ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2000 МАТЕМАТИКА № 9 (460)

УДК 517.938

М.Т. ТЕРЁХИН

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ УПРАВЛЕНИЯ ПО ПАРАМЕТРУ

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений вида

$$\dot{x} = f(t, x, y, \lambda), \tag{1}$$

в которой $x \in E_n$, $u \in E_r$, $\lambda \in E_m$, u — управление, λ — параметр, $t \in [\alpha, \beta]$, E_s — s-мерное векторное пространство, α, β ($\alpha < \beta$) — некоторые постоянные числа. Множество U допустимых управлений составляют измеримые ограниченные на сегменте $[\alpha, \beta]$ r-мерные вектор-функции u. При любом $u \in U$ и любом $\lambda \in E_m$ под решением системы (1), определенным на некотором сегменте, будем понимать вектор-функцию, абсолютно непрерывную, почти всюду на этом сегменте удовлетворяющую системе (1).

Определение 1. Пусть x_0, x_1 — точки пространства E_n. Система (1) при $\lambda = \overline{\lambda}$ называется управляемой в точках x_0, x_1 (в точке x_0 при условии, что $x_0 = x_1$), если существует управление $\overline{u} \in U$ такое, что система (1) при $u = \overline{u}$, $\lambda = \overline{\lambda}$ имеет решение $x(t)$, определенное на сегменте $[\alpha, \beta]$ и удовлетворяющее краевым условиям

$$x(\alpha) = x_0, \quad x(\beta) = x_1. \tag{2}$$

Для краткости записей систему (1), удовлетворяющую определению 1, далее будем называть управляемой.

В данной статье ставится задача — определить условия сохранения (потери) управляемости системы (1) при изменении параметра в предположении, что при некотором значении параметра система (1) управляема. С этой целью вводится понятие устойчивости (неустойчивости) управления по параметру. Параметр λ можно интерпретировать как оценку влияния внешних воздействий на управляемую систему. Аналогичная задача изучалась в [1], [2], где одним из условий являлось требование полной управляемости системы линейного приближения системы (1). Основные результаты статьи получены без предположения о полной управляемости системы линейного приближения. Исследованы случаи, когда у системы (1) вообще отсутствует система линейного приближения.

В общем случае не все координаты вектора λ могут оказывать воздействие на управляемую систему. Поэтому вводятся функции φ и ψ натурального аргумента, определяющие номера координат вектора λ, которые воздействуют на управляемую систему, и номера координат вектора λ, которые такого воздействия не оказывают.

Вектор-функцию, определенную на сегменте $[\alpha, \beta]$ и при некоторых $u \in U$ и $\lambda \in E_m$ удовлетворяющую равенствам (1), (2), назовем решением задачи (1), (2). Символом $x(t, x_0, u, \lambda)$ обозначим решение системы (1), удовлетворяющее условию $x(\alpha, x_0, u, \lambda) = x_0$, $u \in U$, $\lambda \in E_m$.

Пусть $x(t, x_0, u_0, \lambda_0)$ — решение задачи (1), (2). Положим

$$z = x - x(t, x_0, u_0, \lambda_0), \quad \vartheta = u - u_0, \quad \mu = \lambda - \lambda_0. \tag{3}$$

Тогда система (1) сведется к системе

$$\dot{z} = f_1(t, z, \vartheta, \mu), \tag{4}$$

в которой $f_1(t,z,\vartheta,\mu)=f(t,z+x(t,x_0,u_0,\lambda_0),\vartheta+u_0,\mu+\lambda_0)-f(t,x(t,x_0,u_0,\lambda_0),u_0,\lambda_0)$, при этом краевые условия (2) принимают вид

$$z(\alpha)=z(\beta)=0. \tag{5}$$

Пусть $G(k_1)=\{1,2,\ldots,k_1\}$, $F(k_2)=\{k_2+1,k_2+2,\ldots,m_2\}$, $k_1\le m_1$, $k_2\le m_2$, k_1, k_2, m_1, m_2 — натуральные числа. На множестве $G(k_1)$ определим функцию $\varphi(\cdot,k_1)$ такую, что при любом $i\in G(k_1)$ $\varphi(i,k_1)\in G(m_1)$ и при любых i, j из множества $G(k_1)$, $i<j$, выполнено неравенство $\varphi(i,k_1)<\varphi(j,k_1)$. В частности, если $k_1=m_1$, то для любого $i\in G(m_1)$ $\varphi(i,m_1)=i$. На множестве $F(k_2)$ определим функцию $\psi(\cdot,k_2)$, при любом $i\in F(k_2)$ удовлетворяющую включению $\psi(i,k_2)\in G(m_2)$, причем для любых i, j из множества $F(k_2)$, $i<j$, выполнено неравенство $\psi(i,k_2)<\psi(j,k_2)$. Если $m_1=m_2=m$, $k_1=k_2=k$, то функции $\varphi(\cdot,k)$ и $\psi(\cdot,k)$ таковы, что при любых $i\in G(k)$ и $j\in F(k)$ $\varphi(i,k)\ne\psi(j,k)$, при $k=m$ функция $\psi(\cdot,k)$ не определена.

Пусть $E[\varphi(\cdot,k)]$ — множество всех k-мерных векторов $(\mu_{\varphi(1,k)},\mu_{\varphi(2,k)},\ldots,\mu_{\varphi(k,k)})$, $E[\psi(\cdot,k)]$ — множество всех $(m-k)$-мерных векторов $(\mu_{\psi(k+1,k)},\mu_{\psi(k+2,k)},\ldots,\mu_{\psi(m,k)})$, где при любом $i\in G(k)$ и любом $j\in F(k)$ $\mu_{\varphi(i,k)}$, $\mu_{\psi(j,k)}$ — соответственно $\varphi(i,k)$-я, $\psi(j,k)$-я координаты вектора $\mu\in E_m$. Тогда вектор $\mu\in E_m$ символически запишем как $\mu=(p,q)$, где $p\in E[\varphi(\cdot,k)]$, $q\in E[\psi(\cdot,k)]$.

