ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2000 МАТЕМАТИКА № 9 (460)

УДК 515.124.4

Е.Н. СОСОВ

ОБ ε-ЯДРЕ ОГРАНИЧЕННОГО МНОЖЕСТВА В СПЕЦИАЛЬНОМ МЕТРИЧЕСКОМ ПРОСТРАНСТВЕ

В данной статье доказывается, что отображение, ставящее в соответствие каждому непустому ограниченному множеству в специальном метрическом пространстве его ε-ядро, является равномерно непрерывным относительно метрики Хаусдорфа. Это свойство обобщает свойство сильной устойчивости чебышевского центра ограниченного множества в равномерно выпуклом банаховом пространстве [1].

1. Необходимые определения и теоремы

Напомним некоторые определения и понятия для метрического пространства (X,ρ). Чебышевским радиусом ограниченного множества $M\subset X$ называется число [2]

$$R(M)=\inf_{y\in X}\sup_{x\in M}\rho(x,y).$$

Точка $z\in X$, для которой

$$\sup_{x\in M}\rho(x,z)=\inf_{y\in X}\sup_{x\in M}\rho(x,y),$$

называется чебышевским центром множества M [2]. Метрикой Хаусдорфа на множестве $B[X]$ всех непустых ограниченных замкнутых множеств пространства X называется метрика ([3], с. 223)

$$\delta(M,N)=\max\{\sup_{x\in M}\rho(x,N);\ \sup_{y\in N}\rho(y,M)\}$$

для $M,N\in B[X]$. Очевидно, что на множестве $B(X)$ всех непустых ограниченных множеств пространства X это выражение определяет псевдометрику Хаусдорфа.

Пусть $\varepsilon>0$, $M\in B(X)$, $B[x,r]$ $(B(x,r))$ — замкнутый (открытый) шар с центром в $x\in X$ радиуса $r>0$ и $B(M,r)=\bigcup\{B(x,r):x\in M\}$. Введем множества

$K_\varepsilon(M)=\{y\in X:\sup\limits_{x\in M}\rho(x,y)\le R(M)+\varepsilon\}$,

$\varepsilon(M)=\bigcap\{B[x,R(M)+\varepsilon]:M\subset B[x,R(M)+\varepsilon]\}$,

$k_\varepsilon(M)=\bigcap\{B[x,r(x,M)+\varepsilon]:x\in\varepsilon(M)\}$, где $r(x,M)=(\rho(x,M)+\sup\limits_{y\in M}\rho(x,y))/2$.

Определение. Назовем ε-ядром множества M множество $K_\varepsilon(M)$, где $M\in B(X)$ и $0<\varepsilon<R(M)$.

Отметим некоторые элементарные свойства введенных множеств, доказательства которых нетрудно получить непосредственно из определений.

1. Для каждого множества $M\in B(X)$ множества $K_\varepsilon(M)$, $\varepsilon(M)$ принадлежат $B[X]$ и могут быть представлены в следующих формах: $\varepsilon(M)=\bigcap\{B[x,R(M)+\varepsilon]:x\in K_\varepsilon(M)\}$, $K_\varepsilon(M)=\bigcup\{y\in X:M\subset B[y,R(M)+\varepsilon]\}=\bigcup\{y\in X:\varepsilon(M)\subset B[y,R(M)+\varepsilon]\}=\bigcap\{B[x,R(M)+\varepsilon]:x\in\varepsilon(M)\}$.

2. Если $\alpha\le\varepsilon$, то $K_\alpha(M)\subset K_\varepsilon(M)$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 00-01-00308.

3. Если для множества $M \in B(X)$ существует чебышевский центр, то $\bigcap\{K_\varepsilon(M) : \varepsilon > 0\}$ — множество всех чебышевских центров этого множества.

4. Для каждого множества $M \in B(X)$ имеют место неравенства $R(K_\varepsilon(M)) \le R(M) + \varepsilon$, $R(M) \le R(\varepsilon(M)) \le R(M) + \varepsilon$.

