \subseteq Z(\operatorname{End}\mathcal{A}),$$

где $Z(S)$ — центр полугруппы $S$, т. е. совокупность элементов из $S$ коммутирующих с любыми элементами из $S$.

Для любой алгебры $\mathcal{A}$ имеют место включения

$$P_+\operatorname{Sub}\mathcal{A} \begin{array}{c}\subseteq P\operatorname{Sub}\mathcal{A} \subseteq\\ \subseteq \exists^+\operatorname{Sub}\mathcal{A} \subseteq\end{array} E\operatorname{Sub}\mathcal{A} \subseteq \operatorname{Sub}\mathcal{A}. \tag{$**$}$$

Кроме того, для любого $\varphi \in \operatorname{Aut}\mathcal{A}$ и любой $\mathcal{B} \in E\operatorname{Sub}\mathcal{A}$ имеет место равенство $\varphi(\mathcal{B}) = \mathcal{B}$. Аналогично

для $\varphi \in \operatorname{End}\mathcal{A}$ и $\mathcal{B} \in \exists^+\operatorname{Sub}\mathcal{A}$ имеет место $\varphi(\mathcal{B}) \subseteq \mathcal{B}$;

для $\varphi \in \operatorname{Iso}\mathcal{A}$ и $\mathcal{B} \in P\operatorname{Sub}\mathcal{A}$ — $\varphi(\operatorname{Dom}\varphi \cap \mathcal{B}) \subseteq \mathcal{B}$;

для $\varphi \in \operatorname{Hom}\mathcal{A}$ и $\mathcal{B} \in P_+\operatorname{Sub}\mathcal{A}$ — $\varphi(\operatorname{Dom}\varphi \cap \mathcal{B}) \subseteq \mathcal{B}$.

В работе [1] было доказано, что для любой равномерно локально-конечной алгебры $\mathcal{A}$ конечной сигнатуры (конечной алгебры $\mathcal{A}$ произвольной сигнатуры) и любого $\varphi \in \operatorname{Aut}\mathcal{A}$ следующие условия эквивалентны:

1) $\varphi \in CPS\operatorname{Aut}\mathcal{A}$;
2) подалгебры алгебры $\mathcal{A}$ замкнуты относительно $\varphi$, и $\varphi$ коммутирует со всеми отображениями из $\operatorname{Iso}\mathcal{A}$.

В частности, если $\mathcal{A}$ — конечная алгебра без собственных подалгебр, то эквивалентны условия

1) $\varphi \in CPS\operatorname{Aut}\mathcal{A}$; 2) $\varphi \in Z(\operatorname{Aut}\mathcal{A})$.

Там же было доказано, что для любой конечной алгебры $\mathcal{A}$ и любого $\varphi \in \operatorname{Aut}\varphi$ следующие условия эквивалентны:

1) $\varphi \in ECPS\operatorname{Aut}\mathcal{A}$;

2) подалгебры алгебры $\mathcal{A}$ замкнуты относительно $\varphi$ и $\varphi \in Z(\operatorname{Aut}\mathcal{A})$.

В данной работе будут исследоваться ситуации с возможными равенствами в цепочках включений $(*)$ и $(**)$.

Внутренний изоморфизм универсальной алгебры $\mathcal{A}$ назовем ее внутренним автоморфизмом, если $\mathrm{Dom}\,\varphi = \mathrm{Rang}\,\varphi$. Аналогично, внутренний гомоморфизм $\varphi$ алгебры $\mathcal{A}$ будем называть ее внутренним эндоморфизмом, если $\mathrm{Rang}\,\varphi \subseteq \mathrm{Dom}\,\varphi$.