Пусть $\vartheta_0\in U$, $\mu_0\in E_m$ таковы, что $z(t,\vartheta_0,\mu_0)$ — решение задачи (4), (5). Введем следующие обозначения: $D(\delta_0)=\{(t,z,\vartheta,\mu):t\in[\alpha,\beta],\ z\in E_n,\ \vartheta\in E_r,\ \mu\in E_m,\ |z|\le\delta_0,\ |\vartheta|\le\delta_0,\ |\mu|\le\delta_0\}$, $|z|=\max\limits_i|z_i|$, $\|h\|=\sup\limits_{t\in[\alpha,\beta]}|h(t)|$, h — вектор-функция, определенная на сегменте $[\alpha,\beta]$, $|B|=\sup\limits_{|z|\le1}|Bz|$, B — матрица, $\|B\|=\sup\limits_{t\in[\alpha,\beta]}|B(t)|$, $w(\delta_0)=\{\vartheta\in U,\ \|\vartheta\|\le\delta_0\}$, $P(k,\delta_0)=\{p\in E[\varphi(\cdot,k)]:|p|\le\delta_0\}$, $Q(k,\delta_0)=\{q\in E[\psi(\cdot,k)]:|q|\le\delta_0\}$, $T(\delta_0)=[\alpha,\beta]\times w(\delta_0)\times P(m,\delta_0)$, $V(\delta_0)=\{c\in E_n:|c|\le\delta_0\}$, $\delta_0>0$ — некоторое число.

Определение 2. Пусть $\vartheta_0\in U$, $\mu_0\in E_m$. Пару (ϑ_0,μ_0) назовем согласованной с задачей (4), (5), если вектор-функция $z(t,\vartheta_0,\mu_0)$ является решением задачи (4), (5).

Непосредственной подстановкой в систему (4) убеждаемся, что пара (ϑ_0,μ_0), в которой $\vartheta_0=0$, $\mu_0=0$, согласована с задачей (4), (5). В этом случае решением задачи (4), (5) является $z(t)\equiv0$. Такую пару далее будем называть тривиальной парой задачи (4), (5).

Определение 3. Управление $\vartheta_0=0$ назовем устойчивым по параметру μ, если существуют числа $\delta_1>0$, $\delta_2>0$, натуральное число $k\le m$ и функции $\varphi(\cdot,k)$, $\psi(\cdot,k)$ такие, что для любого вектора $p\in P(k,\delta_1)$ существуют вектор $q\in Q(k,\delta_2)$ и управление $\vartheta\in w(\delta_0)$, при которых пара (ϑ,μ) согласована с задачей (4), (5).

Определение 4. Тривиальную пару задачи (4), (5) назовем устойчивой, если существует непустое множество $w^*\subseteq w(\delta_0)$ такое, что для любого управления $\vartheta\in w^*$ существует вектор $\mu\in P(m,\delta_0)$, при котором пара (ϑ,μ) согласована с задачей (4), (5).

Определение 5. Управление $\vartheta_0=0$ назовем условно устойчивым по параметру μ, если существует такое непустое множество $N\subset E_m$, что для любого вектора $\mu\in N\cap P(m,\delta_0)$ существует управление $\vartheta\in w(\delta_0)$, при котором пара (ϑ,μ) согласована с задачей (4), (5).

Определение 6. Управление $\vartheta_0=0$ назовем неустойчивым по параметру μ, если существуют числа $\delta_1>0$, $\delta_2>0$ такие, что при любом $\mu\in P(m,\delta_1)$, любом $\vartheta\in w(\delta_2)$, $|\mu|+\|\vartheta\|\ne0$, пара (ϑ,μ) не согласована с задачей (4), (5).

Определение 7. Управление $\vartheta_0=0$ назовем условно неустойчивым по параметру μ, если существуют число $\delta_1>0$ и множество $w^{**}\subseteq w(\delta_0)$ такие, что при любом $\mu\in P(m,\delta_1)$ и любом $\vartheta\in w^{**}$, $|\mu|+\|\vartheta\|\ne0$, пара (ϑ,μ) не согласована с задачей (4), (5).

Далее всюду будем предполагать, что существует такое число $\delta_1 \in]0, \delta_0]$, что при любом $\vartheta \in w(\delta_1)$, любом $\mu \in P(m, \delta_1)$ система (4) имеет решение $z(t.\vartheta, \mu)$, определенное на сегменте $[\alpha, \beta]$, непрерывно зависящее от управления и параметра, $|z(t, \vartheta, \mu)| \le \delta_0$. Для простоты записей будем считать $\delta_1 = \delta_0$.

Пусть $z = z(t, \vartheta_0, \mu_0)$ — решение системы (4), удовлетворяющее условию $z(\alpha, \vartheta_0, \mu_0) = 0$, $\vartheta_0 \in w(\delta_0)$, $\mu_0 \in P(m, \delta_0)$. Одновременно с системой (4) с краевыми условиями (5) рассмотрим систему

$$\dot{y} = f_1(t, z(t, \vartheta_0, \mu_0), \vartheta, \mu) \tag{6}$$

с краевыми условиями

$$y(\alpha) = y(\beta) = 0. \tag{7}$$

Теорема 1. *Пара* (ϑ_0, μ_0) *согласована с задачей* (4), (5) *тогда и только тогда, когда она согласована с задачей* (6), (7).

Доказательство. Необходимость утверждения очевидна.

Достаточность. Так как пара (ϑ_0, μ_0) согласована с задачей (6), (7), то при $\vartheta = \vartheta_0$, $\mu = \mu_0$ существует вектор-функция $y(t)$, являющаяся решением задачи (6), (7). Но т. к. система (6) при $\vartheta = \vartheta_0$, $\mu = \mu_0$ обладает свойством единственности решения, то $y(t) = z(t, \vartheta_0, \mu_0)$ при любом $t \in [\alpha, \beta]$. Следовательно, пара (ϑ_0, μ_0) согласована с задачей (4), (5). $\square$

Теорема 2. *Для того чтобы пара* (ϑ_0, μ_0) *была согласована с задачей* (4), (5), *необходимо и достаточно, чтобы пара* (ϑ_0, μ_0) *удовлетворяла равенству*

$$\int_\alpha^\beta f_1(t, z(t, \vartheta, \mu), \vartheta, \mu) dt = 0. \tag{8}$$

Теорема непосредственно следует из теоремы 1.