5. Пусть каждый замкнутый шар пространства X является выпуклым множеством в следующем смысле: вместе со всякими двумя точками x, y он содержит каждую точку z, удовлетворяющую условиям $\rho(x, z) = \rho(y, z) = \rho(x, y)/2$. Тогда множества $K_\varepsilon(M)$, $\varepsilon(M)$, $k_\varepsilon(M)$ являются выпуклыми в том же смысле для каждого $M \in B(X)$.

В дальнейшем на метрическое пространство X будем налагать следующее условие [4]: для любых x, y из X найдется точка $z \in X$ такая, что

$$\rho(x, z) = \rho(y, z) = \rho(x, y)/2. \tag{1}$$

Сформулируем полученные в данной статье результаты.

Лемма 1. *Имеет место неравенство $\delta(B[x, r], B[y, R]) \le \rho(x, y) + |R - r|$ для всех x, y из X и $R > 0$, $r > 0$.*

Лемма 2. *Пусть $M_{\alpha n} \in B(X)$, $N_{\alpha n} \in B(X)$ для каждого натурального n и каждого α из некоторого множества индексов A. Если $\bigcap\limits_{\alpha\in A} M_{\alpha n} \neq \emptyset$, $\bigcap\limits_{\alpha\in A} N_{\alpha n} \neq \emptyset$ для каждого натурального n и $\delta(M_{\alpha n}, N_{\alpha n}) \to 0$ $(n \to \infty)$ для каждого $\alpha \in A$, то*

$$\delta\Big(\bigcap_{\alpha\in A} M_{\alpha n}, \bigcap_{\alpha\in A} N_{\alpha n}\Big) \to 0 \ \ (n \to \infty).$$

Теорема. *Пусть для каждого натурального n непустые множества M_n, N_n ограничены и $\delta(M_n, N_n) \to 0$ $(n \to \infty)$. Тогда*

A. *$\delta(K_\varepsilon(M_n), K_\varepsilon(N_n)) \to 0$ $(n \to \infty)$,*

B. *$\delta(\varepsilon(M_n), \varepsilon(N_n)) \to 0$ $(n \to \infty)$,*

C. *Если для каждого натурального n множества $k_\varepsilon(M_n)$, $k_\varepsilon(N_n)$ непустые, то $\delta(k_\varepsilon(M_n), k_\varepsilon(N_n)) \to 0$ $(n \to \infty)$.*

Замечание 1. Утверждения теоремы равносильны тому, что отображения $K_\varepsilon : B(X) \to B(X)$, $\varepsilon : B(X) \to B(X)$, $k_\varepsilon : \widetilde{B}(X) \to B(X)$, где $\widetilde{B}(X)$ — подпространство таких элементов $M \in B(X)$, что $k_\varepsilon(M) \neq \emptyset$, равномерно непрерывны относительно псевдометрики Хаусдорфа.

Из свойства 3, теоремы и леммы 2 следует

Следствие. Пусть для каждого натурального n множества $M_n \in B(X)$, $N_n \in B(X)$ обладают непустыми множествами чебышевских центров $\mathrm{Ch}(M_n)$, $\mathrm{Ch}(N_n)$ и $\delta(M_n, N_n) \to 0$ $(n \to \infty)$. Тогда $\delta(\mathrm{Ch}(M_n), \mathrm{Ch}(N_n)) \to 0$ $(n \to \infty)$.

Замечание 2. Это свойство обобщает свойство сильной устойчивости чебышевского центра ограниченного множества в равномерно выпуклом банаховом пространстве [1].

2. Доказательства полученных результатов

Доказательство леммы 1. Пусть $z \notin B[x, r]$. Тогда из условия (1) следует, что для каждого $\varepsilon > 0$ найдутся $u(\varepsilon) \in B[x, r]$ и $v(\varepsilon) \notin B[x, r]$, удовлетворяющие следующим условиям:

a) $\rho(z, u(\varepsilon)) + \rho(u(\varepsilon), x) = \rho(z, x)$, $\rho(z, B[x, r]) \ge \rho(z, u(\varepsilon)) - \varepsilon$;

b) $\rho(z, v(\varepsilon)) + \rho(v(\varepsilon), x) = \rho(z, x)$, $\rho(z, B[x, r]) \le \rho(z, v(\varepsilon)) + \varepsilon$.