Имеет место

**Теорема 1.** *Для любой конечной алгебры $\mathcal{A}$ следующие условия попарно эквивалентны*:

1) $\mathrm{Sub}\,\mathcal{A} = P_+\,\mathrm{Sub}\,\mathcal{A}$,

1$'$) *все внутренние гомоморфизмы алгебры $\mathcal{A}$ являются ее внутренними эндоморфизмами*;

2) $\mathrm{Sub}\,\mathcal{A} = P\,\mathrm{Sub}\,\mathcal{A}$,

2$'$) *все внутренние изоморфизмы алгебры $\mathcal{A}$ являются ее внутренними автоморфизмами*;

3) $\mathrm{Sub}\,\mathcal{A} = \exists^+\,\mathrm{Sub}\,\mathcal{A}$,

3$'$) *все подалгебры алгебры $\mathcal{A}$ замкнуты относительно любых ее эндоморфизмов*;

4) $\mathrm{Sub}\,\mathcal{A} = E\,\mathrm{Sub}\,\mathcal{A}$,

4$'$) *все подалгебры алгебры $\mathcal{A}$ замкнуты относительно любых ее автоморфизмов.*

**Доказательство.** Приведем лишь доказательство эквивалентности условий 1) и 1$'$). Остальные утверждения теоремы доказываются аналогично, варьируются лишь понятия диаграммы подалгебры. Итак, пусть $\mathcal{A}$ — конечная алгебра и все подалгебры алгебры $\mathcal{A}$ выделяются в ней позитивными бескванторными формулами и пусть $\varphi$ — гомоморфизм подалгебры $\mathcal{A}_1$ на подалгебру $\mathcal{A}_2$ алгебры $\mathcal{A}$. Пусть $a \in \mathcal{A}_1$ и позитивная бескванторная формула $\phi(x)$ выделяет в $\mathcal{A}$ подалгебру $\langle a\rangle_{\mathcal{A}}$ порожденную в $\mathcal{A}$ элементом $a$. Тогда $\mathcal{A} \models \phi(a)$ и $\mathcal{A} \models \phi(\varphi(a))$, т. е. $\varphi(a) \in \langle a\rangle_{\mathcal{A}} \subseteq \mathcal{A}_1$. Тем самым, $\mathcal{A}_2 \subseteq \mathcal{A}_1$, т. е. любой внутренний гомоморфизм алгебры $\mathcal{A}$ является ее внутренним эндоморфизмом.

Допустим обратное, т. е., что все внутренние гомоморфизмы алгебры $\mathcal{A}$ являются ее внутренними эндоморфизмами. Для каждого $a \in \mathcal{A}$ пусть $D_a^+(x)$ — позитивная диаграмма подалгебры $\langle a\rangle_{\mathcal{A}}$ при интерпретации $x$ как $a$ (совокупность всех позитивных бескванторных формул $\phi(x)$ истинных на $a$) и $D_a^{+\prime}(x)$ — конечное подмножество из $D_a^+(x)$ такое, что для любого $b \in \mathcal{A}$ условия $\mathcal{A} \models D_a^{+\prime}(b)$ и $D_a^+(x) \subseteq D_b^+(x)$ эквивалентны. Пусть $\mathcal{L}$ — подалгебра алгебры $\mathcal{A}$ и

$$\phi_{\mathcal{L}}(x) = \bigvee_{c\in\mathcal{L}} D_c^{+\prime}(x).$$

Тогда для любого $c \in \mathcal{L}$ имеет место $\mathcal{A} \models \phi_{\mathcal{L}}(c)$. Пусть теперь $d \in \mathcal{A}$ и $\mathcal{A} \models \phi_{\mathcal{L}}(d)$. Тогда для некоторого $c \in \mathcal{L}$ имеет место $\mathcal{A} \models D_c^{+\prime}(d)$ и, значит, $D_c^+(x) \subseteq D_d^+(x)$. Тем самым, отображение $\varphi(c) = d$ индуцирует гомоморфизм подалгебры $\langle c\rangle_{\mathcal{A}}$ на подалгебру $\langle d\rangle_{\mathcal{A}}$. В силу предположения об алгебре $\mathcal{A}$ имеет место включение $\langle d\rangle_{\mathcal{A}} \subseteq \langle c\rangle_{\mathcal{A}} \subseteq \mathcal{L}$. Таким образом, позитивная бескванторная формула $\phi_{\mathcal{L}}(x)$ выделяет в $\mathcal{A}$ подалгебру $\mathcal{L}$. Эквивалентность условий 1) и 1$'$) доказана. $\square$