Заметим, что если существует число $\delta \in]0, \delta_0]$, при котором $f_1(t, 0, \vartheta, \mu) \equiv 0$ на множестве $T(\delta)$, то любая пара (ϑ, μ), удовлетворяющая включениям $\vartheta \in w(\delta)$, $\mu \in P(m, \delta)$, согласована с задачей (4), (5). Следовательно, в этом случае управление $\vartheta_0 = 0$ устойчиво по параметру μ, и тривиальная пара устойчива. Поэтому содержательным является случай, когда $f_1(t, 0, \vartheta, \mu) \not\equiv 0$ на множестве $T(\delta_0)$. Можно убедиться, что в этом случае наиболее общим для вектор-функции $f_1(t, z, \vartheta, \mu)$ является представление

$$f_1(t, z, \vartheta, \mu) = b(t, \vartheta) + s_0(t, \mu) + l(t, \vartheta, \mu) + \varphi(t, z, \vartheta, \mu), \tag{9}$$

в котором на множестве $T(\delta_0)$ выполняются условия $s_0(t, 0) \equiv b(t, 0) \equiv 0$, $\varphi(t, 0, \vartheta, \mu) \equiv 0$, $l(t, 0, \mu) = l(t, \vartheta, 0) \equiv 0$ и выполнено хотя бы одно из следующих неравенств: $s_0(t, \mu) \not\equiv 0$, $b(t, \vartheta) \not\equiv 0$, $l(t, \vartheta, \mu) \not\equiv 0$.

Далее будем предполагать, что в системе (4) вектор-функция $f_1(t, z, \vartheta, \mu)$ определяется равенством (9) и выполнены следующие условия:

1. вектор-функция $b(t, \vartheta)$ представима равенством $b(t, \vartheta) = B(t)\vartheta + b_0(t, \vartheta)$, где $B(t)$ — ограниченная измеримая на сегменте $[\alpha, \beta]$ $n \times r$-матрица, $b_0(t, \vartheta)$ — при любом $\vartheta \in w(\delta_0)$ ограниченная измеримая на сегменте $[\alpha, \beta]$ вектор-функция;

2. при любых $\mu \in P(m, \delta_0)$ и $v \in W(\delta_0)$ вектор-функции $s_0(t, \mu)$, $l(t, v, \mu)$ ограничены и измеримы на сегменте $[\alpha, \beta]$;

3. на множестве $D(\delta_0)$ вектор-функция $\varphi(t, z, \vartheta, \mu)$ представима в виде $\varphi(t, z, \vartheta, \mu) = A(t)z + \gamma(t, z, \vartheta, \mu)$, в котором $A(t)$ — измеримая ограниченная на сегменте $[\alpha, \beta]$ $n \times n$-матрица, $\gamma(t, z, \vartheta, \mu) = \Gamma(t, z, \vartheta, \mu)z$, $\lim\limits_{z \to 0} \Gamma(t, z, \vartheta, \mu) = 0$ равномерно на множестве $T(\delta_0)$, существует суммируемая на сегменте $[\alpha, \beta]$ функция $m(t)$ такая, что при любых $\vartheta \in w(\delta_0)$, $\mu \in P(m, \delta_0)$ и любой непрерывной на сегменте $[\alpha, \beta]$ вектор-функции $\omega(t)$ ($\|\omega\| \le \delta_0$) матрица $\Gamma(t, \omega(t), \vartheta, \mu)$ размерности $n \times n$ измерима на этом сегменте, и $|\Gamma(t, \omega(t), \vartheta, \mu)| \le m(t)$.

Пусть $n(t,\vartheta,\mu)=|b(t,\vartheta)+s_0(t,\mu)+l(t,\vartheta,\mu)|$, $\lambda=\max\{\|\vartheta\|,|\mu|\}$.

Лемма. *Если* $\lim\limits_{\lambda\to 0}\int_\alpha^\beta n(t,\vartheta,\mu)dt=0$, *то*

а) *равномерно на сегменте* $[\alpha,\beta]$ $\lim\limits_{\lambda\to 0} z(t,\vartheta,\mu)=0$,

б) $\int_\alpha^\beta \gamma(t,z(t,\vartheta,\mu),\vartheta,\mu)dt=o\Big(\int_\alpha^\beta n(t,\vartheta,\mu)dt\Big)$.

Доказательство. Из системы (4) следует, что для любых $\vartheta\in w(\delta_0)$, $\mu\in P(m,\delta_0)$

$$|z(t,\vartheta,\mu)|\le\int_\alpha^\beta n(t,\vartheta,\mu)dt+\int_\alpha^t|A(\xi)+\Gamma(\xi,z(\xi,\vartheta,\mu),\vartheta,\mu)|\,|z(\xi,\vartheta,\mu)|d\xi.$$

Тогда согласно лемме Гронуолла-Беллмана ([3], с. 108)

$$|z(t,\vartheta,\mu)|\le\int_\alpha^\beta n(t,\vartheta,\mu)dt\,\exp\int_\alpha^\beta|A(t)+\Gamma(t,z(t,\vartheta,\mu),\vartheta,\mu)|dt. \qquad (10)$$

Отсюда следует утверждение а). Утверждение б) следует из неравенства (10) и того, что

$$\Big|\int_\alpha^\beta\gamma(t,z(t,\vartheta,\mu),\vartheta,\mu)dt\Big|\le\int_\alpha^\beta|\Gamma(t,z(t,\vartheta,\mu),\vartheta,\mu)|dt\int_\alpha^\beta n(t,\vartheta,\mu)dt\,\exp\int_\alpha^\beta(|A(t)|+m(t))dt.\quad\square$$

Далее будем полагать, что условие леммы выполнено. Пусть $Z(t)$ — фундаментальная матрица системы $\dot z=A(t)z$, $Z(\alpha)=E$, E — единичная матрица. Очевидно, что система (8) эквивалентна системе

$$\int_\alpha^\beta Z^{-1}(t)[b(t,\vartheta)+s_0(t,\mu)+l(t,\vartheta,\mu)+\gamma(t,z(t,\vartheta,\mu),\vartheta,\mu)]dt=0. \qquad (11)$$

Положим $Y(t)=Z^{-1}(t)B(t)$. Оператор F, заданный на множестве $w(\delta_0)$, определим равенством $F\vartheta=\int_\alpha^\beta Y(t)\vartheta(t)dt$. При любом фиксированном $\mu\in P(m,\delta_0)$ вектор-функцию $\vartheta\in w(\delta_0)$, удовлетворяющую равенству (11), будем отыскивать в виде $\vartheta(t)=Y^*(t)c+rv(t)$, где $Y^*(t)$ — матрица, сопряженная для матрицы $Y(t)$, $c=(c_1,c_2,\dots,c_n)$ — постоянный вектор, r — действительное число, $v\in\ker F\subset w(\delta_0)$.