Кроме того, $\rho(z,x)-r-\varepsilon \le \rho(z,x)-\rho(u(\varepsilon),x)-\varepsilon = \rho(z,u(\varepsilon))-\varepsilon \le \rho(z,B[x,r])$, $\rho(z,B[x,r]) \le \rho(z,v(\varepsilon))+\varepsilon = \rho(z,x)-\rho(x,v(\varepsilon))+\varepsilon \le \rho(z,x)-r+\varepsilon$. Отсюда в силу произвольности ε следует, что $\rho(z,B[x,r]) = \rho(z,x)-r$. Используя это равенство, получим

$$\delta(B[x,r],B[y,R]) = \max\{\sup_{z\in B[x,r]} \rho(z,B[y,R]);\ \sup_{w\in B[y,R]} \rho(w,B[x,r])\} =$$
$$= \max\{\sup_{z\in B[x,r]} \max\{\rho(z,y)-R,0\};\ \sup_{w\in B[y,R]} \max\{\rho(w,x)-r,0\}\} \le$$
$$\le \max\{\max\{\rho(x,y)+r-R,0\};\ \max\{\rho(y,x)+R-r,0\}\} = \rho(x,y)+|R-r|. \quad \square$$

Доказательство леммы 2. Используем сокращенное обозначение $\bigcap = \bigcap\limits_{\alpha\in A}$. Будем доказывать лемму от противного. Пусть найдутся подпоследовательности $\{\bigcap M_{\alpha m}\}$, $\{\bigcap N_{\alpha m}\}$ последовательностей $\{\bigcap M_{\alpha n}\}$, $\{\bigcap N_{\alpha n}\}$, натуральное число m_0 и константа $c>0$, для которых выполняются неравенства $\delta(\bigcap M_{\alpha m}, \bigcap N_{\alpha m}) > c$ при $m > m_0$. Отсюда следует, что найдутся подпоследовательности $\{\bigcap M_{\alpha l}\}$, $\{\bigcap N_{\alpha l}\}$ последовательностей $\{\bigcap M_{\alpha m}\}$, $\{\bigcap N_{\alpha m}\}$, натуральное число l_0, для которых одно из двух выражений под знаком max в псевдометрике Хаусдорфа (для определенности, первое выражение) удовлетворяет неравенству $\sup\{\rho(x_l,\bigcap N_{\alpha l}) : x_l \in \bigcap M_{\alpha l}\} > c$ при $l > l_0$. Поэтому найдутся $x_l \in \bigcap M_{\alpha l}$ такие, что $\rho(x_l, \bigcap N_{\alpha l}) > c$ при $l > l_0$. Следовательно, $B(x_l, c/3) \cap B(\bigcap N_{\alpha l}, c/3) = \emptyset$ при $l > l_0$. Отсюда следует, что найдется такое $\beta \in A$, что $B(x_l, c/3) \cap N_{\beta l} = \emptyset$ при $l > l_0$. Но тогда $\delta(M_{\beta l}, N_{\beta l}) \ge \sup\{\rho(x_{\beta l}, N_{\beta l}) : x_{\beta l} \in M_{\beta l}\} \ge \rho(x_{\beta l}, N_{\beta l}) \ge c/3 > 0$ при $l > l_0$, что противоречит условию леммы 2. $\square$

Доказательство теоремы 1. Докажем прежде всего, что

$$|R(M)-R(N)| \le \delta(M,N) \tag{2}$$

для всех M, N из $B(X)$ [1]. Пусть $x \in M$ и $\tau > 0$. Тогда найдется точка $z \in N$ такая, что $\rho(x,z) \le \rho(x,N)+\tau$. Кроме того, получим неравенства $\rho(x,y) \le \rho(x,z)+\rho(z,y) \le \rho(x,N)+\rho(z,y)+\tau \le \sup\limits_{x\in M}\rho(x,N)+\sup\limits_{z\in N}\rho(z,y)+\tau \le \delta(M,N)+\sup\limits_{z\in N}\rho(z,y)+\tau$ для $y \in X$. Отсюда следует, что $\inf\limits_{y\in X}\sup\limits_{x\in M}\rho(x,y) \le \delta(M,N)+\sup\limits_{z\in N}\rho(z,y)+\tau$. Переходя к точной нижней грани в правой части и используя произвольность выбора $\tau > 0$, получим

$$R(M) = \inf_{y\in X}\sup_{x\in M}\rho(x,y) \le \delta(M,N) + \inf_{y\in X}\sup_{z\in N}\rho(z,y) = \delta(M,N)+R(N).$$