Очевидно, аналогичным образом может быть доказана

**Теорема 1$'$.** *Для любой локально-конечной алгебры $\mathcal{A}$ конечной сигнатуры следующие условия попарно эквивалентны*:

1) *все конечные подалгебры алгебры $\mathcal{A}$ позитивно-открыто-формульны,*

1$'$) *все внутренние гомоморфизмы алгебры $\mathcal{A}$ являются ее внутренними эндоморфизмами*;

2) *все конечные подалгебры алгебры $\mathcal{A}$ открыто-формульны,*

2$'$) *все внутренние изоморфизмы алгебры $\mathcal{A}$ являются ее внутренними автоморфизмами.*

Укажем теперь связь условной термальности преобразований алгебр с формульностью ее подалгебр.

**Теорема 2.** *Для любой конечной алгебры $\mathcal{A}$ следующие условия попарно эквивалентны*:

1) $\mathrm{Aut}\,\mathcal{A} = ECPS\,\mathrm{Aut}\,\mathcal{A}$,

1$'$) $\mathrm{Sub}\,\mathcal{A} = E\,\mathrm{Sub}\,\mathcal{A}$ *и группа* $\mathrm{Aut}\,\mathcal{A}$ *абелева*;

2) $\mathrm{End}\,\mathcal{A} = \exists^+CPS\,\mathrm{End}\,\mathcal{A}$,

2$'$) $\mathrm{Sub}\,\mathcal{A} = \exists^+\,\mathrm{Sub}\,\mathcal{A}$ *и полугруппа* $\mathrm{End}\,\mathcal{A}$ *абелева*;

3) $\operatorname{Iso}\mathcal{A} = CPS\operatorname{Iso}\mathcal{A}$,

3$'$) $\operatorname{Sub}\mathcal{A} = P\operatorname{Sub}\mathcal{A}$ *и полугруппа* $\operatorname{Iso}\mathcal{A}$ *абелева*;

4) $\operatorname{Hom}\mathcal{A} = C^{+}PS\operatorname{Hom}\mathcal{A}$,

4$'$) $\operatorname{Sub}\mathcal{A} = P_{+}\operatorname{Sub}\mathcal{A}$ *и полугруппа* $\operatorname{Hom}\mathcal{A}$ *абелева.*

**Доказательство.** Покажем эквивалентность условий 1) и 1$'$). Пусть имеет место равенство $\operatorname{Aut}\mathcal{A} = ECPS\operatorname{Aut}\mathcal{A}$. Тем самым все подалгебры алгебры $\mathcal{A}$ замкнуты относительно любого автоморфизма алгебры $\mathcal{A}$ и согласно теореме 1 имеет место равенство $\operatorname{Sub}\mathcal{A} = E\operatorname{Sub}\mathcal{A}$. Коммутативность же любой элементарно-условно термальной функции с любым автоморфизмом алгебры влечет абелевость группы $\operatorname{Aut}\mathcal{A}$. Тем самым, действительно, импликация 1) $\to$ 1$'$) имеет место.