Пусть $\varepsilon=\max\{|c|,|\mu|,|r|\}$, $K(\delta_0)=\{(c,\mu,r):\varepsilon\le\delta_0\}$, $\int_\alpha^\beta n(t,\vartheta,\mu)dt/\varepsilon$ ограничено на множестве $K(\delta_0)\times\ker F$. Тогда согласно лемме решение $z(t,\vartheta,\mu)$ $(z(\alpha,\vartheta,\mu)=0)$ системы (4) представимо в виде

$$z(t,\vartheta,\mu)=Z(t)\int_\alpha^t Z^{-1}(\xi)[b(\xi,\vartheta)+s_0(\xi,\mu)+l(\xi,\vartheta,\mu)]dt+o(\varepsilon), \qquad (12)$$

$\lim\limits_{\varepsilon\to 0}o(\varepsilon)/\varepsilon=0$ равномерно относительно $v\in\ker F$. Для определения величин c, μ, r, v, удовлетворяющих равенству (11), получим систему уравнений

$$Mc+b_1(c,r,v)+s(\mu)+l_1(c,\mu,r,v)+o(\varepsilon)=0, \qquad (13)$$

в которой

$$M=\int_\alpha^\beta Y(t)Y^*(t)dt,\quad b_1(c,r,v)=\int_\alpha^\beta Z^{-1}(t)b_0(t,Y^*(t)c+rv(t))dt,$$
$$s(\mu)=\int_\alpha^\beta Z^{-1}(t)s_0(t,\mu)dt,\quad l_1(c,\mu,r,v)=\int_\alpha^\beta Y^{-1}(t)l(t,Y^*(t)c+rv(t),\mu)dt.$$

Очевидно, что M — $n\times n$-матрица, которую представим равенством $M=[m_{ij}]_l^n$.

Далее всюду будем полагать, что существует число $\delta^* > 0$ такое, что для любой вектор-функции $v = \ker F$ на множестве $K(\delta^*)$ вектор-функции $b_1(c,r,v)$, $s(\mu)$, $l_1(c,\mu,r,v)$, $o(\varepsilon)$ непрерывны и $\vartheta(t) = Y^*(t)c + rv(t) \in w(\delta_0)$.

Теорема 3. *Если* $\det M \neq 0$, $\lim\limits_{\mu\to 0} s(\mu) = 0$, *для любой вектор-функции* $v \in \ker F$ $b_1(c,r,v) = o(\varepsilon)$, $l_1(c,\mu,r,v) = o(\varepsilon)$, *то* $\vartheta_0 = 0$ *устойчиво по параметру* μ.

Доказательство. Пусть $v \in \ker F$ — произвольная, но фиксированная вектор-функция. Убедимся, что существует число $\delta_1 \in]0, \delta^*]$ такое, что для любого вектора $\mu \in P(m, \delta_1)$ существуют вектор c и число r, удовлетворяющие включению $(c, \mu, r) \in V(\delta^*)$ и равенству (13). При любом фиксированном $\mu \in P(m, \delta^*)$ оператор Γ_0 определим равенством $\Gamma_0 c = -M^{-1}[b_1(c,r,v) + s(\mu) + l_1(c,\mu,r,v) + o(\varepsilon)]$. Число $\delta_1 \in]0, \delta^*]$ выберем таким образом, чтобы при любом $\varepsilon \le \delta_1$ выполнялось неравенство $|M^{-1}[b_1(c,r,v) + l_1(c,\mu,r) + o(\varepsilon)]| < \frac{\delta_1}{2}$. Кроме того, из равенства $\lim\limits_{\mu\to 0} s(\mu) = 0$ следует, что существует такое число $\delta_2 \in]0, \delta_1]$, что при $\mu \in P(m, \delta_2)$ выполнено неравенство $|s(\mu)| < \frac{\delta_1}{2}$. А это значит, что при любых фиксированных $\mu \in P(m, \delta_2)$, $|r| \le \delta_1$, любом $c \in V(\delta_1)$ оператор Γ_0 удовлетворяет неравенству $|\Gamma_0 c| < \delta_1$. Следовательно, существует вектор $c^* \in V(\delta_1)$ такой, что $\Gamma_0 c^* = c^*$. Таким образом, для любого вектора $\mu \in P(m, \delta_2)$, любого числа r ($|r| \le \delta_1$) существует управление $\vartheta(t) = Y^*(t)c^* + rv \in w(\delta_0)$, при котором пара (ϑ, μ) согласована с задачей (4), (5), т. е. управление $\vartheta_0 = 0$ устойчиво по параметру μ. □

Пусть вектор-функция $s(\mu)$ представима в виде $s(\mu) = S\mu + s_1(\mu)$, в котором S — постоянная $n \times m$-матрица, $S = [s_{ij}]$.

Теорема 4. *Если* 1) $\det M = 0$; 2) *существуют натуральные числа* $k < n$, $d < m$ *и функции* $\varphi(\cdot, k)$, $\psi(\cdot, d)$, *определенные соответственно на множествах* $G(k)$, $F(d)$, $k + m - d = n$, $\varphi(G(k), k) \subset G(n)$, $\psi(F(d), d) \subset G(m)$, *такие, что матрица* $\Delta = [\mathrm{colon}(m_{1\varphi(1,k)}, \ldots, m_{n\varphi(1,k)}), \ldots, \mathrm{colon}(m_{1\varphi(k,k)}, \ldots, m_{n\varphi(k,k)}), \mathrm{colon}(s_{1\psi(d+1,d)}, \ldots, s_{n\psi(d+1,d)}), \ldots, \mathrm{colon}(s_{1\psi(m,d)}, \ldots, s_{n\psi(m,d)})]$ *неособенная*; 3) *для любой вектор-функции* $v \in \ker F$ *выполнены равенства* $b_1(c,r,v) = o(\varepsilon)$, $l_1(c,\mu,r,v) = o(\varepsilon)$; 4) $s_1(\mu) = o(|\mu|)$, *то управление* $\vartheta_0 = 0$ *устойчиво по параметру* μ.