Неравенство $R(N) \le \delta(M,N)+R(M)$ получается аналогично. Пусть утверждение A теоремы неверно. Тогда найдутся подпоследовательности $\{M_m\}$, $\{N_m\}$ последовательностей $\{M_n\}$, $\{N_n\}$, натуральное число m_0 и константа $c>0$, для которых при $m > m_0$ выполняется неравенство $\delta(K_\varepsilon(M_m), K_\varepsilon(N_m)) >$ с. Отсюда следует, что найдутся подпоследовательности $\{M_l\}$, $\{N_l\}$ последовательностей $\{M_m\}$, $\{N_m\}$, натуральное число l_0, для которых одно из двух выражений под знаком max в псевдометрике Хаусдорфа (для определенности, первое выражение) удовлетворяет при $l > l_0$ неравенству $\sup\{\rho(x_l, K_\varepsilon(N_l)) : x_l \in K_\varepsilon(M_l)\} > c$. Поэтому при $l > l_0$ найдется $z_l \in K_\varepsilon(M_l)$ такое, что $\rho(z_l, K_\varepsilon(N_l)) > c$. Следовательно, при $l > l_0$ $B(z_l, c/3) \cap B(K_\varepsilon(N_l), c/3) = \emptyset$. Отсюда и из свойства 1 следует, что при $l > l_0$ найдется такое $u_l \in N_l$, что $B(z_l, c/3) \cap B[u_l, R(N_l)+\varepsilon] = \emptyset$. По условию теоремы $\delta(M_l, N_l) \to 0$ $(l \to \infty)$. Следовательно, найдутся элементы $v_l \in M_l$ такие, что $\rho(u_l, v_l) \to 0$ $(l \to \infty)$. Кроме того,

$$\delta(B[v_l, R(M_l)+\varepsilon], B[u_l, R(N_l)+\varepsilon]) \ge \sup_{w_l \in B[v_l, R(M_l)+\varepsilon]} \rho(w_l, B[u_l, R(N_l)+\varepsilon]) \ge$$
$$\ge \rho(z_l, B[u_l, R(N_l)+\varepsilon]) \ge c/3 > 0 \ \text{ при } \ l > l_0. \tag{3}$$

Но из леммы 1 и неравенства (2) следует, что первое выражение в этих неравенствах стремится к нулю при $l > l_0$. Получили противоречие. Таким образом, утверждение A доказано.

Пусть утверждение B теоремы неверно. Тогда найдутся подпоследовательности $\{M_m\}$, $\{N_m\}$ последовательностей $\{M_n\}$, $\{N_n\}$, натуральное число m_0 и константа $c>0$, для которых при

$m > m_0$ выполняется неравенство $\delta(\varepsilon(M_m), \varepsilon(N_m)) >$ c. Отсюда следует, что найдутся подпоследовательности $\{M_l\}$, $\{N_l\}$ последовательностей $\{M_m\}$, $\{N_m\}$, натуральное число l_0, для которых одно из двух выражений под знаком max в псевдометрике Хаусдорфа (для определенности, первое выражение) удовлетворяет при $l > l_0$ неравенству $\sup\{\rho(x_l, \varepsilon(N_l)) : x_l \in \varepsilon(M_l)\} > c$. Поэтому при $l > l_0$ найдется $z_l \in \varepsilon(M_l)$ такое, что $\rho(z_l, \varepsilon(N_l)) > c$. Следовательно, при $l > l_0$ $B(z_l, c/3) \cap B(\varepsilon(N_l), c/3) = \emptyset$. Отсюда и из свойства 1 следует, что при $l > l_0$ найдется такое $u_l \in K_\varepsilon(N_l)$, что $B(z_l, c/3) \cap B[u_l, R(N_l) + \varepsilon] = \emptyset$. Из утверждения A и условия теоремы следует, что $\delta(K_\varepsilon(M_l), K_\varepsilon(N_l)) \to 0 (l \to \infty)$. Следовательно, найдутся элементы $v_l \in K_\varepsilon(M_l)$ такие, что $\rho(u_l, v_l) \to 0$ $(l \to \infty)$. В этом случае также имеют место неравенства (3). Повторяя рассуждение из доказательства утверждения A, получаем противоречие.