Пусть теперь $\operatorname{Sub}\mathcal{A} = E\operatorname{Sub}\mathcal{A}$ и группа $\operatorname{Aut}\mathcal{A}$ абелева. Для любого элемента $a$ из $\mathcal{A}$ через $ED_a(x)$ обозначим элементарный тип элемента $a$, т. е. совокупность всех элементарных формул $\phi(x)$ сигнатуры алгебры $\mathcal{A}$, истинных на элементе $a$. Пусть $\phi_a(x) \in ED_a(x)$ и при этом для любого $b \in \mathcal{A}$ условия $\mathcal{A} \models \phi_a(b)$ и $ED_a(x) = ED_b(x)$ эквивалентны. Таким образом, для любых $a, b \in \mathcal{A}$ отношение $\mathcal{A} \models \phi_a(b)$ равносильно существованию автоморфизма $\psi \in \operatorname{Aut}\mathcal{A}$ такого, что $\psi(a) = b$. Пусть теперь $\varphi$ — произвольный автоморфизм алгебры $\mathcal{A}$ и $a$ — некоторый элемент алгебры $\mathcal{A}$. В силу равенства $\operatorname{Sub}\mathcal{A} = E\operatorname{Sub}\mathcal{A}$, а значит, замкнутости всех подалгебр алгебры $\mathcal{A}$ относительно любого автоморфизма алгебры $\mathcal{A}$ и в силу замеченного выше о формулах $\phi_a(x)$, имеет место включение $\{b \in \mathcal{A} \mid \mathcal{A} \models \phi_a(b)\} \subseteq \langle a\rangle_{\mathcal{A}}$. Таким образом, $\varphi(a) \in \langle a\rangle_{\mathcal{A}}$ и, значит, найдется терм $t_{a,\varphi}(x)$ такой, что $\varphi(a) = t_{a,\varphi}(a)$. Для любого $c \in \mathcal{A}$ такого, что $\mathcal{A} \models \phi_a(c)$, пусть $\psi_c \in \operatorname{Aut}\mathcal{A}$ таков, что $\psi_c(a) = c$. Так как $\operatorname{Aut}\mathcal{A}$ абелева, то

$$\varphi(c) = \varphi(\psi_c(a)) = \psi_c(\varphi(a)) = \psi_c(t_{a,\varphi}(a)) = t_{a,\varphi}(\psi_c(a)) = t_{a,\varphi}(c).$$

Таким образом, на множестве $\{b \in \mathcal{A} \mid \mathcal{A} \models \phi_a(b)\}$ автоморфизм $\varphi$ определим термом $t_{a,\varphi}(x)$. Пусть теперь $\{\phi_{a_1}(x), \ldots, \phi_{a_k}(x)\}$ таково, что $\{\{b \in \mathcal{A} \mid \mathcal{A} \models \phi_{a_i}(b)\} \mid i \leq k\}$ — дизъюнктное покрытие алгебры $\mathcal{A}$. Тогда автоморфизм $\varphi$ определяется на алгебре $\mathcal{A}$ элементарно-условным термом

$$t_{\varphi}(x) = \begin{cases} \phi_{a_1}(x) \to t_{a_1,\varphi}(x), \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ \phi_{a_k}(x) \to t_{a_k,\varphi}(x). \end{cases}$$

Тем самым импликация 1$'$) $\to$ 1) доказана.

Аналогичным образом доказывается эквивалентность других пар условий из формулировки теоремы.

Покажем, что требование абелевости $\operatorname{Aut}\mathcal{A}$ и равенство $\operatorname{Sub}\mathcal{A} = E\operatorname{Sub}\mathcal{A}$ независимы. Действительно, пусть $\mathcal{A}_1 = \langle\{0,1\}; f^1\rangle$ и $f(0) = 0,\ f(1) = 1$. Тем самым $\operatorname{Aut}\mathcal{A}$ — циклическая группа и абелева, но подалгебры $\{0\}$ и $\{1\}$ алгебры $\mathcal{A}$ не являются элементарно-формульными. Пусть теперь $\mathcal{A}_2 = \langle\{1,2,3,4,5,6\}; f^1, g^1\rangle$ и функции $f$ и $g$ определимы таблицей

| $x$ | $f(x)$ | $g(x)$ |
|---|---|---|
| 1 | 4 | 2 |
| 2 | 6 | 3 |
| 3 | 5 | 1 |
| 4 | 1 | 5 |
| 5 | 3 | 6 |
| 6 | 2 | 4 |