Доказательство. Пусть $v \in \ker F$ — произвольная, но фиксированная вектор-функция. Для простоты рассуждений можно считать $\varphi(i,k) = i$, $\psi(j,d) = j$ при любых $i \in G(k)$, $j \in F(d)$. Этого всегда можно достигнуть перестановкой столбцов в матрицах M и S. Пусть $z = (c_1, c_2, \ldots, c_k, \mu_{d+1}, \mu_{d+2}, \ldots, \mu_m)$, $z_1 = (c_{k+1}, c_{k+2}, \ldots, c_n)$, $p = (\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_d)$, $M = [M_1, M_2]$, $S = [S_1, S_2]$, где M_1 — $n \times k$-матрица, M_2 — $n \times (n-k)$-матрица, S_1 — $n \times d$-матрица, S_2 — $n \times (m-d)$-матрица. Следовательно, $\Delta = [M_1, S_2]$. Учитывая систему (13), оператор Γ_1 определим равенством $\Gamma_1 z = -\Delta^{-1}[M_2 z_1 + S_1 p + b_1(c,r,v) + s_1(\mu) + l_1(c,\mu,r,v) + o(\varepsilon)]$. Как и при доказательстве теоремы 3, устанавливаем существование чисел $\delta_1 \in]0, \delta^*]$, $\delta_2 \in]0, \delta^*]$, $\delta_3 \in]0, \delta_1]$ таких, что при любых фиксированных z_1, p, r, удовлетворяющих неравенствам $|z_1| \le \delta_3$, $|p| \le \delta_2$, $|r| \le \delta_1$, оператор Γ_1 на множестве $\{z \in E_n : |z| \le \delta_1\}$ имеет неподвижную точку. Таким образом, для любого вектора $p \in P(k, \delta_2)$ существует вектор $q = (\mu_{d+1}, \ldots, \mu_m) \in Q(d, \delta_1)$ и управление $\vartheta(t) = Y^* c + rv(t) \in w(\delta_0)$, при которых пара (ϑ, μ) согласована с задачей (4), (5), т. е. управление $\vartheta_0 = 0$ устойчиво по параметру μ. □

Теорема 5. *Пусть* 1) $m = n$, $\det S \neq 0$; 2) *выполнены условия* 3) *и* 4) *теоремы* 4. *Тогда тривиальная пара задачи* (4), (5) *устойчива.*

Доказательство. Пусть $w^*(\delta) = \{\vartheta(t) = Y^*(t)c + rv(t) : v \in \ker F,\ c \in V(\delta),\ |r| \le \delta\}$. Оператор Γ_2 определим равенством $\Gamma_2 \mu = -S^{-1}[Mc + b_1(c,r,v) + s_1(\mu) + l_1(c,\mu,r,v) + o(\varepsilon)]$. Учитывая условие 2 теоремы, устанавливаем существование чисел $\delta_1 \in]0, \delta^*]$, $\delta_2 \in]0, \delta^*]$ таких, что при любом $\vartheta \in w^*(\delta_2)$ оператор Γ_2 на множестве $P(m, \delta_1)$ имеет неподвижную точку. А это значит, что для любого управления $\vartheta \in w^*(\delta_2)$ существует вектор $\mu \in P(m, \delta_1)$, при котором пара (ϑ, μ) согласована с задачей (4), (5), т. е. тривиальная пара задачи (4), (5) устойчива. □

Теорема 6. *Пусть* 1) *в равенстве* (9) $b(t,\vartheta)\equiv 0$ *на множестве* $[\alpha,\beta]\times w(\delta_0)$; 2) $\operatorname{rang} S = m-d$, $d\geq 1$, $s_1(\mu)=o(|\mu|)$; 3) *для любой вектор-функции* $v\in\ker F$ *выполнено равенство* $l_1(c,\mu,r,v)=L_0(c)\mu+l_2(c,\mu,r,v)$, *в котором* $L_0(c)$ — $n\times m$-*матрица, элементы которой линейно зависят от координат вектора* c, $l_2(c,\lambda\mu,r,v)=\lambda^k l_2^*(c,\mu,\lambda,r,v)$, $k\geq 1$, $\lambda>0$, *для любого вектора* $\mu\in P(m,\delta_0)$ *и любого числа* $\lambda>0$ $l_2^*(c,\mu,\lambda,r,v)=o(|c|)$ *при* $r=|c|$; 4) *существует* d-*мерный вектор* e $(|e|=1)$, *удовлетворяющий неравенству* $\det L_0^*(Re)\neq 0$, *где* $L_0^*(\mu)$ — $n\times n$-*матрица, определенная равенством* $L_0(c)\mu=L_0^*(\mu)c$, R — $m\times d$-*матрица, столбцами которой являются линейно независимые решения системы* $S\mu=0$. *Тогда управление* $\vartheta_0=0$ *условно устойчиво по параметру* μ.

Доказательство. Согласно условиям теоремы и равенству (10) равенство (13) можно записать в виде

$$S\mu+s_1(\mu)+L_0^*(\mu)c+l_2(c,\mu,r,v)+o(|\mu|)=0. \tag{14}$$

Положив в равенстве (14) $\mu=R\gamma$, получим

$$L_0^*(R\gamma)c+s_1(R\gamma)+l_2(c,R\gamma,r,v)+o(|R\gamma|)=0. \tag{15}$$

Пусть $\rho=|\gamma|$, $e_i=\gamma_i/\rho$, $e=(e_1,e_2,\dots,e_d)$. Выберем d-мерный вектор e^* $(|e^*|=1)$ таким образом, чтобы $\det L_0^*(Re^*)\neq 0$. Равенство (15) примет вид $L_0^*(Re^*)c+\rho^{k-1}l_2^*(c,\mu,\rho,r,v)+O(\rho)=0$. Оператор Γ_2 определим равенством $\Gamma_2 c=-[L_0^*(Re^*)]^{-1}[\rho^{k-1}l_2^*(c,\mu,\rho,|c|,v)+O(\rho)]$, в котором $r=|c|$.