Пусть утверждение C теоремы неверно. Тогда найдутся подпоследовательности $\{M_m\}$, $\{N_m\}$ последовательностей $\{M_n\}$, $\{N_n\}$, натуральное число m_0 и константа $c > 0$, для которых при $m > m_0$ выполняется неравенство $\delta(k_\varepsilon(M_m), k_\varepsilon(N_m)) >$ c. Отсюда следует, что найдутся подпоследовательности $\{M_l\}$, $\{N_l\}$ последовательностей $\{M_m\}$, $\{N_m\}$, натуральное число l_0, для которых одно из двух выражений под знаком max в псевдометрике Хаусдорфа (для определенности, первое выражение) удовлетворяет при $l > l_0$ неравенству $\sup\{\rho(x_l, k_\varepsilon(N_l)) : x_l \in k_\varepsilon(M_l)\} > c$. Поэтому при $l > l_0$ найдется $z_l \in k_\varepsilon(M_l)$ такое, что $\rho(z_l, k_\varepsilon(N_l)) > c$. Следовательно, при $l > l_0$ $B(z_l, c/3) \cap B(k_\varepsilon(N_l), c/3) = \emptyset$. Отсюда и из свойства 1 следует, что при $l > l_0$ найдется такое $u_l \in \varepsilon(N_l)$, что $B(z_l, c/3) \cap B[u_l, r(u_l, N_l) + \varepsilon] = \emptyset$. Из утверждения B и условия теоремы следует, что $\delta(\varepsilon(M_l), \varepsilon(N_l)) \to 0$ $(l \to \infty)$. Следовательно, найдутся элементы $v_l \in \varepsilon(M_l)$ такие, что $\rho(u_l, v_l) \to 0$ $(l \to \infty)$. Кроме того,

$$\delta(B[v_l, r(v_l, M_l) + \varepsilon], B[u_l, r(u_l, N_l) + \varepsilon]) \geq \sup_{w_l \in B[v_l, r(v_l, M_l) + \varepsilon]} \rho(w_l, B[u_l, r(u_l, N_l) + \varepsilon]) \geq$$
$$\geq \rho(z_l, B[u_l, r(u_l, N_l) + \varepsilon]) \geq c/3 > 0 \ \text{ при } \ l > l_0. \quad (4)$$

Но из неравенства

$$|r(u_l, N_l) - r(v_l, M_l)| = |(\rho(u_l, N_l) + \sup_{w_l \in N_l} \rho(u_l, w_l))/2 - (\rho(v_l, M_l) + \sup_{w_l \in M_l} \rho(v_l, w_l))/2| \leq \rho(u_l, v_l)$$

и леммы 1 следует, что первое выражение в неравенствах (4) стремится к нулю при $l > l_0$. Получили противоречие. □

Литература

1. Белобров П.К. *О чебышевской точке системы множеств* // Изв. вузов. Математика. – 1966. – № 6. – С. 18–24.
2. Гаркави А.Л. *О наилучшей сети и наилучшем сечении множеств в нормированном пространстве* // Изв. АН СССР. Сер. матем. – 1962. – Т. 26. – No 1. – С. 87–106.
3. Куратовский К. *Топология.* – М.: Мир, 1966. – Т. 1. – 594 с.
4. Ефремович В.А. *Неэквиморфность пространств Евклида и Лобачевского* // УМН. – 1949. – Т.4. – Вып. 2. – С. 178–179.

Казанский государственный педагогический университет

Поступила 11.05.1999