Отображения $\varphi$ и $\psi$ множества $\{1,2,3,4,5,6\}$ в себя определим таблицей

| $x$ | $\varphi(x)$ | $\psi(x)$ |
|---|---|---|
| 1 | 2 | 4 |
| 2 | 3 | 5 |
| 3 | 1 | 6 |
| 4 | 6 | 1 |
| 5 | 4 | 2 |
| 6 | 5 | 3 |

Непосредственно проверяется, что $\varphi$ и $\psi$ являются автоморфизмами алгебры $\mathcal{A}_2$, $\varphi\psi \neq \psi\varphi$ и, в то же время, $\mathrm{Sub}\,\mathcal{A}_2 = \{\mathcal{A}_2\} = E\,\mathrm{Sub}\,\mathcal{A}_2$. Заметим также, что поскольку алгебра $\mathcal{A}_2$ однородна (для любых $a, b \in \mathcal{A}_2$ существует автоморфизм $\eta$ алгебры $\mathcal{A}$ такой, что $\eta(a) = b$), то все элементарно-условно термальные функции одной переменной на алгебре $\mathcal{A}_2$ являются ее термальными функциями. При этом столь же непосредственно (с учетом тождеств $f^2(x) = x$, $g^3(x) = x$ и $g(f(x)) = f(g^2(x))$ истинных на алгебре $\mathcal{A}_2$) нетрудно проверить, что автоморфизм $\varphi$ не является термальным, а значит, и элементарно-условно термальным автоморфизмом алгебры $\mathcal{A}_2$.

В силу того, что $\mathrm{Sub}\,\mathcal{A}_2 = \{\mathcal{A}_2\} = E\,\mathrm{Sub}\,\mathcal{A}_2$, а значит, $\mathrm{Aut}\,\mathcal{A}_2 = \mathrm{End}\,\mathcal{A}_2 = \mathrm{Iso}\,\mathcal{A}_2 = \mathrm{Hom}\,\mathcal{A}_2$ алгебра $\mathcal{A}_2$ служит наряду с алгеброй $\mathcal{A}_1$ доказательством независимости двух требований, составляющих условия $2'$), $3'$), $4'$) в формулировке теоремы 2. $\square$

Заметим также, что аналогично доказательству теоремы 2 может быть доказана

**Теорема 2′.** *Для любой локально конечной алгебры $\mathcal{A}$ конечной сигнатуры следующие условия попарно эквивалентны*:

3) *все внутренние изоморфизмы алгебры $\mathcal{A}$ между конечными подалгебрами условно термальны,*

3′) *все конечные подалгебры алгебры $\mathcal{A}$ открыто формульны и полугруппа внутренних изоморфизмов алгебры $\mathcal{A}$ абелева,*

4) *все внутренние гомоморфизмы алгебры $\mathcal{A}$ между конечными подалгебрами позитивно условно термальны,*

4′) *все конечные подалгебры алгебры $\mathcal{A}$ позитивно открыто формульны и полугруппа внутренних гомоморфизмов алгебры $\mathcal{A}$ абелева.*

## Литература


1. Пинус А.Г. *О собственных автоморфизмах универсальных алгебр* // Сиб. матем. журн. – 2004. – Т. 45. – № 6. – С. 1329–1337.
2. Пинус А.Г. *О полурешетках формульных подалгебр* // Алгебра и логика. – 2005. – Т. 44. – № 4. – С. 474–482.
3. Пинус А.Г. *Условные термы и их приложения в алгебре и теории вычислений* // УМН. – 2001. – Т. 56. – № 2. – С. 37–72.
4. Пинус А.Г. *Условные термы и их приложения в алгебре и теории вычислений.* – Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2002. – 237 с.



*Новосибирский государственный технический университет*



*Поступила*
10.03.2004