Условия 2), 3) теоремы обеспечивают существование таких чисел $\delta_1\in]0,\delta^*]$, $\delta_2>0$, что при любом фиксированном $\rho^*<\delta_2$ и любом векторе $c\in V(\delta_1)$ выполнено неравенство $|\Gamma_2 c|<\delta_1$. Следовательно, оператор Γ_2 на множестве $V(\delta_1)$ имеет неподвижную точку. Таким образом, управление $\vartheta_0=0$ условно устойчиво по параметру μ, множество N (см. определение 5) определяется равенством $N=\{\mu=R\rho e^*:\rho<\delta_2\}$. $\square$

Теорема 7. *Пусть* 1) $m=n$, *в равенстве* (9) $s_0(t,\mu)\equiv 0$ *на множестве* $[\alpha,\beta]\times P(n,\delta_0)$; 2) $\operatorname{rang} M=n-d$, $d\geq 1$, *при* $r=|c|$ $b_1(c,r,v)=o(|c|)$; 3) *для любой вектор-функции* $v\in\ker F$ *выполнено равенство* $l_1(c,\mu,r,v)=L_0(c)\mu+l_2(c,\mu,r,v)$, *в котором* $L_0(c)$ — $n\times n$-*матрица, для любого числа* $\lambda>0$ $L_0(\lambda c)=\lambda L_0(c)$, $l_2(\lambda c,\mu,\lambda r,v)=\lambda^k\overline{l}_2(c,\mu,\lambda,|c|,v)$, $k\geq 1$, *для любого вектора* $c\in V(\delta^*)$ $\overline{l}_2(c,\mu,\lambda,|c|,v)=o(\mu)$; 4) *существует* d-*мерный вектор* e $(|e|=1)$, *удовлетворяющий равенству* $\det L_0(Re)\neq 0$, *где* R — $n\times d$-*матрица, столбцами которой являются линейно независимые решения системы* $Mc=0$. *Тогда тривиальная пара задачи* (4), (5) *устойчива.*

Доказательство теоремы аналогично доказательству теоремы 6.

Далее будем полагать, что $\omega=(c,\mu,r)$, $b_1(c,r,v)+s_1(\mu)+l_1(c,\mu,r,v)=\psi_1(\omega,v)+\psi_2(\omega,v)$, $\gamma(t,z,\vartheta,\mu)=\gamma_1(t,z,\vartheta,\mu)+\gamma_2(t,z,\vartheta,\mu)$, где $\psi_1(\omega,v)$ — форма порядка $k\geq 2$ по переменной ω, $\psi_2(\omega,v)=o(|\omega|^k)$ равномерно относительно $v=\ker F$, $\gamma_1(t,z,\vartheta,\mu)$ — форма порядка $k\geq 2$ по совокупности переменных z, ϑ, μ, $\lim\limits_{\rho\to 0}\gamma_2(t,\rho z,\rho\vartheta,\rho\mu)/\rho^k=0$ равномерно на множестве $D(\delta_0)$. Тогда система (11) с учетом равенства (12) примет вид

$$T\omega+g^*(\omega v)+\overline{g}^*(\omega,v)=0, \tag{16}$$

в котором T — $n\times(n+m+1)$-матрица, вектор-функция $g^*(\omega,v)$ — форма порядка $k\geq 2$ по переменной ω, $\lim\limits_{\omega\to 0}\frac{\overline{g}^*(\omega,v)}{|\omega|^k}=0$ равномерно относительно $v=\ker F$.

В случае, когда $\operatorname{rang} T=n$, справедливы теоремы, аналогичные теоремам 3, 4 и 5. Поэтому интерес представляет случай, когда $\operatorname{rang} T=d$ и $0\leq d<n$. В равенстве (16) положим $\omega=R_1\gamma$, где R_1 — $(n+m+1)\times(n+m+1-d)$-матрица, столбцами которой являются линейно независимые решения системы $T\omega=0$ ($\omega=\gamma$ при $d=0$). Тогда система (16) запишется в виде

$$g(\gamma,v)+\overline{g}(\gamma,v)=0, \tag{17}$$

где $g(\gamma,v)=g^*(R_1\gamma,v)$, $\overline{g}(\gamma,v)=\overline{g}^*(R_1\gamma,v)$.

Теорема 8. *Если существует такое число $d^* > 0$, что для любого вектора γ^* ($|\gamma^*| = 1$) и любой вектор-функции $v = \ker F$ $|g(\gamma^*, v)| \geq d^*$, то управление $\vartheta_0 = 0$ условно неустойчиво по параметру μ.*

Доказательство. Полагая в равенстве (17) $\gamma = \rho\gamma^*$, $\rho > 0$, получим $g(\gamma^*, v) + O(\rho, v) = 0$, $\lim\limits_{\rho\to 0} O(\rho, v) = 0$ равномерно относительно v. Следовательно, существует число $\overline{\delta} > 0$ такое, что для любого $\rho \in]0, \overline{\delta}]$ $d^* + O(\rho, v) > 0$. Это значит, что пара (ϑ, μ), $\mu \in P(m, \overline{\delta}|R_1|)$, $\vartheta \in w^* = \{\vartheta(t) = Y^*(t)c + rv(t);\ |c| \leq \overline{\delta}|R_1|,\ |r| \leq \overline{\delta}|R_1|\}$, $|\mu| + \|\vartheta\| \neq 0$, не удовлетворяет равенству (11) и поэтому не согласована с задачей (4), (5). $\square$

Таким образом, необходимым условием устойчивости управления $\vartheta_0 = 0$ по параметру μ является существование вектора γ^* ($|\gamma^*| = 1$) и вектор-функции $v \in \ker F$, удовлетворяющих равенству $g(\gamma^*, v^*) = 0$.

Пусть вектор y^* ($|y^*| = 1$) и вектор-функция $v^* = \ker F$ таковы, что $g(y^*, v^*) = 0$. Тогда, полагая $\gamma = \rho y$, $\rho > 0$, $u = y - y^*$ и применяя формулу Тейлора, систему (17) запишем в виде

$$D[g(y^*, v^*)]u + \sum_{j=2}^{k} P_j(y^*, v^*; u) + O(\rho, y, v^*) = 0, \tag{18}$$

где $P_j(y^*, v^*; u)$ — форма порядка j при любом $j \in \{2, \dots, k\}$ по переменной u, $\lim\limits_{\rho\to 0} O(\rho, y, v^*) = 0$ равномерно относительно y, $D[g(y^*, v^*)]$ — матрица Якоби.

Теорема 9. *Если $u \in E_s$, $s > n$ и $\operatorname{rang} D[g(y^*, v^*)] = n$, то при $v = v^*$ система* (18) *имеет ненулевое решение.*

Доказательство. Для простоты рассуждений положим $D[g(y^*, v^*)] = [M_1, M_2]$, M_1 — $n\times n$-матрица, $\det M_1 \neq 0$, M_2 — $n \times (s-n)$-матрица. Пусть $u = \operatorname{colon}(u_1, u_2)$, u_1, u_2 — соответственно n-мерный и $(s-n)$-мерный векторы. Тогда систему (18) можно записать в виде

$$M_1u_1 + M_2u_2 + o(|u_1|) + O_1(u_1, u_2) + O(\rho, y, v^*) = 0, \tag{19}$$

$\lim\limits_{u_2\to 0} O_1(u_1, u_2) = 0$ равномерно относительно u_1. Далее, рассуждая так же, как и при доказательстве теоремы 5, убеждаемся, что существуют числа $\delta_1 > 0$, $\delta_2 > 0$ такие, что для любых u_2 ($|u_2| \leq \delta_2$), $\rho \in]0; \delta_2]$ система (19) имеет решение u_1 и $|u_1| < \delta_1$. Но тогда в силу произвольности u_2 и ρ система (19) имеет ненулевое решение. $\square$

Замечание 1. Пусть $y_1 = u_1 + y_1^*$, $y_2 = u_2 + y_2^*$, $y = \operatorname{colon}(y_1, y_2)$, $y^* = \operatorname{colon}(y_1^*, y_2^*)$, $\gamma_1 = \rho y_1$, $\gamma_2 = \rho y_2$. Тогда из теоремы 9 следует существование чисел $\varepsilon_1 > 0$, $\varepsilon_2 > 0$ таких, что для любого γ_2 ($|\gamma_2| < \varepsilon_2$) существует вектор γ_1 ($|\gamma_1| < \varepsilon_1$), при котором вектор $\gamma = \operatorname{colon}(\gamma_1, \gamma_2)$ удовлетворяет системе (17) при $v = v^*$. Следовательно, теорема 9 1) определяет условия условной устойчивости управления $\vartheta_0 = 0$ по параметру μ, если среди ненулевых координат вектора $\omega = R_1\rho\overline{\gamma}$, $\overline{\gamma} = \operatorname{colon}(0, u_2 + y_2^*)$ (0 — нулевой n-мерный вектор) содержатся все координаты вектора μ; 2) определяет условия устойчивости тривиальной пары задачи (4), (5), если $\omega = R_1\rho\overline{y} = (c, 0, r)$.

Пусть в системе (18) $u \in E_s$, $s > n$, $\operatorname{rang} D[g(y^*, v^*)] = d$, $0 \leq d < n$. Тогда, положив $u = R_2e$, где R_2 — $s \times (s-d)$-матрица, столбцами которой являются линейно независимые решения системы $D[g(y^*, v^*)]u = 0$ ($u = e$ при $d = 0$), систему (18) можно записать в виде

$$\Phi(e) + \Phi_1(e) + O(\rho, y, v^*) = 0, \tag{20}$$

где $\Phi(e)$ — форма порядка $2 \leq k_1 \leq k$, $\lim\limits_{e\to 0} \Phi_1(e)/|e|^{k_1} = 0$.

Теорема 10. *Если $\Phi(e) \neq 0$ для любого вектора e ($|e| = 1$), то управление $\vartheta_0 = 0$ условно неустойчиво по параметру μ.*

Доказательство. Так как множество $\{e : |e| = 1\}$ замкнуто и ограничено, $\Phi(e)$ — форма, то существует число $d^* > 0$ такое, что для любого вектора e ($|e| = 1$) выполнено неравенство $|\Phi(e)| \geq d^*$. Далее доказательство аналогично доказательству теоремы 8. $\square$

Таким образом, необходимым условием устойчивости управления $\vartheta_0 = 0$ по параметру μ является существование вектора e^* ($|e^*| = 1$), удовлетворяющего равенству $\Phi(e^*) = 0$.

Пусть вектор $\overline{y}^*$ ($|\overline{y}^*| = 1$) таков, что $\Phi(\overline{y}^*) = 0$, и пусть $e = \rho_1\overline{y}$, $\rho_1 > 0$. Тогда систему (20) можно представить в виде

$$\Phi(\overline{y}) + O(\rho_1, \overline{y}) + O(\rho, y, v^*)/\rho_1^{k_1} = 0,$$

в котором $\lim\limits_{\rho_1 \to 0} O(\rho_1, \overline{y}) = 0$ равномерно относительно $\overline{y}$. Полагая $\overline{u} = \overline{y} - \overline{y}^*$ и применяя формулу Тейлора, получим

$$D[\Phi(\overline{y}^*)]\overline{u} + \sum_{j=2}^{k_1} \overline{P}_j(\overline{y}^*; \overline{u}) + O(\rho_1, \overline{y}) + O(\rho, y, v^*)/\rho_1^{k_1} = 0, \tag{21}$$

где $D[\Phi(\overline{y}^*)]$ — матрица Якоби, $\overline{P}_j(\overline{y}^*; \overline{u})$ — форма порядка j при любом $j \in \{2, \ldots, k_1\}$ по переменной $\overline{u}$.

Теорема 11. *Если* $\overline{u} \in E_{\overline{s}}$, $\overline{s} > n$ *и* $\operatorname{rang} D[\Phi(\overline{y}^*)] = n$, *то существует ненулевое решение системы* (21).

Доказательство. Для определенности положим $D[\Phi(\overline{y}^*)] = [\overline{M}_1, \overline{M}_2]$, $\overline{M}_1$ — $n \times n$-матрица, $\det \overline{M}_1 \neq 0$, $\overline{M}_2$ — $n \times (\overline{s} - n)$-матрица. Пусть $\overline{u} = \operatorname{colon}(\overline{u}_1, \overline{u}_2)$, $\overline{u}_1$, $\overline{u}_2$ — соответственно n-мерный и $\overline{s}-n$-мерный векторы. Тогда система (21) примет вид

$$\overline{M}_1\overline{u}_1 + \overline{M}_2\overline{u}_2 + o(|\overline{u}_1|) + O_1(\overline{u}_1, \overline{u}_2) + O(\rho_1, \overline{y}) + O(\rho, y, v^*)/\rho_1^{k_1} = 0,$$

$\lim\limits_{\overline{u}_2 \to 0} O_1(\overline{u}_1, \overline{u}_2) = 0$ равномерно относительно $\overline{u}_1$. Далее, рассуждая так же, как и при доказательстве теоремы 9, устанавливаем существование чисел $\rho_1^* > 0$, $\delta_1 > 0$, $\delta_2 > 0$ таких, что при любом $\overline{u}_2$ ($|\overline{u}_2| \leq \delta_2$), любом $\rho \in]0, \delta_2]$ система (21) имеет решение $\overline{u}_1$ ($|\overline{u}_1| < \delta_1$). В силу произвольности ρ и $\overline{u}_2$ это решение ненулевое. $\square$

Замечание 2. Аналогично, как и в замечании 1, устанавливаем, когда теорема 11 определяет условия условной устойчивости управления $\vartheta_0 = 0$ по параметру μ или условия устойчивости тривиальной пары задачи (4), (5).

Пусть $\operatorname{rang} D[\Phi(\overline{y}^*)] = d$, $0 \leq d < n$. Тогда изложенный выше метод определения условий разрешимости системы (18) может быть снова применен для нахождения условий разрешимости системы (21), если размерность $\overline{s}$ вектора $\overline{u}$ удовлетворяет неравенству $\overline{s} - d > n$. И так далее.

Пример. Движение материальной точки с переменной массой при наличии внешних возмущений определяется системой дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = Ax + Bu + s^*(t, \lambda) + \varphi(t, x, u, \lambda), \tag{22}$$

в которой $A = [\operatorname{col}(0,0,0,0), \operatorname{col}(1,0,0,0), \operatorname{col}(0,0,0,0), \operatorname{col}(0,0,1,0)]$, $B = [\operatorname{col}(0,1,0,0), \operatorname{col}(0,0,0,1)]$, $s_0^*(t,\lambda) = \operatorname{col}(\lambda_1 2t^2 + \lambda_4 \cos t,\ \lambda_2 \sin t + \lambda_1 3t^3,\ \lambda_1 \cos t + 3\lambda_2 t,\ -g + \lambda_3 t + 2\lambda_1 t^2 + 2\lambda_4 t^3)$, $\varphi(t, x, u, \lambda) = \operatorname{col}(2\lambda_1 x_1 x_3^2 + 4u_2 x_2 x_4^2,\ 0,\ 3u_1 x_3^3 + 2\lambda_4 x_1 x_4^2,\ 0)$.

В линейном случае при $\lambda = 0$ система (22) рассмотрена в книге ([4], с. 25). При $\lambda = 0$ решением системы (22), удовлетворяющим краевым условиям $x(0) = (-1, 0, 0, 0)$, $x(1) = (0, 0, 0, 0)$ при $u = u(t) = \operatorname{col}(u_1(t), u_2(t))$, $u_1(t) = 6 - 12t$, $u_2(t) = g$, является $x = x(t) = \operatorname{col}(\varphi_1(t), \varphi_2(t), 0, 0)$, $\varphi_1(t) = -1 + 3t^2 - 2t^3$, $\varphi_2(t) = 6t - 6t^2$.

Заменой переменных $z_1 = x_1 - \varphi_1(t)$, $z_2 = x_2 - \varphi_2(t)$, $z_3 = x_3$, $z_4 = x_4$, $v_1 = u_1 - 6 + 12t$, $v_2 = u_2 - g$ система (22) преобразуется в систему

$$\dot{z} = Az + Bv + s_0(t,\lambda) + \varphi_0(t,z,v,\lambda)$$

с краевыми условиями $z(0) = z(1) = (0,0,0,0)$, $\varphi_0(t,z,v,\lambda) = \varphi(t, z + x(t), v + u(t), \lambda)$, $s_0(t,0) \equiv 0$.

Фундаментальной матрицей системы $\dot{z} = Az$ является $Z(t) = [\mathrm{col}(1,0,0,0),\ \mathrm{col}(t,1,0,0),\ \mathrm{col}(0,0,1,0),\ \mathrm{col}(0,0,t,1)]$. Тогда, положив $Y(t) = Z^{-1}(t)B$, $v(t) = Y^*(t)c$, получим $M = \int_0^1 Y(t)Y^*(t)dt = -1/144$. Учитывая, что $b_1(c,r,v) \equiv 0$, $l_1(c,\lambda,r,v) \equiv 0$, $\varepsilon = \max\{|\lambda|,|c|\}$, систему (13) для системы (22) запишем в виде $Mc + s(\lambda) + o(\varepsilon) = 0$. Следовательно, по теореме 3 управление $v_0 = 0$ устойчиво по параметру λ.

Литература

1. Альбрехт Э.Г. *Об оптимальном управлении движением квазилинейных систем* // Дифференц. уравнения. – 1969. – Т. 5. – № 3. – С. 430–442.
2. Альбрехт Э.Г., Соболев О.Н. *Синтез систем управления с минимальной энергией* // Дифференц. уравнения. – 1995. – Т. 31. – № 10. – С. 1611–1616.
3. Демидович Б.П. *Лекции по математической теории устойчивости.* – М.: Наука, 1967. – 472 с.
4. Красовский Н.Н. *Теория управления движением. Линейные системы.* – М.: Наука, 1968. – 476 с.

Рязанский государственный
педагогический университет

Поступили
первый вариант 24.06.1998
окончательный вариант 15.06.1999